# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


POISSON

**Remarques sur les Intégrales des fractions rationnelles**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 2 (1837), p. 224-228.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__224_0>

# REMARQUES

## *Sur les Intégrales des fractions rationnelles;*

PAR M. POISSON.

Lorsqu'on passe de l'intégrale indéfinie d'une fraction rationnelle à son intégrale définie, prise entre les limites zéro et l'infini, il arrive souvent qu'elle se réduit à une fonction algébrique des racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fraction proposée, et qu'elle ne contient plus qu'une seule quantité transcendante, savoir, le rapport $\pi$ de la circonférence au diamètre. Mais cette fonction n'est pas du genre de celles que l'on peut exprimer sans radicaux, au moyen des coefficients de l'équation dont elle renferme les racines; et quoiqu'elle ne doive avoir qu'une seule valeur, elle dépend, néanmoins, d'une équation d'un degré supérieur au premier, dont cette valeur est une racine déterminée. C'est ce que l'on verra, en effet, par l'exemple suivant, auquel il sera facile d'en ajouter, si l'on veut, beaucoup d'autres.

Je désignerai par $a$, $b$, $c$, $g$, $h$, $k$, des constantes données, et j'appellerai $y$ l'intégrale que je prendrai pour exemple, savoir :

$$y = \int_0^\infty \frac{(g + hx^2 + kx^4)dx}{x^6 + ax^4 + bx^2 + c}.$$

Soient $-\alpha^2$, $-6^2$, $-\gamma^2$, les trois racines, réelles ou imaginaires de l'équation

$$x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

résolue par rapport à $x^2$, de sorte qu'on ait

$$\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = a, \quad \alpha^2 6^2 + \gamma^2\alpha^2 + 6^2\gamma^2 = b, \quad \alpha^2 6^2 \gamma^2 = c. \quad (1)$$

Afin que le dénominateur de la fraction comprise sous le signe $\int$, ne passe pas par zéro entre les limites de l'intégration, je supposerai qu'aucune de ces racines ne soit positive, ce qui exigera que le dernier terme $c$ soit positif. Les signes de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, seront ambigus. Pour fixer les idées, je supposerai aussi que ces trois quantités sont positives, ou des imaginaires dont la partie réelle est positive.

Par la règle ordinaire, on aura

$$\begin{aligned} y = & \frac{g - h\alpha^2 + k\alpha^4}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} \\ & + \frac{g - h\beta^2 + k\beta^4}{(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \beta^2} \\ & + \frac{g - h\gamma^2 + k\gamma^4}{(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Je fais $x = \alpha z$ et $dx = \alpha dz$ dans la première intégrale, $x = \beta z$ et $dx = \beta dz$ dans la seconde, $x = \gamma z$ et $dx = \gamma dz$ dans la troisième. D'après l'hypothèse que l'on vient de faire sur les signes de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, les limites relatives à la nouvelle variable $z$ seront toujours zéro et l'infini positif; et à cause de $\int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2}\pi$, il en résultera

$$\frac{2}{\pi} y = \frac{g - h\alpha^2 + k\alpha^4}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} + \frac{g - h\beta^2 + k\beta^4}{\beta(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2)} + \frac{g - h\gamma^2 + k\gamma^4}{\gamma(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)},$$

ou bien, en réduisant les trois fractions au même dénominateur,

$$\frac{2}{\pi} y = \frac{g(\alpha + \beta + \gamma) + h\alpha\beta\gamma + k\alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta)(\gamma + \alpha)(\beta + \gamma)} \qquad (2)$$

Soit actuellement

$$\alpha + \beta + \gamma = u.$$

En vertu des équations (1), on aura d'abord

$$2(\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma) = u^2 - a;$$

on aura ensuite

$$4[\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\alpha^2 + \beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)] = (u^2 - a)^2,$$

et, par conséquent,

$$(u^2 - a)^2 - 8u\sqrt{c} - 4b = 0, \qquad (3)$$

où l'on regardera $\sqrt{c}$, valeur de $\alpha\beta\gamma$, comme une quantité positive. Or, il est évident qu'on aurait été conduit à cette même équation (3), si l'on eût pris pour $u$ l'une des trois quantités $\alpha-\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\gamma-\alpha$, qui se déduisent du trinome $\alpha+\beta+\gamma$, en changeant les signes de deux de ses termes, ce qui n'empêche pas le produit des trois termes, de rester positif et égal à $\sqrt{c}$. Il s'ensuit donc que les quatre racines de l'équation (5) sont

$$\alpha+\beta+\gamma,\quad \alpha-\beta-\gamma,\quad \gamma-\alpha-\beta,\quad \beta-\gamma-\alpha.$$

D'ailleurs, les trois quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, étant positives ou des imaginaires dont la partie réelle est positive, il en résulte qu'une au moins de ces quatre racines sera réelle et positive; et l'on voit aussi que si l'équation (3) a plusieurs racines de cette espèce, c'est la plus grande qui exprime la valeur de $\alpha+\beta+\gamma$. En désignant par $p$ la plus grande racine positive de l'équation (3), il faudra donc prendre, dans la formule (2),

$$\alpha+\beta+\gamma=p,\quad \alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma=\tfrac{1}{2}(p^2-a);$$

comme on a identiquement

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma,$$

on aura, en même temps,

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)=\tfrac{1}{2}p(p^2-a)-\alpha\beta\gamma;$$

et à cause de $\alpha\beta\gamma=\sqrt{c}$, la formule (2) deviendra

$$\frac{2}{\pi}y=\frac{2gp+2h\sqrt{c}+k(p^2-a)\sqrt{c}}{p(p^2-a)\sqrt{c}-2c}; \qquad (4)$$

en sorte qu'il suffira de calculer la valeur de la plus grande racine de l'équation (3), pour en conclure immédiatement la valeur de $y$.

En remettant pour $y$ l'intégrale que cette lettre représente, on pourra décomposer cette formule (4), en ces trois autres

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{X} &= \frac{\pi p}{p(p^2-a)\sqrt{c}-2c},\\ \int_0^\infty \frac{x^2dx}{X} &= \frac{\pi\sqrt{c}}{p(p^2-x)\sqrt{c}-2c},\\ \int_0^\infty \frac{x^4dx}{X} &= \frac{\pi(p^2-a)\sqrt{c}}{2p(p^2-a)\sqrt{c}-4c},\end{aligned}\right\}(5)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$x^6 + ax^4 + bx^2 + c = X.$$

Si l'on a, par exemple, $a=0$, $b=0$, $c=1$, l'équation (3) se réduira à $u^6-8u=0$; ses quatre racines seront $u=0$, $u=2$, $u=1\pm\sqrt{-3}$; ce sera la seconde qu'il faudra prendre pour $p$; au moyen de quoi, les équations (5) deviendront

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3},\quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{6},\quad \int_0^\infty \frac{x^4dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3};$$

ce qui coïncide avec les valeurs que l'on déduirait de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{mx}{n}}.$$

Dans le cas de $a=3$, $b=3$, $c=1$, l'équation (3) a une racine égale à 3, et trois racines égales entre elles et à $-1$. En prenant donc $p=3$, les formules (5) donneront alors

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{3\pi}{16},\quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}=\frac{\pi}{16},\quad \int_0^\infty \frac{x^4dx}{(1+x^2)^3}=\frac{3\pi}{16};$$

résultats faciles à vérifier, par le procédé de l'intégration par partie.

En général, si l'on élimine $p$ et $p^2-a$, entre les trois équations (5), il vient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{X}\int_0^\infty \frac{x^4dx}{X}-\left(\int_0^\infty \frac{x^2dx}{X}\right)^2=\frac{\pi}{2\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{x^4dx}{X};$$

équation indépendante de $a$ et $b$, et qui fera connaître immédiatement l'une des trois intégrales que nous considérons, lorsque les valeurs des deux autres seront connues. On aura aussi cette autre équation

$$\frac{p}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{x^2dx}{X}=\int_0^\infty \frac{dx}{X};$$

et quand les deux intégrales qu'elle renferme auront été calculées par les quadratures, elle fera connaître la valeur approchée de la plus grande racine positive $p$ de l'équation (3).

La fraction rationnelle donnée ne contenant toujours que des puissances paires de la variable; si son dénominateur est du huitième degré, l'équation dont sa valeur dépendra, se réduira au quatrième degré, comme l'équation (3), et ce sera encore la plus grande racine positive de cette équation qu'il faudra employer dans cette valeur

Après avoir décomposé une fraction rationnelle en fractions simple dont les dénominateurs soient du premier ou du second degré; si l'on suppose que le nombre qui marque le degré du dénominateur de la fraction proposée devienne infini, le nombre des fractions simples le deviendra aussi, et elles formeront une série infinie dont la fraction donnée exprimera la valeur. On obtient par là, sans intégration, les sommes des diverses séries qu'Euler et D. Bernouilli ont considérées, et qui sont déterminées d'une autre manière dans mes mémoires sur les intégrales définies (*); mais je n'ai pas vu que ce moyen conduisît à des résultats qui ne fussent pas déjà connus.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XVIII[e] cahier, pages 311 et suivantes.