JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur un passage de la Mécanique céleste, relatif à la Théorie de la Figure des Planètes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 206-219.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__206_0>

NOTE

Sur un passage de la Mécanique céleste, *relatif à la Théorie de la Figure des Planètes;*

Par J. LIOUVILLE.

I.

On s'est beaucoup occupé de la recherche des formes permanentes qui peuvent convenir à une masse liquide dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances et tournent autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. Ce problème, qui se rattache à la théorie de la figure des planètes, devait naturellement intéresser les géomètres; mais il n'a pas été résolu par eux d'une manière générale. On s'est borné d'abord à démontrer la possibilité de certaines figures d'équilibre. Quand la vitesse angulaire de rotation est au-dessous d'une limite indiquée par le calcul, on sait depuis long-temps que deux formes au moins sont possibles, toutes deux comprises parmi les ellipsoïdes de révolution. Laplace a observé de plus que, pour une impulsion primitive donnée, il existe toujours un seul ellipsoïde de révolution satisfaisant aux conditions d'équilibre du liquide. Mais ces mêmes conditions peuvent être remplies aussi, dans certains cas, par un ellipsoïde à trois axes inégaux. Ce dernier théorème est dû à M. Jacobi. J'en ai donné dans le XXIII^{e} cahier du *Journal de l'École polytechnique* une démonstration très simple.

Quand on envisage le problème dont nous nous occupons ici, sous le point de vue de ses applications à la physique céleste, la question se simplifie beaucoup à cause du peu de différence qui existe entre la figure d'une sphère et celle des planètes et des satellites. En négligeant le carré de cette différence, on prouve en effet que la figure d'équilibre de la masse fluide est toujours celle d'un ellipsoïde de révolution dont le petit axe coïncide avec l'axe fixe. Pour démontrer cette proposition importante, Laplace a employé deux méthodes distinctes que l'on trouve exposées au livre 3^e^ de la *Mécanique céleste*. La première de ces deux méthodes repose sur la possibilité de développer une fonction Y de deux variables μ et ϖ en une série que les géomètres désignent ordinairement par $Y_0 + Y_1 + Y_2 +$ etc., et dont les divers termes jouissent de plusieurs belles propriétés aujourd'hui bien connues. Après l'avoir donnée, Laplace ajoute : « L'analyse précédente nous a conduits à la figure d'une masse fluide homogène en » équilibre, sans employer d'autres hypothèses que celle d'une figure » très peu différente de la sphère. Elle fait voir que la figure elliptique » qui, par le chapitre précédent, satisfait à cet équilibre, est la seule » alors qui lui convienne. Mais comme la réduction du rayon du sphé- » roïde en une série de la forme $a(1+\alpha Y_0+\alpha Y_1+\ldots)$ peut faire naître » quelques difficultés, nous allons démontrer directement et indépendamment de cette réduction que la forme elliptique est la seule figure » d'équilibre d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de » rotation, ce qui, en confirmant les résultats de l'analyse précédente, » servira en même temps à dissiper les doutes que l'on pourrait élever » contre la généralité de cette analyse. » Mais cette seconde solution de l'illustre auteur nous paraît incomplète, et c'est à en montrer l'imperfection que la présente note sera consacrée. Le vice de la méthode de Laplace provient de ce qu'il n'a pas démontré *à priori* que la quantité H dont il fait usage (*Mécanique céleste*, tome II, page 75) est une quantité finie : s'il existait une figure d'équilibre pour laquelle on eût $H=\infty$ (ce qui arriverait par exemple si la variation du rayon du sphéroïde était proportionnelle au cube du cosinus de la latitude), cette figure échapperait nécessairement à son analyse. C'est ce que l'on verra dans le numéro suivant où je m'efforcerai de développer mon objection avec la clarté désirable. Je montrerai ensuite comment on peut en effet résoudre la question proposée sans réduire en série le rayon du sphéroïde. Cette dernière partie de mon travail intéressera peut-être les géomètres, qui savent combien il est utile de traiter sous plusieurs points de vue les questions mathématiques délicates.

II.

En cherchant à déterminer la figure permanente d'une masse liquide homogène, dont les molécules s'attirent l'une l'autre avec une force inversement proportionnelle au carré des distances, et qui tourne autour d'un axe fixe passant par son centre de gravité, Laplace est conduit (*Mécanique céleste,* tome II, page 75) à l'équation

$$(A) \qquad C = \frac{4\alpha\pi}{3}.Y - \alpha\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y'dpdq'\sin p - \tfrac{1}{2}g(1-\mu^2):$$

μ représente une variable comprise entre -1 et $+1$; c'est le cosinus de l'angle que fait avec l'axe de révolution un rayon vecteur quelconque : Y est une fonction inconnue de μ, et Y' une fonction semblable de μ', c'est-à-dire de $\mu\cos^2 p - \sin^2 p\cos q'$: α, g, C sont des constantes. Pour déterminer Y, Laplace différentie trois fois par rapport à μ l'équation (A), et, en observant que $\frac{d\mu'}{d\mu} = \cos^2 p$, il trouve

$$o = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{d^3Y}{d\mu^3} - \int_0^\pi\int_0^{2\pi} dpdq'\sin p\cos^6 p.\frac{d^3Y'}{d\mu'^3},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$o = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} dpdq'\sin p\cos^6 p\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{d^3Y}{d\mu^3} - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}\right).$$

« Cette équation, dit-il, doit avoir lieu quel que soit μ : or il est clair » que parmi toutes les valeurs de μ comprises depuis $\mu = -1$ jus» qu'à $\mu = 1$, il en existe une que nous désignerons par h et qui est » telle, qu'abstraction faite du signe, aucune des valeurs de $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ ne » surpassera celle qui est relative à h : en désignant donc par H cette » dernière valeur, on aura

$$o = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} dpdq'\sin p\cos^6 p\left(\frac{7}{3}H - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}\right).$$

» La quantité $\frac{7}{3}H - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}$ est évidemment du même signe que H, et
» le facteur $\sin p \cos^6 p$ est constamment positif dans toute l'étendue de
» l'intégrale : les éléments de cette intégrale sont donc tous du même
» signe que H, d'où il suit que l'intégrale entière ne peut être nulle
» à moins que H ne le soit lui-même, ce qui exige que l'on ait
» généralement $o = \frac{d^3Y}{d\mu^3}$, d'où l'on tire, en intégrant, $Y = l + m\mu + n\mu^2$.
» l, m, n étant des constantes arbitraires. »

Ce raisonnement est spécieux et peut séduire au premier aperçu ; mais, en y réfléchissant davantage, on voit qu'il cesserait d'être applicable si le maximum de la fonction $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ pouvait être infini, ce qui arriverait si l'on avait par hasard

$$Y = (1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou} \quad Y = (1 - \mu^2)^{\frac{7}{3}}, \quad \text{etc.},$$

en sorte que pour l'employer avec sécurité, il faudrait avoir prouvé *à priori* que la dérivée $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ ne devient infinie pour aucune valeur de μ, ce que Laplace ne fait nulle part. Pour nous convaincre de l'inexactitude du principe sur lequel il s'appuie, considérons un exemple très simple; et proposons de trouver la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\text{(B)} \qquad \int_0^1 \varphi(\alpha x) d\alpha = \frac{3}{10}\varphi(x),$$

x étant une variable indépendante. En différentiant trois fois l'équation (B) par rapport à x, il vient

$$\int_0^1 \alpha^3 \varphi'''(\alpha x)\, d\alpha = \frac{3}{10}\varphi'''(x),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\text{(C)} \qquad \int_0^1 \alpha^3 \left[\frac{12}{10}\varphi'''(x) - \varphi'''(\alpha x)\right] d\alpha = 0.$$

Maintenant en appliquant à l'équation (C) et à la fonction $\varphi(x)$ le raisonnement de Laplace, sans y changer un seul mot, on trouvera comme ci-dessus $\varphi'''(x) = 0$, ce qui est absurde; car la valeur de

$\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (B) est évidemment de la forme $\varphi(x) = \mathrm{A}x^{\frac{7}{3}}$, A désignant une constante arbitraire.

En mettant l'équation

$$\int_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = 2\varphi(x)$$

sous la forme

$$\int_0^1 d\alpha[\varphi(\alpha x) - 2\varphi(x)] = 0,$$

on en conclura de même $\varphi(x) = 0$, tandis que $\varphi(x)$ peut avoir cette valeur plus générale $\varphi(x) = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x}}$.

Pour que la démonstration de Laplace fût suffisante, il faudrait donc que ce grand géomètre eût montré d'abord que la dérivée $\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3}$ a toujours une valeur finie. Et l'on ne doit pas dire que, dans son analyse, il exclut implicitement les cas où l'on aurait

$$\mathrm{H} = \infty,$$

car il se propose de prouver non pas que la figure ellipsoïdale satisfait à l'équilibre de la masse fluide supposée presque sphérique, mais bien qu'aucune autre figure ne peut y satisfaire. Exclure d'avance certaines formes de la fonction Y, serait évidemment aller contre le but qu'il indique lui-même et ruiner par le fait sa propre démonstration. La seule condition à laquelle la fonction Y soit soumise, c'est de ne devenir jamais infinie. Ainsi, pour trouver la valeur de Y, satisfaisant à l'équation (A), il faut employer une méthode très différente de celle de Laplace. Je vais exposer cette méthode.

III.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires. Imaginons autour du point O une masse fluide homogène A qui tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse constante et dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances. La figure permanente de cette masse liquide dépendra de l'intensité de la force centrifuge qui s'exerce à la distance 1 de l'axe de rotation : nous désignerons cette intensité par g et nous la supposerons assez petite pour que la figure du liquide soit très peu différente de celle d'une sphère. Nous prendrons en outre pour unité la force attractive produite à l'unité de distance entre deux masses égales à l'unité. Cela étant, considérons un point M placé à la surface libre du liquide : nommons θ l'angle MOz et μ le cosinus de θ, r le rayon vecteur OM, ϖ l'angle compris entre la projection de r sur le plan des xy et l'axe des x : représentons par θ', μ', r', ϖ' les quantités analogues à θ, μ, r, ϖ pour un autre point M' pris dans l'intérieur de A. L'élément de A dont le centre est en M' sera exprimé par $r'^2 \sin\theta' d\theta' d\varpi' dr'$ ou par $r'^2 d\mu' d\varpi' dr'$. La distance du point M au point M' sera

$$\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\mathrm{P}},$$

P étant le cosinus de l'angle compris entre les deux droites r et r', en sorte que l'on a

$$\mathrm{P} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi - \varpi'),$$

ou

$$\mathrm{P} = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\;\sqrt{1-\mu'^2}.\cos(\varpi - \varpi').$$

La somme V des éléments de A divisés par leurs distances respectives au point M sera exprimée par l'intégrale triple

$$\mathrm{V} = \iiint \frac{r'^2 d\mu' d\varpi' dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\mathrm{P}}},$$

les intégrations s'étendant à la masse A tout entière. Et la figure permanente de cette masse sera déterminée par l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{V} + \frac{gr^2}{2}(1 - \mu^2) = \text{constante},$$

qu'il est aisé de démontrer par les formules connues de l'hydrostatique. L'équation (1) doit servir, comme on voit, à déterminer r en fonction des deux variables indépendantes μ, ϖ.

Nous supposerons désormais que l'origine O est placée au centre de gravité du sphéroïde : nous désignerons par a la plus petite valeur de

r : la valeur générale de ce rayon vecteur sera donc de la forme

$$r = a(1 + \alpha Y),$$

α étant un très petit coefficient et Y une fonction inconnue de μ et ϖ : à cause de la petitesse de α et de g, on négligera dans le calcul les quantités de l'ordre αg et de l'ordre α^2. La valeur de V se composera de deux parties distinctes : l'une relative à la sphère du rayon a est exprimée par

$$\frac{4\pi a^2}{3}(1 - \alpha Y) :$$

l'autre, relative à l'excès du sphéroïde sur la sphère, a pour valeur

$$\alpha . a^2 . \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2 - 2P}} :$$

Y' désigne ce que devient Y lorsqu'on y change μ en μ' et ϖ en ϖ'

IV.

Cette expression de V, savoir,

$$(2) \qquad V = \frac{4\pi a^2}{3}(1 - \alpha Y) + \alpha a^2 \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2 - 2P}},$$

n'est pas la seule dont on puisse faire usage. D'après la transformation très ingénieuse donnée par Laplace à la page 73 (*) du tome II de la *Mécanique céleste*, on a aussi

$$(3) \qquad V = \frac{4\pi a^2}{3}(1 - \alpha Y) + \alpha a^2 \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} Y' \sin p dp dq',$$

les nouvelles variables p, q', étant liées aux anciennes μ', ϖ' par deux relations dont l'une est

(*) A la page citée, Laplace considère spécialement un sphéroïde de révolution ; mais son analyse est générale et s'étend sans modifications à tous les sphéroïdes très peu différents de la sphère.

$$\mu' = \mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q',$$

et dont l'autre est inutile à l'objet que nous nous proposons ici.

En comparant ces deux valeurs de V, qui doivent être identiquement égales, on tombe sur une formule remarquable, savoir

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} Y' \sin p dp dq'.$$

Dans cette formule, la fonction Y de μ, ϖ est arbitraire : toutefois elle ne doit jamais devenir infinie, lorsque μ varie de -1 à $+1$ et ϖ de 0 à 2π. Lorsque Y est une fonction $F(\mu)$ indépendante de ϖ, on a, d'après cela,

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{F(\mu') d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} F(\mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q') \sin p dp dq'.$$

En particulier si l'on pose $F(\mu) = \mu^n$, n étant un nombre entier positif quelconque, il vient

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mu'^n d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} (\mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q')^n . \sin p dp dq,$$

et comme l'intégrale placée au second membre est toujours facile à calculer, on voit qu'il en sera de même de l'autre intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mu'^n d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} :$$

en développant en effet $(\mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q')^n$ par la formule du binome de Newton et multiplant ensuite les divers termes de ce développement par $\sin p dp dq'$, il est évident que l'intégrale du premier terme $\mu^n \cos^{2n} p \sin p dp dq'$ sera $\frac{4\pi\mu^n}{2n+1}$: celle du terme suivant sera nulle ainsi que celle de chaque terme de rang pair : le résultat de l'intégration sera donc une fonction entière de μ de la forme

$$\frac{4\pi\mu^n}{2n+1} + C_1\mu^{n-2} + C_2\mu^{n-4} + \ldots,$$

C_1, C_2, ... étant des constantes dont il est inutile d'écrire ici les valeurs; et l'on aura

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mu'^n d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \frac{4\pi\mu^n}{2n+1} + C_1\mu^{n-2} + \text{etc.}$$

En changeant μ' en μ et μ en μ', ce qui n'altère pas la valeur de P, on obtiendra semblablement

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mu^n d\mu d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \frac{4\pi\mu'^n}{2n+1} + C_1\mu'^{n-2} + \text{etc.}$$

La formule (4) nous sera par la suite d'un grand secours.

V.

En mettant pour V sa valeur (2) dans l'équation (1) et observant que l'on peut, à cause de la petitesse de g, poser $r=a$ dans le second terme, cette équation devient

$$\frac{4\pi a^2}{3}(1-\alpha Y) + \alpha a^2\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} + \frac{a^2 g}{2}(1-\mu^2) = \text{const.};$$

ou plus simplement

$$(5)\qquad \frac{4\pi}{3}Y - \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = C + \frac{g}{2\alpha}(1-\mu^2),$$

C étant une constante. On pourra aussi lui donner cette autre forme équivalente

$$(6)\qquad \frac{4\pi}{3}Y - \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} Y'\sin p\,dp\,dq' = C + \frac{g}{2\alpha}(1-\mu^2),$$

en employant la valeur (3) de V. Pour en tirer Y, le moyen le plus simple est de développer cette inconnue en une série $Y_0 + Y_1 +$ etc. dont les géomètres ont étudié les propriétés avec beaucoup de soin. La solution dont je parle est exposée à la page 69 du deuxième volume de la *Mécanique céleste* : nous ne voulons point nous en occuper ici. Observons seulement que, pour que cette méthode soit complète et rigoureuse, il faut qu'on ait démontré *à priori* la possibilité de représenter par un développement de la forme

$Y_0 + Y_1 + \ldots$ (entre les limites -1, $+1$, et $0, 2\pi$ de μ et de ϖ) toute fonction Y qui ne devient pas infinie entre ces limites. Laplace ne possédant pas une telle démonstration avait lieu de craindre que sa méthode ne fût insuffisante. C'est ce qui l'a porté à chercher un autre procédé pour déterminer, directement et indépendamment des suites infinies, la valeur de Y qui satisfait à l'équation (5). Mais, comme je l'ai expliqué dans l'introduction, le principe dont il a fait usage est tout-à-fait inadmissible. Nous allons donc essayer d'atteindre par une autre voie le but qu'il s'était proposé, savoir de trouver la valeur de Y, sans recourir à l'emploi des séries.

Nous décomposerons, comme lui, la question en deux parties.

1°. Nous supposerons que la figure du sphéroïde en équilibre soit de révolution : Y sera alors fonction de μ seulement, et, dans cette hypothèse, nous en déterminerons la valeur.

2°. Nous prouverons qu'en effet la figure du sphéroïde ne peut être que de révolution. Pour cette dernière partie du problème, nous renverrons le lecteur au livre III^e^ de la *Mécanique céleste*, où elle est traitée d'un manière exacte et complète : c'est donc à la première qu'il faut spécialement nous attacher.

VI.

D'après un théorème connu, démontré par Maclaurin, nous savons d'avance que l'équilibre de la masse fluide peut subsister en attribuant à cette masse la forme d'un ellipsoïde de révolution. Il est donc évident qu'on aura une solution particulière de l'équation (6), et par suite de l'équation (5), en posant $Y = M + N\mu^2$ et en déterminant convenablement les constantes M, N. En substituant cette valeur de Y, on trouve en effet qu'elle satisfera à l'équation (6) si l'on prend

$$M = \frac{3g}{16\alpha\pi} - \frac{3C}{8\pi}, \quad N = -\frac{15g}{16\alpha\pi}.$$

Cela posé, la valeur générale de Y pourra être mise sous la forme

$$(7) \qquad Y = \frac{3g}{16\alpha\pi} - \frac{3C}{8\pi} - \frac{15g}{16\alpha\pi}.\mu^2 + Z,$$

Z étant une fonction inconnue de μ qui doit satisfaire à l'équation nouvelle

$$(8) \qquad \frac{4\pi}{3}.Z - \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Z' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = 0,$$

dans laquelle Z′ désigne ce que devient Z lorsqu'on y change μ en μ'. On déduit l'équation (8) de l'équation (5) en y remplaçant Y par sa valeur (7) : la solution particulière $Y = M + N\mu^2$ que l'on a obtenue à l'aide de l'équation (6) sert, comme on voit, à faire disparaître le second membre $C + \frac{g}{2\alpha}(1 - \mu^2)$ de l'équation (5).

VII.

Nous allons prouver que la fonction inconnue Z est égale à zéro. Pour cela nous ferons usage du théorème suivant qui se trouve démontré dans mon *Journal de Mathématiques* (tome II, page 1) :

« Soit $\Psi(\mu)$ une fonction de μ, déterminée mais inconnue, qui ne » devienne jamais infinie lorsque μ croît de -1 à $+1$. Si l'on a » constamment $\int_{-1}^{+1} \mu^n \Psi(\mu)\, d\mu = 0$, n étant un quelconque des nom- » bres entiers $0, 1, 2, 3, \ldots$, on aura aussi $\Psi(\mu) = 0$, entre les » limites $\mu = -1$, $\mu = +1$. »

Pour prouver que $Z = 0$, il suffira donc de prouver que l'on a

$$\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu = 0,$$

n étant un nombre entier quelconque, nul ou positif.

En multipliant par $d\mu$ les deux membres de l'équation (8) et intégrant ensuite depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = +1$, on a

$$\int_{-1}^{+1} Z d\mu - \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} \frac{Z' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = 0.$$

L'intégrale triple contenue dans l'équation que je viens d'écrire peut être mise sous la forme

$$\int_{-1}^{+1} Z' d\mu' \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varpi'}{\sqrt{2-2P}}.$$

Mais par la formule (4) il vient

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = 4\pi :$$

notre intégrale triple est donc égale à

$$4\pi \int_{-1}^{+1} Z'd\mu',$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$4\pi \int_{-1}^{+1} Zd\mu.$$

Par suite on a

$$\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{+1} Zd\mu - 4\pi\int_{-1}^{+1} Zd\mu = 0,$$

ce qui exige que

$$\int_{-1}^{+1} Zd\mu = 0.$$

Pour prouver que $\int_{-1}^{+1} \mu Zd\mu = 0$, il faut se rappeler que l'origine O des coordonnées est en même temps le centre de gravité du sphéroïde. En effet le moment de l'élément $r'^2 d\mu' d\varpi' dr'$ par rapport au plan des xy est

$$r'^3 . \mu' d\mu' d\varpi' dr' :$$

pour que ce plan contienne le centre de gravité, il faut donc que l'on ait

$$\iiint r'^3 . \mu' d\mu' d\varpi' dr' = 0,$$

les intégrales s'étendant au volume entier du liquide. On effectuera d'abord l'intégrale relative à r' depuis $r' = 0$ jusqu'à $r' = a(1 + \alpha Y')$, et en négligeant le carré et les puissances supérieures de α, on aura

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \mu' . (1 + 4\alpha Y') d\mu' d\varpi' = 0 :$$

Y' étant indépendant de ϖ', cette équation de condition se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \mu' Y' d\mu' \quad \text{ou} \quad \int_{-1}^{+1} \mu Y d\mu = 0,$$

d'ou résulte immédiatement

$$\int_{-1}^{+1} \mu Z d\mu = 0,$$

puisque Y ne diffère de Z que par la fonction paire $M + N\mu^2$.

Actuellement il suffira de prouver que si les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} Z d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} \mu Z d\mu, \ldots . \int_{-1}^{+1} \mu^{n-1} Z d\mu$$

sont nulles pour une certaine valeur de n égale à 2 ou $>$ 2, l'intégrale suivante $\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu$ est nulle aussi. Cela fait, il sera rigoureusement prouvé que l'on a $Z = 0$.

Or en multipliant par $\mu^n d\mu$ les deux membres de l'équation (8) et intégrant par rapport à μ, on obtient

$$\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu - \int_{-1}^{+1} \mu^n d\mu \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} \frac{Z' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2 - 2P}} = 0.$$

L'intégrale triple contenue dans cette équation, étant mise sous la forme

$$\int_{-1}^{+1} Z' d\mu' \int_{-1}^{+1} \mu^n d\mu \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varpi'}{\sqrt{2 - 2P}},$$

devient, en vertu de la formule (4),

$$\int_{-1}^{+1} Z' d\mu' \left(\frac{4\pi\mu'^n}{2n+1} + C_1 \mu'^{n-2} + \text{etc.}\right):$$

changeant μ' en μ sous le signe $\int$ et omettant les termes multipliés par les intégrales nulles

$$\int_{-1}^{+1} \mu^{n-2} Z d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} \mu^{n-4} Z d\mu, \ \text{etc.},$$

elle se réduit à

$$\frac{4\pi}{2n+1}\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu,$$

en sorte que l'on a

$$\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu - \frac{4\pi}{2n+1}\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu = 0,$$

et par conséquent

$$\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu = 0,$$

puisque $2n+1$ est >3.

Concluons de cette analyse qu'en se bornant aux sphéroïdes de révolution, les formes possibles d'équilibre très peu différentes de la sphère sont représentées par l'équation générale

$$r = a(1+\alpha Y) = a\left(1 + \frac{3g}{16\pi} - \frac{3\alpha C}{8\pi} - \frac{15g}{16\pi}\cdot\mu^2\right),$$

laquelle se simplifie en observant que a représente (n° III) la plus petite valeur de r: en effet la plus petite valeur de r répond à $\mu^2 = 1$: on a donc

$$a\left(1 + \frac{3g}{16\pi} - \frac{3\alpha C}{8\pi} - \frac{15g}{16\pi}\right) = a,$$

d'où l'on tire

$$a\left(1 + \frac{3g}{16\pi} - \frac{3\alpha C}{8\pi}\right) = a\left(1 + \frac{15g}{16\pi}\right),$$

et par suite,

$$r = a\left[1 + \frac{15g}{16\pi}(1-\mu^2)\right]. \tag{9}$$

L'équation (9) est celle d'un ellipsoïde qui se réduit à une sphère lorsque $g=0$; en sorte que la sphère est la seule figure de révolution qui satisfasse à l'équilibre d'une masse fluide homogène immobile, du moins lorsqu'on suppose *à priori* cette figure presque sphérique.

C'est en partant de ce dernier théorème que l'on prouve ensuite que parmi toutes les figures très peu différentes de la sphère (qu'elles soient ou non de révolution) une seule peut satisfaire à la condition d'équilibre du fluide tournant autour d'un axe. En sorte que la surface de ce fluide est nécessairement celle de l'ellipsoïde déterminé par l'équation (9). Mais sur ce point, comme nous l'avons déjà dit, nous renverrons au livre III[e] de la *Mécanique céleste* (tome II, page 76.)
