JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUG. CAUCHY

Mémoire sur l'interpolation

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 193-205.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__193_0>

MÉMOIRE

SUR L'INTERPOLATION;

PAR M. AUG. CAUCHY (*).

Dans les applications de l'analyse à la Géométrie, à la Physique, à l'Astronomie... deux sortes de questions se présentent à résoudre, et il s'agit 1° de trouver les lois générales des figures et des phénomènes, c'est-à-dire la forme générale des équations qui existent entre les diverses variables, par exemple, entre les coordonnées des courbes et des surfaces, entre les vitesses, les temps, les espaces parcourus par les mobiles, etc...; 2° de fixer en nombres les valeurs des paramètres ou constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de ces mêmes lois, c'est-à-dire les valeurs des coefficients inconnus que renferment les équations trouvées. Parmi les variables on distingue ordinairement, comme l'on sait, celles qui peuvent varier indépendamment les unes des autres, et que l'on nomme pour cette raison variables indépendantes, d'avec celles qui s'en déduisent par la résolution des diverses équations, et qui se nomment fonctions des variables indépendantes. Considérons en particulier une de ces fonctions, et supposons qu'elle se déduise des variables indépendantes par une équation ou formule qui renferme un certain nombre de coefficients. Un pareil nombre d'observations ou d'expériences, dont chacune fournira une valeur particulière de la fonction correspon-

(*) Ce Mémoire a été autographié en septembre 1835 et envoyé à cette époque à l'Académie des Sciences. On l'imprime ici pour la première fois, du consentement de l'auteur. (J. L.)

dante à un système particulier de valeurs des variables indépendantes, suffira pour la détermination numérique de tous ces coefficients ; et, cette détermination faite, on pourra obtenir sans difficulté de nouvelles valeurs de la fonction correspondantes à de nouveaux systèmes de valeurs des variables indépendantes, et résoudre ainsi ce qu'on appelle le problème de l'interpolation. Par exemple, si l'ordonnée d'une courbe se trouve exprimée en fonction de l'abscisse par une équation qui renferme trois paramètres, il suffira de connaître trois points de la courbe, c'est-à-dire trois valeurs particulières de l'ordonnée correspondantes à trois valeurs particulières de l'abscisse, pour déterminer les trois paramètres ; et, cette détermination effectuée, on pourra sans peine tracer la courbe par points en calculant les coordonnées d'un nombre aussi grand que l'on voudra de nouveaux points situés sur les arcs de cette courbe compris entre les points donnés. Ainsi, envisagé dans toute son étendue, le problème de l'interpolation consiste à déterminer les coefficients ou constantes arbitraires que renferme l'expression des lois générales des figures ou des phénomènes, d'après un nombre au moins égal de points donnés, ou d'observations, ou d'expériences. Dans une foule de questions les constantes arbitraires entrent au premier degré seulement dans les équations qui les renferment. C'est précisément ce qui arrive lorsqu'une fonction est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes d'une variable indépendante, ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des multiples d'un même arc. Alors il s'agit de déterminer les coefficients de ceux des termes de la série que l'on ne peut négliger sans avoir à craindre qu'il en résulte une erreur sensible dans les valeurs de la fonction. Dans le petit nombre de formules qui ont été proposées pour cet objet, on doit distinguer une formule tirée du calcul des différences finies, mais applicable seulement au cas où les diverses valeurs de la variable indépendante sont équidifférentes entre elles, et la formule de Lagrange applicable, quelles que soient ces valeurs, à des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable indépendante. Toutefois cette dernière formule elle-même se complique de plus en plus à mesure que l'on veut conserver dans le développement de la fonction en série un plus grand nombre de termes; et ce qu'il y a de plus fâcheux, c'est que les valeurs approchées des divers ordres correspondantes aux divers cas où l'on conserverait dans la série un seul terme, puis deux termes, puis trois termes.... s'obtiennent par des calculs à peu près indépendants les uns des autres, en sorte que chaque nouvelle approximation, loin d'être rendue facile par celles qui la précèdent, demande au contraire plus de temps et de travail. Frappé de ces inconvénients, et conduit par mes recherches sur la dispersion de la lumière à m'occuper de nouveau du problème de l'interpolation, j'ai eu le bonheur de rencontrer pour la solution de ce problème une nouvelle formule qui, sous le double rapport de la certitude des résultats et de la facilité avec laquelle on les obtient, me paraît avoir sur les autres formules des avantages tellement incontestables, que je ne doute guère qu'elle ne soit bientôt d'un usage général parmi les personnes adonnées à la culture des sciences physiques et mathématiques.

Pour donner une idée de cette formule, je suppose qu'une fonction de x, représentée par y, soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes de x, ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des arcs multiples de x, ou même plus généralement suivant d'autres fonctions de x que je représenterai par

$$\varphi(x) = u, \quad \chi(x) = v, \quad \psi(x) = w, \ldots,$$

en sorte qu'on ait

$$(1) \qquad y = au + bv + cw + \ldots,$$

a, b, c... désignant des coefficients constants. Il s'agit de savoir, 1° combien de termes on doit conserver dans le second membre de l'équation (1) pour obtenir une valeur de y suffisamment approchée, dont la différence avec la valeur exacte soit insensible et comparable aux erreurs que comportent les observations; 2° de fixer en nombres les coefficients des termes conservés, ou, ce qui revient au même, de trouver la valeur approchée dont nous venons de parler. Les données du problème sont un nombre suffisamment grand de valeurs de y représentées par

$$y_1, y_2 \ldots y_n,$$

et correspondantes à un pareil nombre n de valeurs de x représentées par $x_1, x_2, \ldots x_n$, par conséquent aussi à un pareil nombre de valeurs de chacune des fonctions $u, v, w, \ldots$, valeurs que je représenterai de même par

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

pour la fonction u, par

$$v_1, v_2, \ldots v_n$$

pour la fonction v, etc... Ainsi, pour résoudre le problème, on aura entre les coefficients inconnus $a, b, c, \ldots$ les n équations du premier degré

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 + \ldots, \\ y_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 + \ldots, \\ \vdots \\ y_n = au_n + bv_n + cw_n + \ldots, \end{array} \right.$$

qui, si l'on désigne par i l'un quelconque des nombres entiers

$$1, 2, \ldots n,$$

se trouveront toutes comprises dans la formule générale

$$(3) \qquad y_i = au_i + bv_i + cw_i + \ldots.$$

On effectuera la première approximation en négligeant les coefficients $b, c, \ldots$, ou, ce qui revient au même, en réduisant la série à son premier terme. Alors la valeur générale approchée de y sera

$$(4) \qquad y = au;$$

et, pour déterminer le coefficient a, on aura le système des équations

$$(5) \qquad y_1 = au_1, \; y_2 = au_2, \ldots y_n = au_n.$$

Les diverses valeurs de a, que l'on peut déduire de ces équations (5) considérées chacune à part, ou combinées entre elles, seraient toutes précisément égales si les valeurs particulières de y, que nous supposons données par l'observation, étaient rigoureusement exactes. Mais il n'en est pas anisi dans la pratique où les observations comportent des erreurs renfermées entre certaines limites; et alors il importe de combiner entre elles les équations (5) de manière que, dans les cas les plus défavorables, l'influence exercée sur la valeur du coefficient a par les erreurs commises sur les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soit la moindre possible. Or, les diverses combinaisons que l'on peut faire des équations (5) pour en tirer une nouvelle équation du premier degré, par rapport à a, fournissent toutes des valeurs de a comprises dans la formule générale

$$(6) \qquad a = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots k_n y_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots k_n u_n},$$

que l'on obtient en ajoutant membre à membre les équations (5) après les avoir respectivement multipliées par des facteurs constants $k_1, k_2 \ldots, k_n$. Il y a plus; comme la valeur de a déterminée par l'équation (6) ne varie pas quand on fait varier simultanément les facteurs $k_1, k_2 \ldots, k_n$ dans le même rapport, il est clair que parmi ces facteurs, le plus grand (abstraction faite du signe) peut toujours être censé réduit à l'unité. Remarquons enfin que, si l'on nomme

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n,$$

les erreurs respectivement commises dans les observations sur les valeurs de

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

la formule précédente (6) fournira pour a une valeur approchée, dont la différence avec la véritable sera

$$(7) \qquad \frac{k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + \ldots + k_n \varepsilon_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n}.$$

Il faut maintenant choisir $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de telle sorte que, dans les cas les plus défavorables, la valeur numérique de l'expression (7) soit la moindre possible.

Représentons par

$$\mathrm{S}u_i$$

la somme des diverses valeurs numériques de u_i, c'est-à-dire ce que devient le polynome

$$\pm u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_n$$

quand on y dispose de chaque signe de manière à rendre chaque terme positif. Représentons par $S\epsilon_i$ non la somme des valeurs numériques $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, mais ce que devient la somme Su_i, quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de ϵ_i. Si l'on réduit à $+1$ ou à -1 chacun des coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_n$, en choisissant les signes de manière que, dans le dénominateur de la fraction

$$\frac{k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \ldots + k_n\epsilon_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n}$$

tous les termes soient positifs, cette fraction sera réduite à

$$\frac{S\epsilon_i}{Su_i}; \tag{8}$$

et elle offrira une valeur numérique tout au plus égale au rapport

$$\frac{E}{Su_i},$$

si l'on désigne par E la somme des valeurs numériques de ϵ_i, ou, ce qui revient au même, la valeur numérique de $S\epsilon_i$ dans le cas le plus défavorable. D'autre part, en attribuant à $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des valeurs inégales dont la plus grande (abstraction faite des signes) soit l'unité, on obtiendra pour dénominateur de la fraction une quantité dont la valeur numérique sera évidemment inférieure à Su_i, tandis que la valeur numérique du numérateur pourra s'élever jusqu'à la limite E; ce qui arrivera effectivement si les erreurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ sont toutes nulles, à l'exception de celle qui sera multipliée par un facteur égal, au signe près, à l'unité. Il en résulte que la plus grande erreur à craindre sur la valeur de a déterminée par la formule

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots k_nu_n}$$

sera la moindre possible si l'on pose généralement

$$k_i = \pm 1,$$

en choisissant les signes de manière que dans le polynome

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n$$

tous les termes soient positifs. Alors cette formule donnera

$$(9) \qquad a = \frac{\mathrm{S} y_i}{\mathrm{S} u_i},$$

$\mathrm{S}y_i$ étant ce que devient la somme $\mathrm{S}u_i$ quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de y_i, et l'équation $y = au$ deviendra

$$(10) \qquad y = \frac{u}{\mathrm{S} u_i} \mathrm{S} y_i.$$

Si l'on fait pour abréger

$$(11) \qquad \alpha = \frac{u}{\mathrm{S} u_i},$$

on aura simplement

$$(12) \qquad y = \alpha \, \mathrm{S} y_i.$$

Si l'on supposait généralement $u = 1$, l'équation $y = au$, réduite à

$$y = a,$$

exprimerait que la valeur de y est constante; et comme on aurait alors

$$\alpha = \frac{u}{\mathrm{S} u_i} = \frac{1}{n},$$

la formule $y = \alpha \, \mathrm{S} y_i$ donnerait

$$y = \frac{1}{n} \mathrm{S} y_i.$$

Donc alors on devrait prendre pour valeur approchée de y la moyenne arithmétique entre les valeurs observées; et la plus grande erreur à craindre serait plus petite pour cette valeur approchée que pour toute autre. Cette propriété des moyennes arithmétiques, jointe à la facilité avec laquelle on les calcule, justifie complétement l'usage où l'on est de leur accorder la préférence dans l'évaluation des constantes arbitraires qui peuvent être déterminées directement par l'observation.

Soit maintenant Δy le reste qui doit compléter la valeur approchée de y fournie par l'équation

$$(12) \qquad y = \alpha\, Sy_i,$$

en sorte qu'on ait

$$(13) \qquad y = \alpha\, Sy_i + \Delta y.$$

Posons de même

$$(14) \qquad v = \alpha Sv_i + \Delta v,\ w = \alpha Sw_i + \Delta w,\ \text{etc.}\ldots$$

On tirera de la formule $y_i = au_i + bv_i + cw_i + \text{etc.}\ldots,$

$$(15) \qquad Sy_i = aSu_i + bSv_i + cSw_i + \text{etc.}\ldots;$$

puis de cette dernière, multipliée par α, et soustraite de l'équation (1),

$$(16) \qquad \Delta y = b\Delta v + c\Delta w + \text{etc.}\ldots$$

Soient d'ailleurs α_i, Δy_i, Δv_i, $\Delta w_i,\ldots$ ce que deviennent les valeurs de α, Δy, Δv, $\Delta w,\ldots$ tirées des équations (11), (13) et (14), quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers $1, 2,\ldots n$. Si les valeurs de

$$\Delta y_1,\ \Delta y_2\ldots,\ \Delta y_n$$

sont très petites, et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une seconde approximation, et l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de y fournie par l'équation $y = \alpha Sy_i$. Si le contraire a lieu, il suffira, pour obtenir une approximation nouvelle, d'opérer sur la formule (16) qui donne $\Delta y = b\Delta v + \text{etc.}$, comme dans la première approximation l'on a opéré sur la formule (1) $y = au + \text{etc.}$

Cela posé, désignons par

$$S'\Delta v_i$$

la somme des valeurs numériques de Δv_i, et par

$$S'\Delta y_i,\ S'\Delta w_i,\ \text{etc.}\ldots$$

les polynomes dans lesquels se change la somme $S'\Delta v_i$ quand on y remplace chaque valeur de Δv_i par la valeur correspondante de Δy_i ou de $\Delta w_i \ldots$; soit enfin

$$\mathcal{C} = \frac{\Delta v}{S'\Delta v_i}:$$

si l'on peut, sans erreur sensible, négliger dans la série (1) le coefficient c du troisième terme et ceux des termes suivants, on devra prendre pour valeur approchée de Δy

$$(18) \qquad \Delta y = \mathcal{C} S'\Delta y_i.$$

Soit $\Delta^2 y$ le reste du second ordre qui doit compléter cette valeur approchée, et faisons en conséquence

$$(19) \qquad \Delta y = \mathcal{C} S'\Delta y_i + \Delta^2 y.$$

Posons de même

$$(20) \qquad \Delta w = \mathcal{C} S'\Delta w_i + \Delta^2 w,\ \text{etc.}\ldots:$$

on tirera successivement, de la formule (16),

$$(21) \qquad \Delta y_i = b\Delta v_i + c\Delta w_i + \text{etc.}\ldots$$

$$(22) \qquad S'\Delta y_i = bS'\Delta v_i + cS'\Delta w_i + \text{etc.}\ldots;$$

puis cette dernière, multipliée par $\mathcal{C}$ et retranchée de l'équation (19),

$$(23) \qquad \Delta^2 y = c\Delta^2 w + \text{etc.}\ldots$$

Soient d'ailleurs $\mathcal{C}_i$, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^2 w_i, \ldots$, ce que deviennent les valeurs de $\mathcal{C}$, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 w, \ldots$, tirées des équations (17), (19) et (20), quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$. Si les valeurs de

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2, \ldots,\ \Delta^2 y_n$$

sont très petites et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une nouvelle approximation, et l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de Δy fournie par l'équation (18). Si le contraire a lieu, il suffira, pour obtenir une troisième approximation, d'opérer sur la formule (23) qui donne $\Delta^2 y$, comme l'on a opéré dans la première approximation sur la formule (1). En continuant de la sorte, on obtiendra la règle suivante :

L'inconnue y, fonction de la variable x, étant supposée développable en une série convergente

$$\text{(I)} \qquad au + bv + cw + \ldots$$

où u, v, w,..., représentent des fonctions données de la même variable, si l'on connaît n valeurs particulières de y correspondantes à n valeurs particulières

$$x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n$$

de x, si d'ailleurs on nomme i l'un quelconque des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$, et y_i, u_i, v_i,..., ce que deviennent y, u, v,..., quand on y remplace x par x_i ; alors, pour obtenir la valeur générale de y avec une approximation suffisante, on déterminera d'abord le coefficient α à l'aide de la formule

$$\text{(II)} \qquad u = \alpha \mathrm{S} u_i,$$

dans laquelle $\mathrm{S}u_i$ désigne la somme des valeurs numériques de u_i, et la différence du premier ordre Δy à l'aide de la formule

$$\text{(III)} \qquad y = \alpha \mathrm{S} y_i + \Delta y.$$

Si les valeurs particulières de Δy, représentées par Δy_1, Δy_2,... Δy_n, sont comparables aux erreurs d'observation, on pourra négliger Δy et réduire la valeur approchée de y à

$$\alpha \mathrm{S} y_i.$$

Dans le cas contraire, on déterminera $\mathcal{C}$ à l'aide des formules

$$\text{(IV)} \qquad v = \alpha \mathrm{S} v_i + \Delta v, \quad \Delta v = \mathcal{C} \mathrm{S}' \Delta v_i,$$

$\mathrm{S}'\Delta v_i$ étant la somme des valeurs numériques de Δv_i, et la différence du second ordre $\Delta^2 y$ à l'aide de la formule

$$\text{(V)} \qquad \Delta y = 6S'\Delta y + \Delta^2 y.$$

Si les valeurs particulières de $\Delta^2 y$, représentées par Δy_1, $\Delta^2 y_2, \ldots,$ $\Delta^2 y_n$, sont comparables aux erreurs d'observation, l'on pourra négliger $\Delta^2 y$ et réduire en conséquence la valeur approchée de y à $\alpha S y_i + 6\alpha S'\Delta y_i$.

Dans le cas contraire, on déterminera γ par les formules

$$\text{(VI)} \quad w = \alpha S w_i + \Delta w, \ \Delta w = 6S'\Delta w_i + \Delta^2 w, \ \Delta^2 w = \gamma S''\Delta^2 w_i,$$

$S''\Delta^2 w_i$ étant la somme des valeurs numériques de $\Delta^2 w_i$, et la différence du troisième ordre $\Delta^3 y$ par la formule

$$\text{(VII)} \qquad \Delta^2 y = \gamma S''\Delta^2 y_i + \Delta^3 y, \text{ etc.}\ldots$$

Ainsi, en définitive, en supposant les coefficients α, 6, $\gamma, \ldots$ déterminés par le système de ces équations, etc.,..., on devra calculer les différences des divers ordres représentées par

$$\Delta y, \ \Delta^2 y, \ \Delta^3 y, \ldots,$$

ou plutôt leurs valeurs particulières correspondantes aux valeurs x_1, $x_2, \ldots, x_n$ de la variable x, jusqu'à ce que l'on parvienne à une différence dont les valeurs particulières soient comparables aux erreurs d'observation. Alors il suffira d'égaler à zéro la valeur de cette différence tirée du système des équations (III), (V), (VII)..., pour obtenir avec une approximation suffisante la valeur de y. Cette valeur générale sera donc

$$y = \alpha S y_i, \text{ ou } y = \alpha S y_i + 6S'\Delta y_i, \text{ ou etc.}\ldots,$$

suivant que l'on pourra, sans erreur sensible, réduire la série à son premier terme, ou à ses deux premiers termes.... Donc, si l'on nomme m le nombre des termes conservés, le problème de l'interpolation sera résolu par la formule

$$y = \alpha S y_i + 6S'\Delta y_i + \gamma S''\Delta^2 y_i + \text{etc.}\ldots,$$

le second membre étant prolongé jusqu'au terme qui renferme $\Delta^{m-1} y_i$.

Il est bon d'observer que des formules précédentes on tire non-seulement

$$S\alpha_i = 1;\ S\mathcal{C}_i = 0,\ S'\mathcal{C}_i = 1;\ S\gamma_i = 0,\ S'\gamma_i = 0,\ S''\gamma_i = 1,\ \text{etc.}\ldots;$$

mais encore

$$S\Delta v_i = 0;\ S\Delta w_i = 0,\ S\Delta^2 w_i = 0,\ S'\Delta^2 w_i = 0,\ \text{etc.}\ldots,$$

et

$$S\Delta y_i = 0;\ S\Delta^2 y_i = 0,\ S'\Delta^2 y_i = 0;\ S\Delta^3 y_i = 0,\ S'\Delta^3 y_i = 0,\ S''\Delta^3 y_i = 0,\ldots$$

Ces dernières formules sont autant d'équations de condition auxquelles doivent satisfaire les valeurs particulières de α, $\mathcal{C}$, $\gamma,\ldots$, ainsi que celles des différences des divers ordres de u, v, $w,\ldots, y$; et il en résulte qu'on ne peut commettre dans le calcul de ces valeurs particulières aucune erreur de chiffres sans en être averti par le seul fait que les équations de condition cessent d'être vérifiées.

En résumé, les avantages des nouvelles formules d'interpolation sont les suivants:

1°. Elles s'appliquent aux développements en séries, quelle que soit la loi suivant laquelle les différents termes se déduisent les uns des autres, et quelles que soient les valeurs équidifférentes ou non de la variable indépendante.

2°. Les nouvelles formules sont d'une application très facile, surtout quand on emploie les logarithmes pour le calcul des rapports α, $\mathcal{C}$, $\gamma,\ldots$, et des produits de ces rapports par les sommes des diverses valeurs des fonctions ou de leurs différences. Alors, en effet, toutes les opérations se réduisent à des additions ou à des soustractions.

3° A l'aide de nos formules les approximations successives s'exécutent avec une facilité de plus en plus grande, attendu que les différences des divers ordres vont généralement en diminuant.

4°. Nos formules permettent d'introduire à la fois dans le calcul les nombres fournis par toutes les observations données, et d'augmenter ainsi l'exactitude des résultats en faisant concourir à ce but un très grand nombre d'expériences.

5°. Elles offrent encore cet avantage, qu'à chaque approximation nouvelle, les valeurs qu'elles fournissent pour les coefficients $a, b, c,\ldots$

sont précisément celles pour lesquelles la plus grande erreur à craindre est la moindre possible.

6°. Nos formules indiquent d'elles-mêmes le moment où le calcul doit s'arrêter, en fournissant alors des différences comparables aux erreurs d'observation.

7°. Enfin les quantités qu'elles déterminent satisfont à des équations de condition qui ne permettent pas de commettre la plus légère faute de calcul, sans que l'on s'en aperçoive presque immédiatement.

On trouvera dans les nouveaux exercices de mathématiques de nombreuses applications de nos formules d'interpolation.