JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Addition à la Note de M. Poisson insérée dans le Numéro précédent de ce journal

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 189-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__189_0>

Addition à la Note de M. Poisson, *insérée dans le Numéro précédent de ce journal* (*) ; *par l'Auteur.*

L'article du Journal de M. Crelle, auquel cette note se rapporte, a pour titre : *Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoriâ fonctionum leguntur.* Parmi *ces erreurs,* on cite textuellement deux passages du neuvième chapitre de la seconde partie de la *Théorie des fonctions analytiques.* Or, j'ai dit dans ma note, et je maintiens, que ces deux passages sont parfaitement exacts ; et je pense que c'est en se méprenant sur leur véritable signification qu'on a pu les croire erronés. Bien entendu, je suis loin d'attacher une grande importance soit à cette méprise d'un illustre géomètre, soit à la remarque que j'en ai faite.

Avant de citer, dans son article, ces deux passages du chapitre IX, l'auteur avait d'abord rappelé le numéro 35 du chapitre VII. Mais ce qui est contenu dans ce numéro, exact ou non, n'a aucun rapport avec les propositions du chapitre IX. Celles-ci sont relatives aux lieux des centres des sphères osculatrices d'une surface, suivant la direction et dans toute la longueur d'une ligne tracée sur cette surface ; dans les numéros 35 et 36 du chapitre VII, Lagrange considère, au contraire, les lieux des centres des cercles osculateurs d'une ligne plane ou à double courbure ; et ces deux lieux géométriques sont, en général, essentiellement distincts, et ne coïncident, pour une même ligne donnée, que dans des cas particuliers.

Ayant seulement voulu montrer dans ma note qu'il n'y a aucune

(*) La première partie de cette *Addition* a été écrite à l'occasion des remarques qu'un membre de l'Académie a faites dans la séance du 17 avril dernier, sur la note dont il s'agit.

erreur dans les deux passages cités du chapitre IX, je n'ai point eu à m'occuper du numéro 35 du chapitre VII, et je me suis dispensé d'en parler. Mais il est vrai de dire que l'analyse contenue dans ce numéro et dans le suivant, présente quelque chose d'incomplet, et même d'équivoque. Lagrange détermine la condition pour que les centres des cercles osculateurs d'une courbe donnée forment une développée proprement dite, c'est-à-dire une ligne dont les tangentes coupent à angle droit la courbe proposée; puis il dit que les courbes planes satisfont toujours à cette condition; mais il n'ajoute pas qu'elle n'est remplie que pour elles seules; et cette omission pourrait faire croire qu'il ne serait pas impossible qu'une ligne à double courbure eût pour développée, le lieu de ses centres de courbure. Or, non-seulement on voit, par des considérations géométriques très simples, que cette propriété n'appartient qu'à des courbes planes; mais Lagrange pouvait aussi le conclure de différentes manières, de sa propre analyse, et, par exemple, en montrant, comme M. Lacroix dans son *Traité du Calcul différentiel* (*), que l'équation différentielle du troisième ordre, qui doit être satisfaite pour que cette propriété ait lieu, revient à celle qui exprime que trois éléments consécutifs quelconques de la courbe proposée sont dans un même plan, ou que cette courbe est plane. A la fin du chapitre VII, Lagrange se borne à renvoyer, pour de plus grands détails sur ce qui concerne les développées, au Mémoire de Monge, où leur théorie est exposée dans toute sa généralité.

En un point donné M sur une surface quelconque, le parabolo de osculateur, qui a son sommet en ce point, est *elliptique* ou *hyperbolique*, selon que les deux courbures principales de la surface en ce même point, sont tournées dans le même sens ou en sens contraires. Les rayons de ces deux courbures étant représentés par α et β, et en prenant leurs plans et le plan tangent pour ceux des coordonnées x, y, z, la normale pour axe des z, le point M pour origine; l'équation du paraboloïde sera

$$z = \frac{x^2}{\alpha} \pm \frac{y^2}{\beta};$$

(*) Voyez la première édition publiée en 1797, ou le n° 353 de la seconde édition.

le signe supérieur ayant lieu quand il est elliptique, et le signe inférieur quand il sera hyperbolique. Il se changera en un cylindre, lorsque l'une des deux sections de courbure principale sera une ligne droite, c'est-à-dire lorsque α ou ϵ sera infini, et en un plan, quand ces deux sections seront rectilignes, ou qu'on aura $\alpha = \infty$ et $\epsilon = \infty$.

L'expression de l'ordonnée z d'un point de la surface différent de M, pourra, en général, se développer en série ordonnée suivant les puissances et les produits de x et y. Pour les cas d'exception, je renverrai à mon Mémoire cité dans la note. En désignant par Δ, la différence entre cette ordonnée et celle du paraboloïde, qui répondent aux mêmes valeurs de x et y, on aura

$$\Delta = gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 + \text{R};$$

g, h, k, l, étant des coefficients constants qui dépendront de la forme de la surface, et R étant une série de termes de quatre ou d'un plus grand nombre de dimensions, par rapport à x et y. Pour qu'il y ait contact du troisième ordre, suivant une section normale, entre la surface donnée et le paraboloïde, il faudra que la somme des quatre premiers termes de la valeur de Δ, soit zéro suivant cette direction. Si l'on appelle m la tangente de l'angle compris entre ce plan et celui de x et z, et en faisant $y = mx$, on aura donc

$$gm^3 + hm^2 + km + l = 0,$$

pour l'équation du troisième degré, dont il a été question à la fin de la note. Lorsque ses trois racines seront réelles, il y aura au point M de la surface donnée, trois directions pour lesquelles le contact parabolique du second ordre s'élèvera au troisième (*); il y en aura une seule, quand l'équation n'aura qu'une racine réelle; une seule aussi, lorsque ses trois racines seront égales, et deux dans le cas de deux racines égales. Dans tous les cas, le contact du troisième ordre aura lieu également, suivant ces directions particulières, entre la surface donnée

(*) Par erreur, on a mis troisième et quatrième ordre, en haut de la page 144 de la note, au lieu de deuxième et troisième.

et un ellipsoïde osculateur, quelle que soit la grandeur de son troisieme axe, qui reste indéterminée.

En changeant l'origine et la direction des coordonnées, et mettant ensuite dans l'équation précédente, à la place de chacun des coefficients g, h, k, l, sa valeur en fonction des nouvelles coordonnées, tirée de l'équation de la surface donnée, et pour m le rapport entre les différentielles de deux de ces coordonnées, on obtiendra l'équation différentielle des lignes tracées sur cette surface et suivant lesquelles elle a un contact du troisième ordre avec les ellipsoïdes osculateurs. Il serait intéressant de connaître la figure de ces lignes à la surface de la terre, et de savoir s'il en existe trois ou une seule dans les différentes parties du globe. Quoique le sphéroïde terrestre diffère peu d'une sphère, ces lignes peuvent s'écarter beaucoup des méridiens; car leur direction en chaque point ne dépend pas des grandeurs absolues de g, h, k, l, qui sont de très petites quantités, mais des rapports de ces coefficients, qui peuvent être des nombres quelconques.