JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAMÉ

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__147_0>

MÉMOIRE

Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température ;

PAR M. G. LAMÉ,

Ingénieur des Mines, Professeur de Physique à l'École Polytechnique (*).

PRMIÈRE PARTIE.

§ I.

Lorsqu'un corps solide homogène est en équilibre de température, sous l'influence de sources constantes de chaleur et de froid, contre lesquelles sa surface est immédiatement appliquée, la température (V), constante avec le temps, mais variable d'un point à l'autre de ce corps, est, comme l'on sait, une fonction des coordonnées x, y, z, qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Il existe alors dans ce corps des surfaces où la température reste la même dans toute l'étendue de chacune d'elles. Ces surfaces d'égale température peuvent être concues représentées par une même équa-

---

(*) Ce Mémoire est extrait du tome V des *Savans étrangers*. Nous avons cru devoir le réimprimer ici, parce que le recueil dans lequel il se trouve est peu répandu et surtout parce que l'analyse ingénieuse dont l'auteur a fait usage ouvre une route nouvelle dans le calcul des équations différentielles partielles.

(J. LIOUVILLE.)

tion, contenant un paramètre variable de l'une à l'autre, et de la forme

$$F(x, y, z) = \lambda;$$

λ étant ce paramètre, ou la fonction des coordonnées dont la valeur numérique est constamment la même pour tous les points d'une surface individuelle.

Toute fonction F n'est pas propre à représenter des surfaces d'égale température pour un de tous les cas d'équilibre calorifique imaginables; elle doit satisfaire pour cela à une équation aux différences partielles qu'il est facile de trouver.

Si cette fonction (F ou λ) était connue, la température V devrait pouvoir être représentée par une équation de la forme

$$V = \varphi(\lambda),$$

puisque V et λ seraient constants ensemble, variables ensemble, dans toute l'étendue du corps proposé. On aurait d'après cela

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dx} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}, & \frac{d^2V}{dx^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2},\\
\frac{dV}{dy} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy}, & \frac{d^2V}{dy^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dy^2},\\
\frac{dV}{dz} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz}, & \frac{d^2V}{dz^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dz^2},
\end{aligned}$$

et par suite l'équation (1) pourrait être mise sous la forme

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] + \frac{dV}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = 0.$$

Or, $\frac{dV}{d\lambda}$ et $\frac{d^2V}{d\lambda^2}$ ne contenant d'autre variable que λ, le quotient

$$\left\{\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) : \left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]\right\},$$

devrait jouir de la même propriété. Ainsi la fonction λ doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$(2)\quad \frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} - \psi(\lambda)\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] = 0,$$

(ψ étant une fonction arbitraire de λ), pour que l'équation ($\lambda = c$) puisse représenter un système de surfaces isothermes.

En remplaçant $\psi(\lambda)$ par $\frac{1}{\varphi(\lambda)}\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}$, on aura

$$\varphi(\lambda)\frac{d^2V}{d\lambda^2} + \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\frac{dV}{d\lambda} = 0,$$

d'où en intégrant deux fois

$$V = A\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A'.$$

Si le corps proposé est limité par deux surfaces représentées par les équations $\lambda = a$, $\lambda = a'$, entretenues à des températures données T et T', on aura, pour déterminer les deux constantes A et A', les deux équations

$$T = A\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A', \quad T' = A\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A',$$

d'où

$$A = \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}},$$

et

$$A' = T - \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi}}\cdot\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi};$$

en sorte que l'équation

$$(3) \qquad V = T + \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}}\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}\right)$$

donnera la température V, correspondante à une surface quelconque λ.

§ II.

On voit que dans le cas particulier d'une enveloppe solide, dont les parois intérieure et extérieure seraient entretenues à des températures constantes, mais différentes de l'une à l'autre, la loi des températures stationnaires serait connue, si l'on pouvait déterminer *à priori* l'équation générale des surfaces isothermes qui correspondent à ce cas.

Les surfaces des parois devant être deux d'entre elles, le problème consisterait à intégrer l'équation (2), et à déterminer les formes ou constantes arbitraires que contiendrait la fonction λ, de manière que pour deux valeurs numériques données au paramètre c, l'équation $\lambda = c$ représentât successivement les surfaces des parois. Mais la solution analytique de ce problème serait généralement aussi difficile à trouver que celle qui consisterait à intégrer directement l'équation (1), et à déterminer les fonctions arbitraires de l'intégrale V, de manière qu'elle devînt numériquement égale à T ou à T' pour tous les points des parois de l'enveloppe.

Les cas simples d'une sphère creuse et d'un cylindre creux indéfini à base circulaire, dans lesquels l'épaisseur de l'enveloppe solide serait partout la même, sont les seuls où la détermination préalable des surfaces isothermes n'offre aucune difficulté. Pour tout autre cas, les parois, quoique toujours comprises parmi ces surfaces, doivent le plus souvent s'en distinguer par quelque propriété singulière, et en quelque sorte ombilicale, qui n'appartienne pas à toutes les autres surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe.

Il ne suffirait pas, pour éloigner cette circonstance qui complique la recherche directe de l'équation générale de ces surfaces, que les parois appartinssent à la même famille, et que leurs équations, de même forme et du même degré, continssent le même nombre de paramètres; car, dans ce cas, qui paraît beaucoup plus simple au premier abord que celui où les parois seraient dissemblables, on ne pourrait pas conclure, en général, que les surfaces d'égale température dussent être directement représentées par des équations de même forme et du même degré que celles des surfaces qui limitent l'enveloppe solide. Par exemple, dans un ellipsoïde creux, dont la paroi interne serait semblable à la surface extérieure, les surfaces isothermes ne seraient pas nécessairement des ellipsoïdes semblables aux parois, ni même des ellipsoïdes.

§ III.

Les conditions nécessaires pour que la forme commune des équations des deux parois soit réellement celle qui appartient aux surfaces d'égale température, peuvent se déduire analytiquement de la vérification de l'équation (2).

En prenant cette forme pour l'équation générale des surfaces cherchées, on regardera toutes les constantes qu'elle contient comme des fonctions inconnues du paramètre λ; on en déduira, par des différentiations convenables, les coefficients différentiels partiels de ce paramètre; après les avoir substitués dans l'équation (2), on posera les relations nécessaires pour qu'elle soit satisfaite, quelles que soient les coordonnées; si ces relations entre les variations des constantes arbitraires ne sont pas incompatibles, leurs intégrations feront connaître comment le paramètre λ doit entrer dans les constantes de la forme proposée, pour qu'elle puisse représenter les surfaces d'égale température; enfin, il faudra que deux valeurs numériques données à ce paramètre puissent rendre l'équation générale successivement identique avec les équations des deux parois.

Si cette vérification ne réussit pas, il faudra en conclure que, dans le cas considéré, les surfaces isothermes de l'intérieur de l'enveloppe doivent être exprimées par une équation différente, et probablement plus compliquée que celle des parois; et que ces dernières ne rentrent dans l'équation générale que par la disparition de certains termes, essentiels pour toute autre surface individuelle.

§ IV.

J'appliquerai cette méthode au cas où l'enveloppe est limitée par deux surfaces du second degré ayant même centre, leurs axes principaux étant de plus situés sur les mêmes droites. Leurs équations seront de la forme

$$(4) \qquad mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1.$$

Il s'agit de trouver comment les constantes m, n, p, doivent contenir λ, pour que l'équation (4) puisse représenter, par la variation successive de ce paramètre, toutes les surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe proposée.

On regardera donc m, n, p, comme des fonctions inconnues de λ, ce qui donnera

$$2mx + (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\left(m' = \frac{dm}{d\lambda},\quad m'' = \frac{d^2m}{d\lambda^2},\ldots\right)$$

$$2mx + 4m'x\frac{d\lambda}{dx} + (m''x^2 + n''y^2 + p''z^2)\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d^2\lambda}{dx^2} = 0, \text{ etc.}$$

et par suite

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = 4\frac{m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^2},$$

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = -\frac{\frac{m+n+p}{2}(m'x^2+n'y^2+p'z^2) - 2(mm'x^2+nn'y^2+pp'z^2)}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^2} - \frac{(m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2)(m''x^2 + n''y^2 + p''z^2)}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^3}.$$

L'équation (2) devient alors, en faisant $\psi = \frac{\varphi'}{\varphi}$, et en posant, pour simplifier, $\frac{m+n+p}{2} = \mathrm{L}$:

$$\begin{aligned}
&\{\varphi[(\mathrm{L} - 2m)m'^2 + m''m^2] + m^2m'\varphi'\}x^4\\
&+ \{\varphi[(\mathrm{L} - 2n)n'^2 + n''n^2] + n^2n'\varphi'\}y^4\\
&+ \{\varphi[(\mathrm{L} - 2p)p'^2 + p''p^2] + p^2p'\varphi'\}z^4\\
&+ \{\varphi[2(\mathrm{L}-m-n)m'n' + m''n^2 + n''m^2] + (m^2n' + n^2m')\varphi'\}x^2y^2\\
&+ \{\varphi[2(\mathrm{L}-n-p)n'p' + n''p^2 + p''n^2] + (n^2p' + p^2n')\varphi'\}y^2z^2\\
&+ \{\varphi[2(\mathrm{L}-p-m)p'm' + p''m^2 + m''p^2] + (p^2m' + m^2p')\varphi'\}z^2x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation devant être satisfaite quelles que soient les valeurs des coordonnées, on devra avoir les six relations

$$\varphi[(L - 2m)m'^2 + m''m^2] + m^2m'\varphi' = 0,$$
$$\varphi[(L - 2n)n'^2 + n''n^2] + n^2n'\varphi' = 0,$$
$$\varphi[(L - 2p)p'^2 + p''p^2] + p^2p'\varphi' = 0,$$
$$\varphi[2(L - m - n)m'n' + m''n^2 + n''m^2] + (m^2n' + n^2m')\varphi' = 0,$$
$$\varphi[2(L - n - p)n'p' + n''p^2 + p''n^2] + (n^2p' + p^2n')\varphi' = 0,$$
$$\varphi[2(L - p - m)p'm' + p''m^2 + m''p^2] + (p^2m' + m^2p')\varphi' = 0.$$

Ou bien, en posant $m = \frac{1}{a}$, $n = \frac{1}{b}$, $p = \frac{1}{c}$:

$$\varphi L a'^2 = a''\varphi + a'\varphi',$$
$$\varphi L b'^2 = b''\varphi + b'\varphi',$$
$$\varphi L c'^2 = c''\varphi + c'\varphi',$$
$$\varphi\left[2La'b' + 2(a' - b')\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\right] = (a'' + b'')\varphi + (a' + b')\varphi',$$
$$\varphi\left[2Lb'c' + 2(b' - c')\left(\frac{b'}{b} - \frac{c'}{c}\right)\right] = (b'' + c'')\varphi + (b' + c')\varphi',$$
$$\varphi\left[2Lc'a' + 2(c' - a')\left(\frac{c'}{c} - \frac{a'}{a}\right)\right] = (c'' + a'')\varphi + (c' + a')\varphi'.$$

Les trois premières donnent, par l'élimination de $\frac{\varphi'}{\varphi}$, les relations

$$L(a' - b') = \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'},$$
$$L(b' - c') = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'},$$
$$L(c' - a') = \frac{c''}{c'} = \frac{a''}{a'}:$$

en outre, si l'on retranche chacune des trois dernières d'un couple convenable des premières, φ' et φ se trouvent encore éliminés, et l'on a

$$L(a' - b')^2 = 2(a' - b')\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right),$$
$$L(b' - c')^2 = 2(b' - c')\left(\frac{b'}{b} - \frac{c'}{c}\right),$$
$$L(c' - a')^2 = 2(c' - a')\left(\frac{c'}{c} - \frac{a'}{a}\right).$$

Or, il est aisé de voir que les six dernières relations ne peuvent admettre d'autre solution que celle indiquée par les équations

$$a' = b' = c', \quad \text{d'où} \quad a'' = b'' = c''.$$

Tout autre système de valeurs conduirait à des expressions indépendantes de λ pour m, n, p.

Ainsi, les constantes a, b, c, ou $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$, doivent être égales à une même fonction quelconque de λ, augmentée ou diminuée de constantes différentes. On aura donc les valeurs les plus générales de m, n, p, en posant

$$m = \frac{1}{\lambda^2}, \quad n = \frac{1}{\lambda^2 - b^2}, \quad p = \frac{1}{\lambda^2 - c^2},$$

où b et c sont deux lignes déterminées et constantes. On peut supposer, sans troubler cette généralité, que la constante c soit plus grande que b.

§ V.

Mais l'équation (4) représentant des surfaces très différentes, suivant que λ sera plus grand que b et c, plus grand que b mais plus petit que c, ou à la fois plus petit que c et b, il convient de séparer ces trois cas différents. Désignons par μ, ν, ρ, les valeurs de λ qui leur correspondent : on aura les équations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \\ &\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \\ &\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} = 1, \end{aligned} \right.$$

pour représenter trois systèmes de surfaces isothermes compris sous la forme générale (4).

Toutes les surfaces de chaque système, et même celles des trois systèmes réunis, ont pour éléments constants de l'une à l'autre, les distances focales $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$, de leurs sections principales faites par les mêmes plans coordonnés.

Ainsi, lorsqu'on entretient à des températures constantes les parois d'une enveloppe solide, terminée par des ellipsoïdes, dont les sections principales ont les mêmes foyers, les surfaces d'égale température, dans l'intérieur de cette enveloppe, sont encore des ellipsoïdes ayant les mêmes foyers que les précédents.

Si l'enveloppe a pour limite deux hyperboloïdes à une nappe indéfinie, de mêmes foyers, ses surfaces isothermes seront encore des hyperboloïdes de même espèce et assujettis à la même condition.

Enfin, si les parois indéfinies de l'enveloppe sont les moitiés de deux hyperboloïdes à deux nappes ayant mêmes foyers, ses surfaces d'égale température seront toutes des moitiés d'hyperboloïdes de la même famille.

On peut vérifier, comme on le verra plus bas, que dans chacun de ces trois cas les parties homologues des surfaces isothermes du même système sont effectivement traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps. Mais avant d'entreprendre cette vérification, il convient d'étudier de plus près le système des trois équations (5).

§ VI.

Si l'on imagine sur l'axe des x, quatre points B, B', C, C', distants du centre ou de l'origine O, de quantités $OB = OB' = b$, $OC = OC' = c$, les points B et B' seront les foyers de toutes les courbes du second degré, traces sur le plan des $x\,y$, de toutes les surfaces représentées par les équations (5); et les traces de ces mêmes surfaces sur le plan des $x\,z$, auront toutes pour foyers les points C et C'. J'appelle les points B, B', C, C', les foyers des surfaces du second degré à axes inégaux, représentées par les équations (5). Ces foyers étant donnés, ainsi que le paramètre μ, ν, ou ρ, de l'une de ces surfaces, elle est entièrement connue de forme et de grandeur.

Un point quelconque de l'espace, correspondant aux coordonnées orthogonales x, y, z, sera situé sur trois surfaces appartenant respectivement aux trois systèmes (5), et ayant pour paramètres les valeurs de μ, ν, ρ, que l'on déduirait des équations (5), en fonction de x, y, z.

Il suit de là que l'on peut regarder les trois paramètres variables μ, ν, ρ, comme composant un nouveau genre de coordonnées. Un point de l'espace est alors donné par l'intersection d'un ellipsoïde et de deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, et l'autre à deux nappes, ayant tous trois les mêmes foyers, B, B', C, C'.

Je donnerai aux trois variables μ, ν, ρ, le nom de *coordonnées elliptiques*; et j'appellerai *surfaces homofocales* toutes celles qui sont représentées par les équations (5).

Les trois coordonnées orthogonales x, y, z, sont liées aux coordonnées elliptiques, μ, ν, ρ, par l'équation (5), ou par les suivantes, que l'on obtient par des éliminations convenables :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} bc\,.\,x &= \mu\nu\rho,\\ b\sqrt{c^2-b^2}\,.\,y &= \sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\rho^2},\\ c\sqrt{c^2-b^2}\,.\,z &= \sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules démontrent que si l'on imagine, en un point quelconque de l'espace, les trois surfaces homofocales qui y passent, chacune des coordonnées orthogonales de ce point sera égale au produit des trois demi-axes de ces surfaces qui ont la même direction qu'elle, divisé par le rectangle des deux demi-distances focales correspondantes à toutes les sections principales de ces mêmes surfaces, dont les plans sont parallèles à cette coordonnée.

§ VII.

Les plans tangents aux trois surfaces (5), au même point $(x, y, z,)$ ou $(\mu, \ , \rho)$, ont pour équations

$$\frac{xx'}{\mu^2} + \frac{yy'}{\mu^2 - b^2} + \frac{zz'}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{xx'}{\nu^2} + \frac{yy'}{\nu^2 - b^2} - \frac{zz'}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

$$\frac{xx'}{\rho^2} - \frac{yy'}{b^2 - \rho^2} - \frac{zz'}{c^2 - \rho^2} = 1:$$

ces trois plans sont perpendiculaires entre eux, car les valeurs de x, y, z, données en μ, ν, ρ, par les équations (6) conduisent aux identités

$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)} - \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)} = 0,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2\rho^2} - \frac{y^2}{(\nu^2 - b^2)(b^2 - \rho^2)} + \frac{z^2}{(c^2 - \nu^2)(c^2 - \rho^2)} = 0,$$
$$\frac{x^2}{\rho^2\mu^2} - \frac{y^2}{(b^2 - \rho^2)(\mu^2 - b^2)} - \frac{z^2}{(c^2 - \rho^2)(\mu^2 - c^2)} = 0,$$

relations qui expriment que les cosinus des angles de ces plans sont nuls.

Ainsi, une surface quelconque de l'un des systèmes (5) coupe normalement toutes les surfaces des deux autres systèmes.

§ VIII.

Considérons particulièrement un des ellipsoïdes au paramètre μ, représenté par la première des équations (5). En un quelconque de ses points passent deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes, ayant les mêmes foyers que cet ellipsoïde, qui sont perpendiculaires à sa surface, et qui se coupent conséquemment suivant une courbe à double courbure normale à l'ellipsoïde proposé. Soit M' un point de cette intersection voisin de M, et situé sur un second ellipsoïde infiniment voisin du premier et ayant pour paramètre $\mu + \delta\mu$; soit $MM' = \delta s$, et représentons par δx, δy, δz, les projections de cet élément linéaire sur les trois axes. Il est évident qu'en passant de M à M', ν et ρ restent constants; μ est donc la seule coordonnée elliptique qui varie. D'après cela les équations (6) donneront

$$bc\delta x = \nu\rho\delta\mu,$$
$$b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,\delta y = \frac{\mu\sqrt{\nu^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - \rho^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}},$$
$$c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,\delta z = \frac{\mu\sqrt{c^2 - \nu^2}\,\sqrt{c^2 - \rho^2}}{\sqrt{\mu^2 - c^2}}.$$

On en conclura facilement l'expression de l'élément linéaire....

$MM' = \delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; on trouve ainsi, toute réduction faite,

$$\delta s = \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\,\sqrt{\mu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{\mu^2 - c^2}}\,\delta\mu.$$

Pareillement, si l'on désigne par $\delta s'$ l'élément de la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes aux mêmes foyers, qui passent en un même point, on aura

$$\delta s' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\,\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,\delta\nu.$$

Enfin, si $\delta s''$ est l'élément de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde à une nappe et de l'ellipsoïde homofocaux correspondants à un même point de l'espace, on aura

$$\delta s'' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}\,\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\,\sqrt{c^2 - \rho^2}}\,\delta\rho.$$

Si donc s, s', s'', représentent les longueurs finies variables des courbes d'intersection aux éléments δs, $\delta s'$, $\delta s''$, s variant avec μ seulement, s' avec ν, s'' avec ρ, on aura pour déterminer ces trois fonctions les trois intégrales suivantes :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= \int_c^\mu \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\,\sqrt{\mu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{\mu^2 - c^2}}\,\delta\mu, \\ s' &= \int_b^\nu \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\,\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,\delta\nu, \\ s'' &= \int_0^\rho \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}\,\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\,\sqrt{c^2 - \rho^2}}\,\delta\rho. \end{aligned}\right.$$

§ IX.

Toutes les courbes s', s'', suivant lesquelles un même ellipsoïde est coupé par tous les hyperboloïdes ayant mêmes foyers que lui, ne sont autres que les lignes de courbure de sa surface. Il s'agit ici de vérifier ce théorème important : les équations de la normale à l'ellipsoïde, au point (x, y, z), sont

$$\mu^2 z(x'-x) = (\mu^2 - c^2)\,x(z'-z),$$
$$\mu^2 y(x'-x) = (\mu^2 - b^2)\,y(y'-y),$$

si cette droite est rencontrée en (x', y', z'), par la normale infiniment voisine, correspondante au point $(x+dx, y+dy, z+dz)$, on devra avoir

$$\mu^2(zdx - xdz)\,x' + c^2x^2dz = 0,$$
$$\mu^2(ydx - xdy)\,x' + b^2x^2dy = 0;$$

car ces dernières équations s'obtiennent en combinant les équations de la normale, avec celles qu'on en déduit par la différentiation de x, y, z. L'élimination de l'abscisse x' du point de concours supposé des deux normales voisines conduit à la relation

$$b^2\left(\frac{zdx - xdz}{dz}\right) = c^2\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right),$$

ou

$$(8)\ldots \qquad b^2\left(\frac{z}{dz} - \frac{x}{dx}\right) = c^2\left(\frac{y}{dy} - \frac{x}{dx}\right),$$

à laquelle doivent satisfaire les différentielles dx, dy, dz, pour que les normales voisines soient dans le même plan. Cette relation, combinée avec l'équation différentielle de l'ellipsoïde, représente, comme on le sait, les lignes de courbure de sa surface.

Maintenant, lorsqu'on chemine sur une des courbes s', μ et ρ conservent les mêmes valeurs, et ν varie seul; alors on a par les équations (6)

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\nu}{\nu}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\nu}{\nu^2 - b^2}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{\nu}{\nu^2 - c^2};$$

or ces valeurs de $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, $\frac{dz}{z}$, rendent identique l'équation (8); les courbes s' forment donc un des systèmes de lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Pareillement lorsqu'on suit une même courbe s'', μ et ν restent constants, et ρ varie seul; les équations (6) donnent alors

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\rho}{\rho^2 - b^2}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{\rho}{\rho^2 - c^2};$$

expressions qui rendent encore identique l'équation (8); les courbes s'' forment donc le second système de lignes de courbure de l'ellipsoïde.

On peut énoncer ces propriétés d'une manière plus générale, en disant que *toutes les surfaces homofocales de deux quelconques des trois systèmes* (5) *rencontrent normalement une surface courbe quelconque du troisième système, et tracent sur elle toutes ses lignes de courbure.*

§ X.

Revenons maintenant à la question physique, et cherchons quelle sera la loi des températures stationnaires d'une enveloppe solide dans laquelle les surfaces d'égale température seront représentées par l'une des trois équations (5). Considérons d'abord le cas où ces surfaces sont des ellipsoïdes. Il faut d'abord trouver la valeur de la fonction $\psi(\lambda)$, qui rend identique l'équation (2). Si l'on pose dans l'équation (4), et dans les relations que nous en avons déduites par la différentiation

$$\lambda = \mu, \quad m = \frac{1}{\mu^2}, \quad n = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad p = \frac{1}{\mu^2 - c^2},$$

on trouve

$$m' = -\frac{2}{\mu^3}, \quad n' = -\frac{2\mu}{(\mu^2 - b^2)^2}, \quad p' = -\frac{2\mu}{(\mu^2 - c^2)^2},$$
$$m'' = -\frac{1}{2\mu}m', \quad n'' = -\frac{1}{2\mu}n', \quad p'' = -\frac{1}{2}p',$$

et par suite

$$(\mathrm{L} - 2m)m'^2 + m''m^2 = m'^2\left(\frac{n+p}{2}\right),$$
$$(\mathrm{L} - 2n)n'^2 + n''n^2 = n'^2\left(\frac{n+p}{2}\right),$$
$$(\mathrm{L} - 2p)p'^2 + p''p^2 = p'^2\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$2(\mathrm{L}-m-n)\,m'n'+m''n^2+n''p^2=2m'n'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$
$$2(\mathrm{L}-n-p)\,n'p'+n''p^2+p''n^2=2n'p'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$
$$2(\mathrm{L}-p-m)\,p'm'+p''m^2+m''p^2=2p'm'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

d'où l'on conclut

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=\frac{1}{\mu^2\left(\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$
$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}=\left(\frac{1}{\mu^2-b^2}+\frac{1}{\mu^2-c^2}\right)\frac{1}{\mu\left(\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$

ce qui donne, pour $\psi(\lambda)$ ou $\psi(\mu)$:

$$\psi(\mu)=\frac{\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\mu}{\mu^2-c^2}.$$

La fonction ψ étant connue, on en déduira la fonction φ en intégrant l'équation

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\mu}=\psi=\frac{\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\mu}{\mu^2-c^2},$$

ce qui donne

$$\varphi(\mu)=\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}.$$

La température V sera enfin donnée, soit par l'équation différentielle

$$(9). \qquad \frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}=\mathrm{A},$$

soit par l'équation intégrale

$$(10). \qquad \mathrm{V}=\mathrm{A}\int_c^\mu\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}+\mathrm{B}.$$

On trouvera aussi que pour le second des trois systèmes de surfaces d'égale température représentées par les équations (5), on a

$$\psi(\nu) = \frac{\nu}{\nu^2 - b^2} - \frac{\nu}{c^2 - \nu^2},$$

$$\varphi(\nu) = \sqrt{\nu^2 - b^2}\ \sqrt{c^2 - \nu^2},$$

$$(9)_1 \qquad \frac{dV}{d\nu}\ \sqrt{\nu^2 - b^2}\ \sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$(10)_1 \qquad V = A\int_b^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\ \sqrt{c^2 - \nu^2}} + B.$$

Enfin, dans le cas où l'enveloppe solide aurait pour surfaces d'égale température les hyperboloïdes à deux nappes représentés par la troisième des équations (5), on aura

$$\psi(\rho) = -\frac{\rho}{b^2 - \rho^2} - \frac{\rho}{c^2 - \rho^2},$$

$$\varphi(\rho) = \sqrt{b^2 - \rho^2}\ \sqrt{c^2 - \rho^2},$$

$$(9)_2 \ldots\ldots \qquad \frac{dV}{d\rho}\ \sqrt{b^2 - \rho^2}\ \sqrt{c^2 - \rho^2} = A,$$

$$(10)_2 \ldots \qquad V = A\int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\ \sqrt{c^2 - \rho^2}} + B.$$

Ainsi la température stationnaire, et variable d'un point à l'autre, dans les trois genres d'enveloppe dont les surfaces isothermes sont du second degré et homofocales, est exprimée par une transcendante elliptique de la première espèce; et les trois variétés de cette transcendante correspondent respectivement aux trois cas que nous avons considérés.

§ XI.

Nous pouvons maintenant vérifier que dans chacun de ces cas toutes les surfaces isothermes sont traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps, lorsque la température varie de l'une à l'autre, suivant les lois qui viennent d'être trouvées.

Considérons d'abord l'enveloppe ellipsoïdale. La quantité de chaleur qui traverse l'élément de volume compris entre deux ellipsoïdes infiniment voisins, ayant pour paramètres μ et $\mu + d\mu$, et les courbes s, correspondantes aux différents points du périmètre d'un élément $d\omega^2$, de la surface de l'ellipsoïde (μ), aura évidemment pour expression

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\delta\mu}{\delta s}\,d\omega^2;$$

K étant le coefficient de la conductibilité intérieure, de la matière dont l'enveloppe est composée.

Il s'agit d'intégrer cette expression pour toute la surface de l'ellipsoïde μ; or, cette intégration peut se faire de deux manières: en exprimant l'élément $d\omega^2$ en coordonnées orthogonales, ou en coordonnées elliptiques.

En employant les coordonnées orthogonales, on remarquera d'abord que δs est égal à la partie de la normale à l'ellipsoïde (μ) comprise entre les deux ellipsoïdes qui limitent la couche considérée, en sorte que si δx, δy, δz, sont les projections de δs sur les axes, on a

$$\frac{z}{\mu^2 - c^2}\,\delta x = \frac{x}{\mu^2}\,\delta z, \quad \frac{y}{\mu^2 - b^2}\,\delta x = \frac{x}{\mu^2}\,\delta y,$$

d'où

$$\delta s = \frac{\mu^2}{x}\,\delta x\,\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}},$$

ou, en remarquant que $\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta\mu}{\mu}$, comme l'indiquent les équations (6), puisque sur la courbe s, ν et ρ restent constants

$$\delta s = \mu\,\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 + c^2)^2}}\,\delta\mu,$$

ce qui donnera

$$\frac{\delta\mu}{\delta s} = \frac{1}{\mu\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}}}.$$

Quant à l'élément de surface $d\omega^2$, sa valeur est

$$d\omega^2 = \frac{\mu^2 - c^2}{z}\,dxdy\,\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}};$$

on peut donc poser

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial s}\,d\omega^2 = \mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\mu^2-c^2}{\mu}\,\frac{dxdy}{z}.$$

Ou bien, en remarquant que l'équation de l'ellipsoïde donne

$$\frac{z}{\sqrt{\mu^2-c^2}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}-\frac{y^2}{\mu^2-b^2}},$$

on aura

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial s}\,d\omega^2 = \mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu}\,\frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}-\frac{y^2}{\mu^2-b^2}}}.$$

L'intégration de cette expression, par rapport à y, conduit à l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}}{\mu}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\left(\text{arc sin}\,\frac{\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}}+\text{const.}\right)dx,$$

qui doit être prise de

$$\left(\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}} = -\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}\right) \text{ à } \left(\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}} = +\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}\right),$$

ce qui donne

$$\pi\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu}\,dx.$$

Enfin l'intégration par rapport à x, de $(x=-\mu)$ à $(x=+\mu)$, donne définitivement, en doublant le résultat, pour la quantité de chaleur cherchée

$$4\pi\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2},$$

ou, en vertu de l'équation (9),

$$4\pi\mathrm{KA}.$$

Cette quantité de chaleur est donc constante, quel que soit μ, ou quelle que soit la couche ellipsoïdale considérée.

§ XII.

En employant les coordonnées elliptiques, on substituera à l'élément $d\omega^2$, le rectangle $\delta s'\delta s''$, et l'on aura [équations (7)],

$$K\frac{dV}{d\mu}\frac{\delta\mu}{\delta s}\delta s'\delta s''=K\frac{dV}{d\mu}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\frac{(\nu^2-\rho^2)\,\delta\nu\delta\rho}{\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}}.$$

Cette expression devra être intégrée de $\nu=b$ à $\nu=c$, de $\rho=0$ à $\rho=b$, et ensuite multipliée par 8, pour avoir la quantité de chaleur cherchée, qui sera, en vertu de l'équation $(9)_0$,

$$8KA\int_0^b\int_b^c\frac{(\nu^2-\rho^2)\,\delta\nu\delta\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}}.$$

Sous cette forme cette quantité totale de chaleur est encore indépendante de μ, ou de la couche ellipsoïdale considérée.

Son expression différentielle

$$KA\frac{(\nu^2-\rho^2)\,\delta\nu\delta\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}},$$

est elle-même indépendante de μ. Ainsi, si l'on considère à travers l'enveloppe proposée, un canal infiniment délié, ayant pour axe une courbe s, et pour section normale le rectangle $\delta s'\delta s''$, dont la grandeur varie avec μ, ou d'une couche ellipsoïdale à la suivante, ce canal laissera écouler une même quantité de chaleur dans le même temps, par toutes ses sections normales; et ses parois, qui appartiennent à quatre hyperboloïdes aux mêmes foyers, infiniment voisins deux à deux, ne seront traversés par aucune molécule calorifique. Sous ce point de vue, on peut appeler ce canal *un filet de chaleur*, et la différentielle qui précède donne la *dépense de ce filet* pendant l'unité de temps.

§ XIII.

Soit toujours $d\omega^2$ un élément de la surface de l'ellipsoïde (μ); la quantité (ΔQ) qui le traverse sera égale à la dépense du filet de section $\delta s'\delta s''$, multipliée par le rapport $\frac{d\omega^2}{\delta s'\delta s''}$; elle est donc, d'après les équations (7), égale à

$$\Delta Q = \frac{\mathrm{KA}d\omega^2}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\rho^2}}.$$

Si l'élément $d\omega^2$, conservant toujours la même grandeur, est successivement placé aux extrémités des trois axes de l'ellipsoïde (μ), l'expression précédente prendra les trois formes suivantes:

1°. A une des extrémités du grand axe 2μ, où $x=\mu$, $y=0$, $z=0$, et $\nu=c$, $\rho=b$, elle devient

$$\Delta' Q = \frac{\mathrm{KA}d\omega^2}{\sqrt{\mu^2-c^2}\ \sqrt{\mu^2-b^2}};$$

2°. A l'extrémité de l'axe moyen, où $x=0$, $y=\sqrt{\mu^2-b^2}$, $z=0$, et $\nu=c$, $\rho=0$,

$$\Delta'' Q = \frac{\mathrm{KA}d\omega^2}{\mu\sqrt{\mu^2-c^2}};$$

3°. Enfin à l'extrémité du petit axe, où $x=0$, $y=0$, $z=\sqrt{\mu^2-c^2}$, et $\nu=b$, $\rho=0$,

$$\Delta''' Q = \frac{\mathrm{KA}d\omega^2}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}}.$$

On déduit de là

$$\Delta' Q : \Delta'' Q : \Delta''' Q :: \mu : \sqrt{\mu^2-b^2} : \sqrt{\mu^2-c^2},$$

c'est-à-dire que *les flux de chaleur aux extrémités des axes d'une même surface ellipsoïdale d'égale température ont des intensités respectivement proportionnelles à ces axes.*

§ XIV.

En égalant les deux expressions trouvées pour la quantité totale de chaleur qui traverse une surface ellipsoïdale quelconque d'égale température, on obtient

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\, d\nu\, d\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} = \frac{\pi}{2},$$

ou

$$\int_0^b \frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} \int_b^c \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} - \int_0^b \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} \int_b^c \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2},$$

ou bien encore

$$\int_0^b \frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} \int_b^c \frac{\sqrt{\nu^2-b^2}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}\, d\nu + \int_0^b \frac{\sqrt{b^2-\rho^2}}{\sqrt{c^2-\rho^2}}\, d\rho \int_b^c \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ces relations peuvent se démontrer directement (*voyez* la note placée à la fin de ce mémoire); toutefois la facilité avec laquelle elles se déduisent de l'analyse précédente mérite d'être remarquée.

Le genre de coordonnées μ, ν, ρ, auquel on est conduit en traitant la question physique qui nous occupe, paraît même devoir fournir les éléments d'une sorte de trigonométrie elliptique, dont l'objet serait de démontrer géométriquement, et d'une manière simple, quelques formules qui lient entre elles les différentes espèces de transcendantes elliptiques. Et, comme un autre exemple de ce nouveau mode de démonstration, on remarquera que le volume d'un ellipsoïde (μ), ou le produit $\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}$ de ses trois axes, multiplié par $\frac{4}{3}\pi$, doit être égal à huit fois l'intégrale triple...... $\int\int\int \delta s \delta s' \delta s''$, prise entre les limites extrêmes des variables indépendantes μ, ν, ρ; ce qui conduit à l'intégrale suivante, définie en ν et ρ, indéfinie en μ,

$$\int_0^b \int_b^c \int_b^\mu \frac{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)\, d\mu\, d\nu\, d\rho}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} = \frac{\pi}{6}\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2};$$

laquelle peut se décomposer en une somme algébrique de triples produits de transcendantes elliptiques.

§ XV.

Dans le cas de l'enveloppe dont les parois sont deux hyperboloïdes à une nappe, ayant mêmes foyers, la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, le parallélépipède $\delta s \delta s''$, compris entre deux surfaces d'égale température infiniment voisines, a pour expression

$$K \frac{dV}{d\nu} \frac{\delta\nu}{\delta s'} \delta s \delta s'' ;$$

ou, en substituant les valeurs de δs, $\delta s'$, $\delta s''$,

$$K \frac{dV}{d\nu} \sqrt{\nu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \nu^2} \frac{(\mu^2 - \rho^2)\, \delta\mu \delta\rho}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2}},$$

ou enfin, en ayant égard à l'équation (9),

$$KA \frac{(\mu^2 - \rho^2)\, \delta\mu \delta\rho}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2}} :$$

elle est donc indépendante de ν, et par conséquent de la surface isotherme considérée.

Ainsi, dans le canal infiniment délié dont l'axe et les arètes sont des courbes s', les sections $\delta s \delta s''$, perpendiculaires à ses parois et de grandeur variable, sont toutes traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps. Ce canal forme un filet de chaleur dont la différentielle qui précède exprime la dépense.

Enfin dans le cas de l'enveloppe terminée par deux moitiés d'hyperboloïdes à deux nappes aux mêmes foyers, la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, le parallélépipède $\delta s \delta s'$ est

$$K \frac{dV}{d\rho} \frac{\delta\rho}{\delta s''} \delta s \delta s'$$
$$= K \frac{dV}{d\rho} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2} \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, \delta\mu \delta\nu}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} \sqrt{\nu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

ou enfin, d'après l'équation (9), :

$$\text{KA}\,\frac{(\mu^2-\nu^2)\,\delta\mu\,\delta\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Cette quantité est indépendante de ρ, ou de ce qui particularise la surface isotherme. Ainsi, dans le canal aux arètes s'' toutes les sections $\delta s'\delta s$, quoique différentes, sont cependant toutes traversées par le même flux de chaleur. Ce canal est donc un filet de chaleur dont la dépense est exprimée par la différentielle précédente.

Il résulte de ces vérifications que les équations $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, représentent réellement les températures stationnaires dans trois genres d'enveloppes dont les parois sont des surfaces du second degré ayant mêmes foyers, et entretenues chacune à une température constante dans toute son étendue, mais différente de l'une à l'autre de ces parois.

§ XVI.

Si l'espace solide en équilibre de température était terminé par deux paraboloïdes de même espèce, dont les axes seraient dirigés sur la même droite, et dont les sections principales auraient les mêmes foyers, il résulte évidemment des différents cas qui viennent d'être traités, et des transformations connues pour passer d'une espèce de surface du second ordre à une autre, que les surfaces d'égale température dans le solide proposé seraient des paraboloïdes de même espèce que les parois, et assujettis aux mêmes relations de forme et de position.

§ XVII.

Si $b=c$ dans les équations (5), la première représente des ellipsoïdes de révolution autour de leur grand axe, et les ellipses méridiennes de tous ces ellipsoïdes ont les mêmes foyers; la troisième équation représente des hyperboloïdes de révolution à deux nappes ayant mêmes foyers; quant à la seconde, ν devant toujours être compris entre b et c, on posera $c^2=b^2+\Delta b^2$, $\nu^2=b^2+\Delta\nu^2$, $\Delta\nu^2$ et Δb^2 étant des quantités infiniment petites, dont le rapport fini peut varier avec $\Delta\nu^2$; la seconde des équations (5) deviendra alors

$$y^2 = z^2\left(\frac{1}{\frac{\Delta b^2}{\Delta\nu^2} - 1}\right),$$

et représentera deux plans méridiens quelconques des surfaces de révolution des deux autres systèmes.

En posant $b = c$ dans les équations $(9)_0$ et $(10)_0$, elles deviennent

$$\frac{dV}{d\mu}(\mu^2 - c^2) = A,$$

$$V = \frac{A}{c}\log\sqrt{\frac{\mu - c}{\mu + c}} + B,$$

pour la température stationnaire des différents points d'une enveloppe terminée par deux ellipsoïdes de révolution autour de leur grand axe, ayant mêmes foyers, et entretenus chacun à une température constante.

En faisant $b = c$ dans les équations $(9)_2$ et $(10)_2$, elles donnent

$$\frac{dV}{d\rho}(c^2 - \rho^2) = A,$$

$$V = \frac{A}{c}\log\sqrt{\frac{c + \rho}{c - \rho}} + B,$$

pour exprimer la température variable d'un point à l'autre d'une enveloppe solide terminée par les moitiés de deux hyperboloïdes de révolution à deux nappes, ayant mêmes foyers.

§ XVIII.

Si $b = 0$ dans les équations (5), la première représente des ellipsoïdes de révolution autour de leur petit axe, dont les ellipses méridiennes ont toutes les mêmes distances focales; la seconde représente des hyperboloïdes de révolution à une seule nappe, assujettis à la même relation de forme et de position; quant à la troisième, ρ devant toujours être moindre que b, on y substituera à b^2 et ρ^2 deux quantités infiniment petites Δb^2 et $\Delta \rho^2$; elle deviendra alors

$$\left(\frac{\Delta b^2}{\Delta \rho^2} - 1\right) x^2 = y^2,$$

et représentera deux plans méridiens quelconques des surfaces de révolution des deux antres systèmes.

En posant $b=0$ dans les équations $(9)_0$ et $(10)_0$, elles deviennent

$$\frac{dV}{d\mu}\mu\sqrt{\mu^2 - c^2} = A,$$

$$V = \frac{A}{c}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{c}{\mu}\right) + B.$$

Telle est la loi des températures dans une enveloppe solide terminée par deux ellipsoïdes de révolution autour de leur petit axe, dont les coupes méridiennes ont les mêmes foyers, lorsque chacune de ces parois est entretenue à une température constante, mais différente de l'une à l'autre paroi.

En faisant $b=0$ dans les équations $(9)_1$ et $(10)_1$, elles donnent

$$\frac{dV}{d\nu}\nu\sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$V = A\log\left(\frac{\nu}{c + \sqrt{c^2 - \nu^2}} + B\right),$$

pour la loi des températures stationnaires d'une enveloppe solide terminée par deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, assujettis aux mêmes relations de température et de forme que les parois du cas précédent.

Il est remarquable que dans l'enveloppe ellipsoïdale de révolution autour du grand axe, dont la surface est évaluable en arc de cercle, la température soit exprimée par un logarithme; tandis qu'au contraire, dans l'enveloppe formée par la révolution de deux ellipses homofocales autour de leurs petits axes, dont la surface est donnée par logarithmes, la température est inversement exprimée par un arc de cercle.

§ XIX.

Si l'on considère le cône comme la limite d'un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, on peut déduire de l'analyse précédente la loi des températures stationnaires de tous les points d'une enveloppe dont les parois seraient deux cônes obliques du second degré, ayant le même sommet et leurs sections principales situées sur les mêmes plans, lorsque ces deux parois, entretenues chacune à une température uniforme et constante, ont entre elles cette relation de forme, qu'elles sont asymptotiques à deux hyperboloïdes aux mêmes foyers. Les surfaces d'égale température seraient alors des cônes de la même famille, ou des cônes asymptotiques à des hyperboloïdes ayant les mêmes foyers que ceux avec lesquels les parois coniques se confondent infiniment loin du sommet.

Mais comme il est impossible de réaliser des circonstances physiques semblables, à cause du flux de chaleur qui devrait avoir lieu au sommet, sur une épaisseur nulle, et qui serait infiniment grand comparativement au flux qui traverserait toute autre partie de l'enveloppe, je me dispenserai de discuter plus longuement ce cas particulier; je ne l'offre ici que comme une limite offerte par l'analyse, et qui pourra jeter quelque jour sur la manière de considérer le cône, toutes les fois qu'on voudra étudier l'équilibre et le mouvement des agents physiques dans son intérieur.

Pour représenter analytiquement ce cas singulier, il faut supposer b et c nuls dans équations (5), sans que le rapport $\frac{b}{c}$ le soit; la première de ces équations représente alors des sphères concentriques, mais que l'on doit considérer ici comme les limites d'ellipsoïdes à axes inégaux, dont les quatre foyers sont infiniment rapprochés, sans se confondre cependant: la seconde et la troisième des équations (5), dans lesquelles on pourra remplacer ν, ρ, b, c, par $\varepsilon\nu_1$, $\varepsilon\rho_1$, εb_1, εc_1, ε étant infiniment petit ou nul, et ν_1, ρ_1, b_1, c_1, des longueurs finies, représenteront alors des cônes assymptotiques à des hyperboloïdes à une et à deux napes, ayant les mêmes plans de sections principales et les mêmes foyers.

Il suit de là que si l'on imagine les deux séries d'hyperboloïdes à une et à deux nappes représentées par les deux dernières équations (5), les traces de leurs cônes asymptotiques sur une même surface sphérique, ayant son centre à leur sommet commun, formeront deux systèmes de courbes à double courbure qui se couperont à angle droit.

§ XX.

Pour traiter le cas de l'équilibre de température d'une enveloppe cylindrique, dont les parois et les surfaces isothermes, coupées perpendiculairement aux arètes, donneraient des courbes du second degré, il faut chercher la relation qui doit exister entre les fonctions m et n du même paramètre variable λ, pour que l'équation

$$mx^2 + ny^2 = 1$$

représente un système de surfaces d'égale température. On est alors conduit aux deux systèmes suivants :

$$(5)_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} + \dfrac{y^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \end{array} \right.$$

qui représentent deux séries de cylindres, les uns à base elliptique, les autres à base hyperbolique, qui ont cela de commun que leurs traces sur un même plan perpendiculaire à leurs arètes sont toutes des courbes du second degré ayant les mêmes foyers. Les traces hyperboliques coupent à angle droit toutes les traces elliptiques, etc.

On trouve alors pour la loi des températures de l'enveloppe cylindrique indéfinie à base elliptique,

$$\frac{dV}{d\mu} \sqrt{\mu^2 - c^2} = A,$$

$$V = A \log (\mu + \sqrt{\mu^2 - c}) + B;$$

et pour le cas de la base hyperbolique

$$\frac{dV}{d\nu} \sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$V = A \,\text{arc}\left(\sin = \frac{\nu}{c}\right) + B.$$

Je crois inutile d'entrer dans plus de détails sur ces nouveaux exemples; la discussion du cas plus général que j'ai traité le premier ne permet pas de douter de l'exactitude des lois indiquées par les équations précédentes.

SECONDE PARTIE.

§ XXI.

Les coordonnées elliptiques, qui sont indiquées par l'analyse mathématique de l'équilibre de la chaleur dans les corps que j'ai considérés, donnent le moyen de traiter le cas plus général des températures stationnaires d'un corps plein ou d'une enveloppe solide creuse, dont les parois seraient des surfaces du second degré, auxquelles seraient immédiatement appliqués des foyers connus, mais variables d'un point à l'autre de ces parois; ainsi que le cas du refroidissement de ce corps ou de cette enveloppe, lorsqu'elle est exposée à des circonstances calorifiques de même nature.

En exprimant l'équation générale au moyen des coordonnées dont il s'agit, on parvient, comme dans les cas traités jusqu'ici, à ramener la solution complète de la question à l'intégration d'équations aux différences ordinaires; en sorte que la seule difficulté qui s'oppose encore à l'évaluation numérique des températures ne consiste plus qu'à intégrer ces dernières équations au moyen de séries suffisamment convergentes.

Ces équations aux différences ordinaires prennent leur forme la plus simple et la plus commode, en substituant aux coordonnées elliptiques un autre genre de coordonnées, qui a encore un rapport plus direct avec la question physique. Si l'on considère séparément les trois systèmes conjugués et orthogonaux de surfaces isothermes comprises parmi les surfaces du second degré, la température est exprimée, dans chacun de ces systèmes, par une transcendante elliptique de première espèce. Or, les nouvelles coordonnées dont il s'agit sont les trois transcendantes elliptiques qui expriment les températures stationnaires dans les trois cas.

L'objet de cette seconde partie est de démontrer les deux propositions que je viens d'énoncer.

§ XXII.

Je considérerai d'abord le cas général de l'équilibre des températures dans un corps solide homogène, terminé par des surfaces du second degré homofocales.

Soient ε, η, ξ, les intégrales qui constituent les parties variables de la température, dans les équations $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, de la première partie de ce mémoire, lorsque les surfaces isothermes sont ou des ellipsoïdes, ou des hyperboloïdes à une nappe, ou des hyperboloïdes à deux nappes, tous ayant les mêmes foyers. Soit de plus $\mu_0 > c$, $\nu_0 > b$ et $< c$, $\rho_0 < b$, les limites inférieures des intégrales ε, η, ξ, ou les valeurs des variables pour lesquelles ces intégrales sont nulles, on aura

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{\mu^2 - c^2}}, \\ \eta &= \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}, \\ \xi &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\,\sqrt{c^2 - \rho^2}}. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit maintenant de prendre ε, η, ξ, pour les trois variables indépendantes de la température V, qui rapportée aux coordonnées x, y, z, doit vérifier l'équation (1). Pour cela, il faut d'abord transformer cette dernière équation en coordonnées elliptiques, μ, ν, ρ.

En effectuant cette transformation, on se rappellera que les équations obtenues en égalant à des constantes les trois fonctions μ, ν, ρ, représentent (en coordonnées rectangulaires) trois surfaces qui se coupent orthogonalement, en sorte que l'on doit poser

$$\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\nu}{dy}\cdot\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d\nu}{dz}=0,$$
$$\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\mu}{dy}\cdot\frac{d\rho}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d\rho}{dz}=0,$$
$$\frac{d\nu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\nu}{dy}\cdot\frac{d\rho}{dy}+\frac{d\nu}{dz}\cdot\frac{d\rho}{dz}=0.$$

On a, en regardant μ, ν, ρ, comme des fonctions de x, y, z,

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}+\frac{dV}{d\nu}\frac{d\nu}{dx}+\frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dx},$$
$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dx^2}=\;&\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\frac{d^2V}{d\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2+\frac{d^2V}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2\\&+\frac{dV}{d\mu}\frac{d^2\mu}{dx^2}+\frac{dV}{d\nu}\frac{d^2\nu}{dx^2}+\frac{dV}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2}\\&+2\frac{d^2V}{d\mu d\nu}\cdot\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\nu}{dx}+2\frac{d^2V}{d\mu d\rho}\cdot\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}+2\frac{d^2V}{d\nu d\rho}\cdot\frac{d\nu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}\end{aligned}$$

et par suite, en omettant les termes qui se détruisent,

$$(12)\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\\&=\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d^2\mu}{dx^2}+\frac{d^2\mu}{dy^2}+\frac{d^2\mu}{dz^2}\right)+\frac{d^2V}{d\mu^2}\left[\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2\right]\\&+\frac{dV}{d\nu}\left(\frac{d^2\nu}{dx^2}+\frac{d^2\nu}{dy^2}+\frac{d^2\nu}{dz^2}\right)+\frac{d^2V}{d\nu^2}\left[\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2\right]\\&+\frac{dV}{d\rho}\left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right)+\frac{d^2V}{d\rho^2}\left[\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Or, les fonctions μ, ν, ρ, vérifient l'équation (2) en prenant pour $\psi(\mu)$, $\psi(\nu)$, $\psi(\rho)$ les expressions qui conduisent aux équations (9), et qui sont,

$$\psi(\mu)=\frac{\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\mu}{\mu^2-c^2},$$
$$\psi(\nu)=\frac{\nu}{\nu^2-b^2}-\frac{\nu}{c^2-\nu^2},$$
$$\psi(\rho)=-\frac{\rho}{b^2-\rho^2}-\frac{\rho}{c^2-\rho^2}.$$

On a donc

$$(13)\begin{cases}\dfrac{d^2\mu}{dx^2}+\dfrac{d^2\mu}{dy^2}+\dfrac{d^2\mu}{dz^2}=\left(\dfrac{\mu}{\mu^2-b^2}+\dfrac{\mu}{\mu^2-c^2}\right)\left[\left(\dfrac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dz}\right)^2\right];\\[2ex] \dfrac{d^2\nu}{dx^2}+\dfrac{d^2\nu}{dy^2}+\dfrac{d^2\nu}{dz^2}=\left(\dfrac{\nu}{\nu^2-b^2}-\dfrac{\nu}{c^2-\nu^2}\right)\left[\left(\dfrac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dz}\right)^2\right],\\[2ex] \dfrac{d^2\varrho}{dx^2}+\dfrac{d^2\varrho}{dy^2}+\dfrac{d^2\varrho}{dz^2}=-\left(\dfrac{\varrho}{b^2-\varrho^2}+\dfrac{\varrho}{c^2-\varrho^2}\right)\left[\left(\dfrac{d\varrho}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\varrho}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\varrho}{dz}\right)^2\right].\end{cases}$$

On a de plus

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2=\frac{1}{\mu^2\left(\dfrac{x^2}{\mu^4}+\dfrac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\dfrac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$

et en vertu des équations (6)

$$\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}=\frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\varrho^2)}{\mu^2(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)},$$

d'où enfin

$$(14)\begin{cases}\left(\dfrac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dz}\right)^2=\dfrac{(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\varrho^2)},\\[2ex] \left(\dfrac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dz}\right)^2=\dfrac{(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\varrho^2)},\\[2ex] \left(\dfrac{d\varrho}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\varrho}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\varrho}{dz}\right)^2=\dfrac{(b^2-\varrho^2)(c^2-\varrho^2)}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\varrho^2)}.\end{cases}$$

Les équations (13) et (14) donnent le moyen d'éliminer x, y, z, dans l'équation (12), qui devient alors

$$(15)\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\dfrac{d\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\dfrac{dV}{d\mu}}{d\mu}}{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\varrho^2)}\\[4ex] \qquad+\dfrac{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\dfrac{d\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\dfrac{dV}{d\nu}}{d\nu}}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\varrho^2)}\\[4ex] \qquad\qquad+\dfrac{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}\,\dfrac{d\sqrt{b^2-\varrho^2}\,\sqrt{c^2-\varrho^2}\,\dfrac{dV}{d\varrho}}{d\varrho}}{(\mu^2-\varrho^2)(\nu^2-\varrho^2)}=0.\end{cases}$$

Ou enfin, en rapportant la température V aux coordonnées ε, η, ξ,

$$(15)\ bis. \quad (\nu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+(\mu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\eta^2}+(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2V}{d\xi^2}=0.$$

On doit considérer dans cette équation μ, ν, ρ, comme des fonctions de ε, η, ξ, données par les formules (11). Il s'agit maintenant d'intégrer cette dernière équation (15) *bis*.

§ XXIII.

Les formules (11) donnent

$$\frac{d\mu}{d\varepsilon}=\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2},\quad \frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}=\mu\sqrt{\mu^2-c^2},$$
$$\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\varepsilon}=\mu\sqrt{\mu^2-b^2};$$
$$\frac{d\nu}{d\eta}=\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2},\quad \frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{d\eta}=\nu\sqrt{c^2-\nu^2},$$
$$\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}=-\nu\sqrt{\nu^2-b^2};$$
$$\frac{d\rho}{d\xi}=\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2},\quad \frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}=-\rho\sqrt{c^2-\rho^2},$$
$$\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}=-\rho\sqrt{b^2-\rho^2}.$$

D'où l'on conclut les identités qui suivent, lesquelles sont importantes pour la question qui nous occupe :

$$(16)\left\{\begin{aligned}
&(\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\mu}{d\varepsilon}\right)^2+(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2+(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2\\
&\qquad=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2),\\
&(\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}\right)^2+(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\nu^2-b}}{d\eta}\right)^2\\
&\qquad-(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2),\\
&(\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\xi}\right)^2-(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}\right)^2\\
&\qquad-(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2).
\end{aligned}\right.$$

Il résulte de là que si E, Y, X, sont des fonctions, la première de ε seulement, la seconde de η, la troisième de ξ, satisfaisant aux équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+\left[P\left(\frac{d\mu}{d\varepsilon}\right)^2+Q\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+R\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\varepsilon}\right)^2\right]E=0,\\
&\frac{d^2Y}{d\eta^2}+\left[P\left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2+Q\left(\frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{d\eta}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-R\left(\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}\right)^2\right]Y=0,\\
&\frac{d^2X}{d\xi^2}+\left[P\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2-Q\left(\frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-R\left(\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2\right]X=0,
\end{aligned}\right.$$

où P, Q, R, sont des paramètres indéterminés et constants. L'équation (15) *bis* deviendra en y posant $V=EYX$,

$$(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2)(P+Q+R)=0,$$

et sera satisfaite si l'on établit entre P, Q, R, la relation

$$(18)\qquad P+Q+R=0.$$

On pourra donc prendre pour une intégrale, la plus générale de l'équation (15) *bis*, une série de la forme

$$V=\Sigma A.EYX,$$

A étant un coefficient constant, et chaque terme de cette série correspondant à un système particulier de valeurs de P, Q, R, vérifiant l'équation (18).

§ XXIV.

Les parois du corps solide proposé sont représentées par des équations très simples dans le système de coordonnées actuel, puisque ces parois sont par hypothèse des surfaces sur lesquelles une des coordonnées est constante. L'intégrale (19) de V se prêtera donc facilement à l'introduction des conditions données de la surface.

Il est aisé de voir, d'après cela, que tous les cas d'équilibre de température des corps ou des enveloppes solides terminés par des surfaces du second degré soumises à des sources connues de chaleur et de froid, sont ramenés à l'intégration des équations aux différences ordinaires (17), qui, en vertu de l'équation (18), peuvent se mettre sous la forme

$$(17)\ bis\ \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+[Qb^2(\mu^2-c^2)+Rc^2(\mu^2-b^2)]E=0,\\&\frac{d^2Y}{d\eta}=[Qb^2(c^2-\nu^2)-Rc^2(\nu^2-b^2)]Y=0,\\&\frac{d^2X}{d\xi^2}+[-Qb^2(c^2-\rho^2)-Rc^2(b^2-\rho^2)]X=0,\end{aligned}\right.$$

en y regardant μ, ν, ρ, comme respectivement fonction de ε, η, ξ, d'après les formules (11); ou en μ, ν, ρ :

$$(17)\ ter\ \left\{\begin{aligned}&(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)\frac{d^2E}{d\mu^2}+[\mu(\mu^2-b^2)+\mu(\mu^2-c^2)]\frac{dE}{d\mu}\\&\qquad+[Qb^2(\mu^2-c^2)+Rc^2(\mu^2-b^2)]E=0,\\&(c^2-\nu^2)(\nu^2-b^2)\frac{d^2Y}{d\nu^2}+[-\nu(\nu^2-b^2)+\nu(c^2-\nu^2)]\frac{dY}{d\nu}\\&\qquad+[Qb^2(c^2-\nu^2)-Rc^2(\nu^2-b^2)]Y=0,\\&(c^2-\rho^2)(b^2-\rho^2)\frac{d^2X}{d\rho^2}+[-\rho(b^2-\rho^2)-\rho(c^2-\rho^2)]\frac{dX}{d\rho}\\&\qquad+[-Qb^2(c^2-\rho^2)-Rc^2(b^2-\rho^2)]X=0.\end{aligned}\right.$$

§ XXV.

Le cas du refroidissement d'un corps solide homogène terminé par des surfaces du second degré homofocales, peut pareillement se ramener à l'intégration d'équations aux différences ordinaires

La formule générale connue

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=K\frac{dV}{dt},$$

devient en μ, ν, ρ

$$\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\dfrac{d\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\dfrac{dV}{d\mu}}{d\mu}}{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\,\dfrac{d\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\dfrac{dV}{d\nu}}{d\nu}}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}\,\dfrac{d\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}\dfrac{dV}{d\rho}}{d\rho}}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)} = K\frac{dV}{dt},$$

et en ε, η, ξ

$$(\nu^2-\rho)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+(\mu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\eta^2}-(\mu^2+\nu^2)\frac{d^2V}{d\xi^2}$$
$$=(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)\,K\frac{dV}{dt};$$

en regardant ici μ, ν, ρ, comme respectivement fonction de ε, η, ξ, d'après les équations (11).

Or on satisfera évidemment à cette dernière équation, en posant

$$V = \Sigma A e^{-\frac{\theta^2}{K}t}.EYX.$$

Les fonctions E, Y, X, vérifiant les équations différentielles (17), dans lesquelles les constantes P, Q, R, seront liées au paramètre θ^2, par l'équation

$$P+Q+R+\theta^2=0.$$

Il est facile, si on le trouve convenable, de rétablir dans ces équations les coordonnées μ, ν, ρ; elles prennent alors des formes analogues aux équations (17) *ter*; les derniers termes sont seuls plus compliqués.

§ XXVI.

Dans l'état actuel de l'analyse mathématique, toutes les équations différentielles (17) ne sont pas intégrables d'une manière assez simple, ni assez commode, pour qu'il pût être intéressant de pousser ici plus loin la discussion des cas généraux qui précèdent. Je me contenterai d'avoir fait voir que l'analyse de ces questions physiques ne dépend plus que de l'intégration d'équations aux différences ornaires linéaires et du second ordre.

§ XXVII.

Les équations aux différences ordinaires auxquelles on est conduit en cherchant à traiter les cas plus particuliers de l'équilibre et du mouvement de la chaleur dans les ellipsoïdes de révolution, ou dans un prisme à base elliptique, se déduisent facilement de calculs plus simples, mais analogues aux précédents; je me dispenserai de les présenter ici.

Je ferai remarquer toutefois que le cas de l'équilibre des températures de l'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe, lorsque les foyers de chaleur et de froid auxquels il est exposé sont placés symétriquement par rapport à cet axe, est exprimé par l'équation

$$\frac{d\,(\mu^2 - c^2)\,\frac{dV}{d\mu}}{d\mu} + \frac{d\,(c^2 - \varrho^2)\,\frac{dV}{d\varrho}}{d\varrho} = 0,$$

qui peut s'intégrer assez facilement, comme M. Poisson l'a fait voir dans un de ses mémoires sur le son.

§ XXVIII.

Le cas de l'équilibre calorifique d'un cylindre indéfini à base elliptique se présente sous une forme très simple, en employant pour coordonnées les fonctions

$$\varepsilon = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - c^2}}, \quad \eta = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

qui expriment les lois des températures stationnaires sur les cylindres elliptiques et hyperboliques, homofocaux et isothermes, que j'ai considérés à la fin de la première partie de ce mémoire ; l'équation que la fonction V doit vérifier se réduit alors à

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2V}{d\eta^2} = 0.$$

En sorte que le cas général du cylindre à base elliptique ou hyperbolique, en équilibre de température, peut se traiter avec la même facilité que celui correspondant du prisme à base rectangulaire, dont la solution est connue.

§ XXIX.

Ainsi, la connaissance des surfaces isothermes du second ordre, et celle des lois qui lient les températures stationnaires sur ces surfaces, indiquent à l'analyse le genre de coordonnées qu'il convient d'employer pour traiter les cas plus généraux de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, dans les corps ou les enveloppes solides, terminés par des surfaces du second ordre en contact avec des sources constantes de chaleur et de froid. C'est ce que je m'étais proposé de démontrer dans cette seconde partie.