JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Note sur un passage de la seconde partie de la Théorie des Fonctions analytiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 140-146.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__140_0>

NOTE

Sur un passage de la seconde partie de la Théorie des Fonctions analytiques ;

PAR M. POISSON.

En un point donné M sur une surface aussi donnée, le contact du second ordre avec une autre surface exige que celle-ci satisfasse à six conditions : il faut qu'en ce point, l'ordonnée z, ses deux dérivées z' et $z_{,}$ du premier ordre, ses trois dérivées du second ordre z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, soient égales pour les deux surfaces; la quantité z étant considérée comme une fonction des deux autres coordonnées x et y. Or l'équation générale de la sphère ne contenant que quatre constantes, savoir, son rayon et les trois coordonnées de son centre, elles ne suffisent pas pour satisfaire à ces six conditions; en sorte qu'il n'existe pas en chaque point M d'une surface donnée, une *sphère osculatrice*, ou qui ait avec cette surface, un contact du second ordre ; au lieu qu'il y a toujours un *cercle osculateur*, pour chaque point d'une courbe, à simple ou à double courbure. Après avoir fait cette remarque dans le chapitre VIII, Lagrange ajoute, dans le chapitre suivant, que si l'on trace une ligne quelconque sur la surface donnée, on pourra toujours déterminer en chaque point, une sphère osculatrice de cette ligne, ou de la surface suivant cette ligne : il entend par là une sphère tangente en M à la surface, et pour laquelle la dérivée seconde de l'ordonnée z soit la même que pour cette surface, mais seulement dans la direction de la ligne donnée. Cette ligne sera déterminée en prenant pour y une fonction de x, dont y' et y'' désigneront les deux premières dérivées; la seconde dérivée de z, qui devra être égale pour les deux surfaces, aura alors pour expression

$$z'' + 2z'_{,}y' + z_{,,}y'' + z_{,,}y'^{2} + z_{,}y'';$$

et de cette égalité, jointe à la condition du plan tangent commun aux deux surfaces qui fournit trois équations, on déduira les valeurs du rayon et des trois coordonnées du centre de la sphère demandée. Dans tout ce chapitre IX, il n'est question que des sphères osculatrices, ainsi définies, et relatives aux différentes courbes que l'on peut tracer sur une même surface; les mots *rayon de courbure* et *centre de courbure*, s'y rapportent à leurs rayons et à leurs centres, et non pas aux rayons et aux centres des cercles osculateurs de ces diverses lignes, qui se détermineraient par d'autres conditions exposées dans le chapitre VII, où l'auteur traite du contact des courbes entre elles.

Cela posé, Lagrange détermine en un point quelconque M d'une surface donnée, les directions suivant lesquelles le rayon de courbure ou de la sphère osculatrice, est un *maximum* ou un *minimum;* il trouve qu'il y en a deux, qui se coupent à angle droit, et dont l'une répond au *maximum* et 'autre au *minimum;* et de là, il conclut que l'on peut tracer sur toute surface donnée, deux séries de lignes, telles que suivant les unes, la courbure de la surface, mesurée par celle de la sphère osculatrice, soit la plus grande en chaque point, et qu'elle soit la plus petite suivant les autres. Il cherche ensuite quelles sont les lignes qui jouissent de cette autre propriété, que les rayons des sphères osculatrices suivant la direction de chacune d'elles, soient tangentes à la ligne des centres de ces sphères; il trouve pour ces lignes, celles-là même qu'il avait d'abord déterminées : *d'où il suit*, dit-il, *que les lignes suivant lesquelles le rayon de courbure sera tangent de la courbe des centres, sont les mêmes que celles de la plus grande ou de la moindre courbure*. D'après le sens que l'auteur attache à ces expressions, et qu'on vient de rappeler, il n'y a rien dans cette conclusion, qui ne soit parfaitement exact : cependant M. Jacobi a pensé qu'elle était erronée (*); mais la méprise de cet illustre géomètre

(*) Voyez le dernier numéro du Journal de M. Crelle.

vient de ce qu'il a supposé à la proposition, dont il s'agit, un sens qu'elle n'a pas et que Lagrange n'a pas voulu lui donner.

Plus loin, Lagrange dit encore : *il n'y aura, sur une surface quelconque, que ces lignes qui puissent avoir* (et qui aient effectivement suivant lui), *une développée formée par les rayons de courbure ;* ce que M. Jacobi considère aussi comme une erreur. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit toujours des rayons des sphères osculatrices, normaux à la surface donnée, et non pas des rayons de courbure, proprement dits, des lignes dont on parle, qui seraient compris dans leurs plans osculateurs. Le mot *développée* est pris ici dans l'acception générale que Monge lui a donnée, et que Lagrange a indiquée à la fin du chapitre VII : dans ce sens, une développée d'une courbe plane ou à double courbure, est le lieu des intersections successives d'un système de normales à cette courbe; chaque ligne donnée a alors une infinité de développées, qui sont toutes situées sur la surface développable, formée par les intersections successives de ses plans normaux; mais ce n'est que dans le cas particulier d'une courbe plane, que ces développées comprennent le lieu des centres des cercles osculateurs, et dans tout autre cas, les rayons de ces cercles ne sont pas tangents à la ligne de leurs centres.

Euler a déterminé le premier, les rayons de courbure des sections normales des surfaces. Il a fait voir que pour chaque point d'une surface proposée, les rayons de courbure de toutes les courbes résultantes de ces sections, sont liés entre eux par des formules qu'il a données, et qui montrent qu'on peut les déduire tous, soit de trois quelconques d'entre eux, soit de deux seulement, quand on prend pour ceux-ci, le plus grand et le plus petit rayon, appartenant à des sections perpendiculaires l'une à l'autre, dont il a déterminé les directions. C'est Meunier qui a montré ensuite comment les rayons de courbure de toutes les sections obliques, faites par une même tangente à la surface, se déduisent très simplement de celui de la section normale. D'un autre côté, Monge a considéré les courbes suivant lesquelles il faut marcher sur une surface donnée, pour que chaque normale à cette surface soit coupée par la normale infiniment voisine; lesquelles courbes, qu'il a nommées *lignes de courbure de la surface*, sont au nombre de deux en chaque point, et se coupent à angle droit. Par la considération des sphères osculatrices, Lagrange a rapproché ces deux théories différentes, et fait voir qu'en chaque point d'une surface, les sections normales de plus grande et de moindre courbure, qu'Euler a déterminées, sont tangentes aux lignes dont Monge a considéré les principales propriétés, auxquelles M. Ch. Dupin en a ajouté de nouvelles, dans ses *Développements de géométrie*. Il restait à examiner plus complétement qu'on ne l'avait fait auparavant, ce qui arrive aux points particuliers que Monge a nommés des *Ombilics;* et c'est ce que je me suis proposé dans un mémoire sur la courbure des surfaces, qui fait partie du tome VIII du Journal de M. Crelle, et du XXI^{e} cahier du Journal de l'École Polytechnique.

Les lignes de coubures de Monge n'ont pas, en général, leur plan osculateur en chaque point, perpendiculaire à la surface à laquelle elles appartiennent. Pour s'en assurer, il suffit de considérer les surfaces de révolution. Dans ce cas, les deux lignes de courbure sont planes; l'une est la courbe génératrice, et l'autre un cercle : le plan osculateur de la première est normal à la surface; mais évidemment, celui du cercle ne l'est pas. C'est la ligne la plus courte d'un point à un autre sur une surface donnée, qui jouit, comme on sait, de la propriété d'avoir, en tous ses points, son plan osculateur normal à cette surface; et comme le dit très bien M. Jacobi, une même courbe ne peut être, à la fois, une ligne de courbure et la ligne la plus courte entre deux points donnés, à moins qu'elle ne soit une courbe plane. Par inadvertance, j'ai énoncé, dans mon *Traité de Mécanique* (*), cette proposition fausse, que si les deux points donnés se trouvent sur une même ligne de courbure, cette ligne sera la plus courte; mais j'ai eu soin, dans mes cours, d'avertir de cette erreur qui m'est échappée.

L'équation générale de la surface d'un ellipsoïde contient neuf coefficients constants; si donc on donne un point M sur une surface aussi donnée, on pourra toujours déterminer une infinité d'ellipsoïdes qui aient en ce point, un contact du second ordre, avec cette surface : trois des neuf coefficients resteront indéterminés; mais ils ne

---

(*) Tome II, page 300.

suffiront pas pour élever ce contact au quatrième ordre, c'est-à-dire, pour satisfaire aux quatre conditions que le quatrième ordre exige de plus que le troisième. Au point M, le plan tangent, les plans des sections normales de plus grande et de plus petite courbure, et les rayons e courbure de ces deux sections, seront communs aux deux surfaces. Si ce point est aussi donné sur l'ellipsoïde, que ce soit, par exemple, un de ses sommets; on pourra réduire à

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'équation d'un ellipsoïde osculateur, en placant l'origine des coordonnées à son centre; prenant pour axe des z, la normale en M à la surface donnée, et les plans de ses sections de plus grande et de moindre courbure, pour ceux des x et z, et des y et z; et désignant par a, b, c, les trois demi-axes de cet ellipsoïde, dont les deux premiers sont parallèles au plan tangent en M, et le troisième lui est perpendiculaire. Ses deux rayons de courbure principaux au point M, auront pour valeur $\frac{a^2}{c}$ et $\frac{b^2}{c}$; en désignant par α et β ceux de la surface donnée en ce même point, on aura donc

$$a^2=\alpha c,\quad b^2=\beta c;$$

ce qui fera connaître deux des trois demi-axes a, b, c, et laissera le troisième indéterminé. Par conséquent, en un même point M, une surface donnée a encore un nombre infini d'ellipsoïdes osculateurs, dont l'un des sommets est au point de contact; et cela aura également lieu, lorsque la surface donnée sera elle-même un ellipsoïde, qui aura aussi le point M pour un de ses sommets.

Aux deux équations précédentes, on en pourra joindre une troisième qui achèvera la détermination des trois quantités a, b, c. On pourra, par exemple, supposer qu'on ait $c=b$; d'où il résultera $b=\beta$ et $a=\sqrt{\alpha\beta}$. L'ellipsoïde osculateur sera alors une surface de révolution dont l'axe de figure se trouvera parallèle au plan tangent en M : il ne pourrait être parallèle à la normale ou perpendiculaire à ce plan, à moins qu'on n'eût $\alpha=\beta$. Si l'on fait successivement $c=a$ et $c=b$, il en résultera deux ellipsoïdes osculateurs, de révolution, mais différents l'un de l'autre; et l'un sera aplati, tandis que l'autre sera allongé (*). On pourra aussi changer l'ellipsoïde osculateur en paraboloïde. Pour cela, si l'on transporte l'origine des coordonnées au point M, et qu'on mette, en conséquence, $z - c$ au lieu de z, dans l'équation de l'ellipsoïde, on aura

$$z^2 - 2cz + c\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{6}\right) = 0,$$

en y substituant aussi pour a^2 et b^2 leurs valeurs; en la résolvant par rapport à z, on en déduit

$$z = c \pm c\sqrt{1 - \frac{1}{c}\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{6}\right)};$$

et si l'on prend le radical avec le signe inférieur, qu'on le développe suivant les puissances descendantes de c, et qu'on fasse ensuite $c = \infty$, il vient

$$z = \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{6},$$

pour l'équation du paraboloïde osculateur. Mais, parmi toutes les conditions que l'on peut ajouter à celles du conctact du second ordre, l'équation nécessaire pour un contact du troisième ordre suivant une direction déterminée, ne se trouve pas comprise; car, dans tous les sens autour du point M, la fonction tierce de z, qui répond à $x = 0$ et $y = 0$, est zéro pour l'ellipsoïde osculateur, et, en général, elle ne l'est pour la surface donnée, que selon une ou trois directions déterminées par une équation du troisième degré, que l'on formera sans difficulté. Cela établit une différence essentielle entre la sphère tan-

(*) Peut-être devrait-on, dans la géodésie, prendre pour l'ellipsoïde osculatrice en chaque point de la Terre, un ellipsoïde de révolution aplati; ce serait celui qui ressemblerait le plus en général, à la figure du globe, et qui la ferait le mieux connaître, si l'on déterminait par l'observation, en un grand nombre de lieux, les deux axes de cet ellipsoïde, et la direction de son équateur : ces données de l'observation, jointes aux longitudes et aux latitudes, aux longueurs du pendule à seconde et aux élévations au-dessus du niveau des mers, formeraient les éléments complets de la Géographie mathématique.

gente et l'ellipsoïde osculateur : la sphère peut toujours être rendue osculatrice, suivant une direction choisie à volonté; et le contact de l'ellipsoïde ne saurait être élevé à l'ordre supérieur, suivant aucune direction pour laquelle il n'est pas naturellement du troisième ordre.

Note du rédacteur.

La note de M. Jacobi, imprimée dans le *Journal de M. Crelle*, a pour titre : *Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in Theoriâ functionum leguntur.* Pour la commodité de nos lecteurs, nous la transcrirons ici tout entière.

« Demonstravi in aliâ commentatione, præter curvas planas extare nullas, » quarum radii osculi curvam centrorum curvaturæ tangent, sive superficiem » evolubilem forment. Secùs putabat ill. *Lagrange*, qui in Theoriâ functionum » (*pag.*, 229, *etc.*, *N°* 35) conditionem analyticam exhibet, quæ ad hoc locum » haberi debeat, neque videt ter eam integratam in plani æquationem abire. » Sed vir illustris mox adeò ipsas lineas dupliciter curvas assignat, quæ illâ pro- » prietate gaudeant, scilicet lineas curvaturæ in datâ superficie : legimus enim, » (*pag.* 248) :

» *D'où il suit que les lignes, suivant lesquelles le rayon de courbure sera tan-* » *gent de la courbe des centres, sont les mêmes que celles de la plus grande ou* » *de la moindre courbure ;*

» et mox, (*pag.* 245) :

» *Il n'y aura sur une surface quelconque que ces lignes* (*les lignes de courbure*) » *qui puissent avoir une développée formée par les rayons de courbure.*

» Scilicet nescio quo factum est, ut vir illustris normales superficiei putaverit » esse linearum curvaturæ radios osculi. Sanè normales ad superficiem, in punctis « lineæ curvaturæ ductæ, formant superficiem evolubilem, sed eæ non sunt lineæ » curvaturæ radii osculi. Novimus enim radios osculi curvæ, in superficie datâ » descriptæ, simul superficiei normales non nisi in lineis superficiei brevissi- » mis esse.

» Sequitur ex antecedentibus, *in datâ superficie lineam curvaturæ simul li-* » *neam brevissimam esse non posse, nisi sit curva plana.* Nam normales ad su- » perficiem in punctis lineæ curvaturæ ductæ formant superficiem evolubilem, » ideòque, cùm in lineis brevissimis normales superficiei sint curvæ radii osculi, » radii osculi lineæ curvaturæ, quæ simul linea brevissima est, superficiem evo- » lubilem formant; undè sequitur curvam esse planam. Nam in aliâ commenta- » tione hujus diarii, t. XIV (*zur Theorie der Curven*), sicuti suprà adnotavi, de- » monstratum est, radios osculi formare superficiem evolubilem non nisi in curvis » planis. Exemplum habemus in meridianis superficierum rotundarum, quæ » sunt curvæ planæ, simulque et lineæ brevissimæ et lineæ curvaturæ. »