JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 135-139.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__135_0>

NOTE

Sur le développement de $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$;

PAR J. LIOUVILLE.

Représentons par $X_0 + X_1 z + \ldots + X_n z^n + \ldots$ le développement du radical $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ordonné suivant les puissances ascendantes de z : X_n sera une fonction entière de x de degré n, et l'on a vu dans le cahier précédent que la valeur de cette fonction est

$$(1) \qquad X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \cdot \frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

A l'aide de la formule (1) on prouve sans peine que, si l'indice m est $< n$, on a

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0.$$

Quand on fait $m = n$, il vient au contraire

$$(3) \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Mais on peut aussi établir les équations (2), (3) sans connaître l'expression analytique de X_n. Pour y parvenir, Legendre considère l'intégrale (*)

$$P = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2rxz + r^2z^2}\sqrt{1 - \frac{2xz}{r} + \frac{z^2}{r^2}}}.$$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, tome II, page 250.

Si l'on fait $1+r^2z^2-2rxz=y^2$, ou $x=\frac{1+r^2z^2-y^2}{2rz}$, on aura, dit-il, la transformée

$$P=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1+r^2+z^2-r^2z^2}},$$

d'où résulte l'intégrale indéfinie

$$P=C+\frac{1}{z}\log\left(-y+\sqrt{y^2-1+r^2+z^2-r^2z^2}\right).$$

Les limites de x étant $x=-1$, $x=+1$, celles de y sont $y=1+rz$, $y=1-rz$: on aura donc l'intégrale cherchée

$$P=\frac{1}{z}\log\left(\frac{r-z-1+rz}{r+z-1-rz}\right)=\frac{1}{z}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

ou $\quad P=2+\frac{2}{3}z^2+\frac{2}{5}z^4+\ldots\ldots+\frac{2}{2n+1}z^{2n}+\ldots.,$

quantité indépendante de r.

Cette intégrale est celle de la différentielle

$$dx\,(1+X_1zr+X_2z^2r^2+\text{etc.})\left(1+X_1\frac{z}{r}+X_2\frac{z^2}{r^2}+\text{etc.}\right),$$

et puisque r disparaît entièrement du résultat, il faut qu'on ait généralement, m et n étant inégaux, $\int_{-1}^{+1}X_mX_ndx=0$. On voit en même temps que m et n étant égaux, on aura

$$\int_{-1}^{+1}X_n^2dx=\frac{2}{2n+1},\quad \text{C. Q. F. D.}$$

Maintenant je dis qu'en s'appuyant sur la formule (2), on obtient aisément l'expression générale de X_n, d'où résulte une démonstration nouvelle de la formule (1). Cette démonstration que je vais exposer en peu de mots n'est pas indigne, ce me semble, de l'attention des géomètres.

Pour fixer les idées cherchons par exemple X_3. En faisant $n=3$, puis successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$ dans l'équation (2), on a

$$\int_{-1}^{+1}X_0X_3dx=0\quad \int_{-1}^{+1}X_1X_3dx,\quad \int^{+1}X_2X_3dx=0,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \int_{-1}^{+1} (A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2)\, X_3 dx = 0\,,$$

quels que soient les coefficients constants A_0, A_1, A_2. Mais un polynome y du second degré par rapport à x peut toujours être mis sous la forme $A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2$. En effet par une détermination convenable de la constante A_2, rendons égaux les coefficients de x^2 dans y et dans A_2X_2 : dès-lors $y - A_2X_2$ ne sera plus que du premier degré par rapport à x, : de même $y - A_2X_2 - A_1X_1$ se réduira à une simple constante A_0X_0 si l'on attribue au coefficient A_1 une valeur convenable. Finalement on aura donc $y = A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2$, et l'équation (4) deviendra

$$(5) \qquad \int_{-1}^{+1} yX_3dx = 0.$$

En intégrant par parties trois fois de suite et se rappelant que $d^3y = 0$, on trouve

$$\int_{-1}^{x} yX_3dx = y\int_{-1}^{x} X_3dx - \frac{dy}{dx}\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx + \frac{d^2y}{dx^2}\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx.$$

Lorsqu'on fait $x = 1$, le résultat de l'intégration doit se réduire à zéro en vertu de l'équation (5), et comme les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour $x = 1$ sont arbitraires, cela exige que l'on ait séparément

$$\int_{-1}^{x} X_3dx = 0,\ \int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx = 0,\ \int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx = 0$$

pour $x =$ En d'autres termes si l'on pose

$$\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx = \varphi(x),$$

il faut que l'on ait à la fois

$$\varphi(x) = 0,\quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0,\quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1:$$

l'équation algébrique $\varphi(x) = 0$ a donc une racine triple égale à 1 et son premier membre doit être divisible par $(x-1)^3$. D'un autre côté il est évident que l'on a aussi

$$\varphi(x)=0,\quad \frac{d\varphi(x)}{dx}=0,\quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=0 \quad \text{pour} \quad x=-1,$$

en sorte que $\varphi(x)$ est divisible par $(x+1)^3$. Or X_3 étant du troisième degré en x, $\varphi(x)$ est du sixième degré par rapport à cette variable : il résulte de là que $\varphi(x)$ ne peut être que de la forme

$$\varphi(x) \quad \text{ou} \quad \int dx \int_{-1}^{x} dx \int_{-1}^{x} X_3 dx = H_3.(x^2-1)^3,$$

ce qui donne

$$X_3 = H_3.\frac{d^3.(x^2-1)^3}{dx^3},$$

H_3 désignant une constante arbitraire.

En appliquant à la fonction X_n un calcul semblable, on a

$$X_n = H_n.\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

L'analyse précédente suppose seulement 1° que X_n soit un polynome entier de degré n, 2°. que l'équation (2) ait lieu pour toutes les valeurs de $m<n$. Il importe peu que les fonctions X_0, X_1,... proviennent du développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. La considération de ce développement ne devient utile que quand on veut déterminer H_n.

En décomposant $(x^2-1)^n$ en ses facteurs $(x+1)^n.(x-1)^n$, il vient par une formule connue

$$X_n = H_n\left[(x+1)^n.\frac{d^n.(x-1)^n}{dx^n} + \frac{n}{1}.\frac{d.(x+1)^n}{dx}.\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \text{etc.}\right],$$

et, en faisant $x=1$, il reste simplement,

$$X_n = 1.2.3\ldots n.2^n.H_n.$$

Or, pour $x = 1$, le radical $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ se réduisant à..... $(1 - z)^{-1}$, c'est-à-dire à $1 + z + z^2 + \ldots$, on a $X_n = 1$: par conséquent

$$H_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}.$$

La valeur définitive de X_n est donc

$$X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}.\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n},$$

ce qu'il fallait démontrer.