JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PLUCKER

Note sur les points singuliers des Courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 11-15.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__11_0>

NOTE

Sur les points singuliers des Courbes ;

PAR M. PLUCKER.

Une courbe quelconque étant proposée, je désignerai

1°. Par n son degré, ou le nombre de ses points d'intersection avec une ligne droite;

2°. Par m sa classe (mot introduit par M. *Gergonne*) ou le nombre de ses tangentes, passant par un même point;

3°. Par x le nombre de ses points doubles;

4°. Par y celui de ses points de rebroussement;

5°. Par u le nombre de ses tangentes doubles; et enfin

6°. Par v celui de ses tangentes (ou points) d'inflexion.

Dans ce qu'on va lire, je supposerai en outre que la courbe n'a ni points multiples, ni tangentes multiples.

I. Pour toutes les courbes algébriques quelconques, il existe une équation générale et unique, qui lie entre eux les nombres 1°. des points doubles (x), 2°. des points de rebroussement (y), 3°. des tangentes doubles (communes à deux branches différentes de la courbe) (u), et 4° des points d'inflexion (v). Cette équation est la suivante :

$$(v-y)^4-9(v-y)^2[6(v+y)+4(u+x)-45]+756(v-y)(u-x)+324(u-x)^2=0.$$

II. Les courbes générales d'un degré quelconque, n'ont ni point double ni point de rebroussement. Pour elles on obtient, en posant $y=0$ et $x=0$,

$$v^4-54v^3-36uv^2+405v^2+756uv+324u^2=0.$$

III. On obtient pour les courbes générales d'une classe quelconque (qui n'ont tangentes doubles ni points d'inflexion) l'équation analogue suivante :

$$y^4 - 54y^3 - 36xy^2 + 405y^2 + 756xy + 324x^2 = 0.$$

IV. Si le nombre des points de rebroussement est égal à celui des points d'inflexion, le nombre des points doubles est nécessairement égal à celui des tangentes doubles. De plus la courbe est coupée alors par une ligne droite en autant de points qu'il y a des tangentes de la courbe aboutissant à un même point. On a simultanément

$$v = y, \quad u = x, \quad n = m, \quad 2x + 3y = n(n-2).$$

Pour obtenir les différents cas où les courbes d'un degré donné n sont de la même classe, on n'a qu'à résoudre la dernière équation en nombres entiers, en satisfaisant en même temps à la condition

$$x + y \stackrel{=}{<} \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

V. Dans le cas général, on a

$$(v - y) = 3(m - n),$$
$$(u - x) = \tfrac{1}{2}(m - n)(m + n - 9),$$

équations simples, qui donnent encore la suivante :

$$(m + n) - 6\left(\frac{u - x}{v - y}\right) = 9.$$

VI. L'un des deux nombres n et m étant donné l'on peut prendre l'autre entre les deux limites déterminées par les deux équations

$$m \underset{=}{<} n(n-1), \quad n \underset{=}{<} m(m-1);$$

excepté toutefois qu'on n'a jamais ni $m = n(n-1)-1$ ni $n = m(m-1)-1$. On a généralement,

$$m = n(n-1) - 2x - 3y,$$
$$n = m(m-1) - 2u - 3v.$$

VII. Enfin l'on a les quatre équations suivantes :

$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y,$$
$$y = 3m(m-2) - 6u - 8v,$$
$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - [n(n-1)-6](2x+3y) + 2x(x-1) + 6xy + \tfrac{9}{2}y(y-1),$$
$$x = \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - [m(m-1)-6](2u+3v) + 2u(u-1) + 6uv + \tfrac{9}{2}v(v-1).$$

L'interprétation géométrique de ces équations est facile. Ainsi, la première d'entre elles, par exemple, indique que, si par une détermination spéciale des constantes de l'équation générale d'un degré quelconque, la courbe correspondante acquiert des points doubles ou de rebroussement, le nombre des points d'inflexion diminue de *six* unités pour chaque point double et de *huit* pour chaque point de rebroussement. J'ajouterai que sur les six points d'inflexion qui disparaissent, il y a *deux* de réels et *quatre* d'imaginaires, si c'est un point double proprement dit et supposé réel, qui les remplace; mais que tous sont imaginaires, si c'est un point conjugué. Dans le cas d'un point réel de rebroussement, il y a, sur les huit points d'inflexion qui disparaissent, *deux* de réels et *six* d'imaginaires.

VIII. Les courbes des degrés 3, 4, 5, offrent les différents cas suivants, les seuls possibles, par rapport au nombre des points et tangentes singulières, dont il est question ici.

$n = 3.$

m	x	y	u	v
6	—	—	—	9
4	1	—	—	3
3	—	1	—	1

$n = 4.$

m	x	y	u	v
12	—	—	28	24
10	1	—	16	18
9	—	1	10	16
8	2	—	8	12
7	1	1	4	10
6	3	—	4	6
.	—	2	1	8
5	2	1	2	4
4	1	2	1	2
3	—	3	1	—

$n = 5.$

m	x	y	u	v
20	—	—	120	45
18	1	—	92	39
17	—	1	78	37
16	2	—	68	33
15	1	1	56	31
14	3	—	48	27
.	—	2	45	29
13	2	1	38	25
12	4	—	32	21
.	1	2	29	23
11	3	1	24	19
.	—	3	21	21
10	5	—	20	15
.	2	2	17	17
9	4	1	14	13
.	1	3	11	15
8	6	—	12	9
.	3	2	9	11
.	—	4	6	13
7	5	1	8	7
.	2	3	5	9
6	4	2	5	5
.	1	4	2	7
5	3	3	3	3
.	—	5	—	5
4	2	4	2	1

On peut dans les tableaux qui précèdent changer réciproquement n en m, x en u, y en v.

IX. En représentant une courbe par une équation entre deux coordonnées ordinaires, on la regarde comme engendrée par le mouvement d'un point, dont les différentes positions sont données par l'équation. Soient p et q des fonctions linéaires des deux coordonnées et

$$\psi(p, q) = \Omega = 0,$$

l'équation d'une courbe quelconque, ou algébrique, ou transcendante. On sait qu'un point double de la courbe est alors indiqué par les deux équations suivantes

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dq} = 0.$$

De plus ce point double est, ou l'intersection de deux branches réelles de la courbe, ou un point conjugué, ou enfin (en général) un point de rebroussement, selon qu'on a

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dp^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dq^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dp^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dq^2} < 0, \quad \left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dp^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dq^2} = 0.$$

De ces équations l'on déduit facilement pour les courbes du troisième degré, le théorème suivant que j'ai démontré avec d'autres théorèmes semblables, dans un autre endroit : « Les trois asymptotes étant données, le lieu géométrique des points de rebroussement de ces courbes est l'ellipse *maximum*, inscrite au triangle formé par les trois asymptotes ; le lieu des points conjugués est l'intérieur, et le lieu des points doubles, proprement dits, l'extérieur de cette ellipse *maximum*. »

X. L'équation générale de la ligne droite renferme deux constantes, que nous supposons y entrer au premier degré seulement. Nous désignerons deux fonctions linéaires quelconques de ces deux constantes par r et s. Alors des valeurs données de r et s déterminent une ligne droite unique, et l'équation

$$\Psi(r, s) = \Psi = 0,$$

en y considérant r et s comme variables, représente une courbe : cette courbe est regardée comme enveloppée par une ligne droite en mouvement, dont les différentes positions sont données par l'équation précédente. Pour une tangente double l'équation de la courbe doit subsister simultanément avec les deux équations suivantes

$$\frac{d\psi}{dr} = 0, \quad \frac{d\psi}{ds} = 0.$$

De plus, cette tangente double touche deux branches réelles de la courbe, ou elle est isolée de la courbe (conjuguée), ou enfin elle touche la courbe dans un point d'inflexion, selon qu'on a

$$\left(\frac{d^2\psi}{drds}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{d^2\psi}{ds^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2\psi}{drds}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{d^2\psi}{ds^2} < 0, \quad \left(\frac{d^2\psi}{drds}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{d^2\psi}{ds^2} = 0.$$

Paris, 12 mars 1836.