JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la sommation d'une série

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 107-108.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__107_0>

Sur la sommation d'une série;

PAR J. LIOUVILLE.

En représentant par $X_0 + X_1 z +$ etc. ou par $\Sigma X_n z^n$ le développement de $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, on sait que $X_0 = 1$ et qu'en général X_n est une fonction entière de x de degré n : de plus, si m est différent de n, on a les deux formules connues

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Soit $\Psi(x)$ une fonction entière de x de degré n : $\Psi(x)$ peut toujours se mettre sous la forme $A_0 X_0 + \ldots + A_{n-1} X_{n-1} + A_n X_n$, $A_0 \ldots A_{n-1}$, A_n étant des constantes : cela est évident lorsque $\Psi(x)$ se réduit à une constante A_0, puisque dans ce cas $\Psi(x) = A_0 X_0$: il suffit donc de prouver que si le théorème énoncé est exact pour les fonctions de degré $(n-1)$, il aura lieu pour celles de degré n : or en prenant A_n tel que les coefficients de x^n soient égaux dans $\Psi(x)$ et dans $A_n X_n$, $\Psi(x) - A_n X_n$ n'étant plus de degré $(n-1)$, devient réductible à la forme $A_{n-1} X_{n-1} + \ldots + A_0 X_0$, d'où résulte $\Psi(x) = A_0 X_0 +$ etc. En particulier, on peut mettre sous la forme citée $A_0 X_0 + \ldots + A_n X_n$ une puissance quelconque x^n.

Maintenant soit proposé de trouver la valeur $F(x)$ de la série

$$(1) \qquad F(x) = \Sigma \left\{ \frac{2n+1}{2} \cdot X_n \cdot \int_{-1}^{+1} f(x) X_n dx \right\},$$

dans laquelle n est successivement $0, 1, 2, 3, \ldots$: la variable x

reste comprise entre -1 et $+1$, et $f(x)$ est une fonction arbitraire de x qui ne devient jamais infinie. Multiplions par $X_n dx$ et intégrons de $x=-1$ à $x=+1$ les deux membres de l'équation (1): cette intégration fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul, et l'on trouvera

$$\int_{-1}^{+1}[F(x)-f(x)]X_n dx = 0:$$

en multipliant l'intégrale précédente par une constante A_n, il vient

$$\int_{-1}^{+1}[F(x)-f(x)]A_n X_n dx = 0:$$

n étant quelconque dans cette équation, on en tire sans peine

$$\int_{-1}^{+1}[F(x)-f(x)]\,(A_0X_0+\ldots+A_nX_n)\,dx = 0,$$

et par conséquent

$$\int_{-1}^{+1}[F(x)-f(x)]\,x^n dx = 0,$$

d'ou par un lemme démontré (page 1 de ce volume), on conclut $F(x)=f(x)$, résultat auquel les géomètres sont arrivés depuis longtemps par d'autres méthodes moins simples ou moins rigoureuses que la nôtre. De plus, si l'on désigne par σ la somme des n premiers termes de la série (1), on peut prouver que la différence $f(x)-\sigma$ change de signe au moins n fois lorsque x croît de -1 à $+1$.