JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

IVORY

JACOBI

Sur le développement de $\left(1-2xz+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 105-106.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__105_0>

Sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$;

PAR MM. IVORY ET JACOBI.

On a souvent besoin de développer $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z, série dont le terme général peut être représenté par $X_n z^n$: y et z sont deux variables comprises entre -1 et $+1$. Or M. Ivory (dans les *Transactions philosophiques*) et ensuite M. Jacobi ont mis depuis long-temps la valeur de X_n sous cette forme très simple

$$(1) \qquad X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}\cdot\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

C'est dans le journal de M. Crelle (tome II, page 223) que se trouve le mémoire de M. Jacobi; mais comme cet excellent recueil est malheureusement peu répandu en France, nous pensons faire plaisir à nos lecteurs en transcrivant ici la démonstration de la formule (1).

D'après la formule de Lagrange, en résolvant l'équation..... $y-x=zF(y)$ par rapport à y, on a

$$y = x + zF(x) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^{n-1}.F(x)^n}{dx^{n-1}} + \ldots,$$

d'où résulte

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = 1 + z\frac{dF(x)}{dx} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^n.F(x)^n}{dx^n} + \ldots.$$

Appliquons la formule (2) au cas particulier où $F(y)=\frac{1}{2}(y^2-1)$: l'équation dont y dépend devient alors $y-x=\frac{z}{2}(y^2-1)$, et l'on

en déduit $1 - zy = \sqrt{1 - 2xz + z^2}$, puis $\frac{dy}{dx} = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$;
en vertu de la formule (2), on a donc

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2}\cdot\frac{d.(x^2 - 1)}{dx} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n.2^n}\cdot\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} + \ldots$$

et par conséquent

$$X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}\cdot\frac{d^n.(x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

C. Q. F. D.

Au reste, la formule (1) étant donnée, on peut en démontrer l'exactitude de plusieurs manières, et par exemple en faisant usage de la relation connue $nX_n - (2n - 1)xX_{n-1} + (n - 1)X_{n-2} = 0$.

D'après la forme de la fonction X_n, les intégrales.......... $\int X_n dx$, $\int dx \int X_n dx, \ldots \int^n X_n dx^n$, dans lesquelles on prend toujours -1 pour limite inférieure et x pour limite supérieure, s'évanouissent toutes si l'on pose après l'intégration $x = 1$. Cela étant, soit y une fonction de x telle que y et ses dérivées ne deviennent pas infinies lorsque x croît depuis -1 jusqu'à $+1$. En intégrant plusieurs fois par parties, on trouve

$$\int_{-1}^{-1} yX_n dx = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}\cdot\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n\cdot\frac{d^n y}{dx^n}\cdot dx$$

équation dont le second membre se réduit à zéro, lorsque y est un polynome entier de degré inférieur à n: si l'on fait en particulier $y = X_m$, m étant $< n$, on tombe sur la formule bien connue $\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0$: en posant $y = X_n$, on a au contraire...... $\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n + 1}$.