JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. LÉGER

Mémoire sur les rapports et les restes des quantités incommensurables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 93-101.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__93_0>

MÉMOIRE

Sur les rapports et les restes des quantités incommensurables;

PAR E. LÉGER,

Ancien élève de l'École Polytechnique, chef d'institution à Montmorency.

1. Étant données deux quantités quelconques homogènes, deux lignes droites par exemple, on sait que pour trouver leur plus grande commune mesure, il faut d'abord porter la plus petite de ces quantités dans la plus grande, ce qui donne un quotient entier et un reste; puis ce reste dans la plus petite, ce qui donne encore un quotient et un deuxième reste; puis ce deuxième reste dans le premier, et ainsi de suite. Si l'on parvient à un reste nul, les deux quantités sont commensurables entre elles, et le dernier reste est leur plus grande commune mesure. Mais il peut arriver que l'on ne tombe jamais sur un reste nul, quelque loin que l'on continue l'opération; alors les deux quantités sont dites incommensurables entre elles.

2. Cela posé, soient a et b les deux quantités dont il s'agit, q, q_1, q_2, etc., les quotients successifs, r, r_1, r_2, etc., les restes correspondants; on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a = bq + r, \\ b = rq_1 + r_1, \\ r = r_1q_2 + r_2, \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, \\ \text{etc.}; \end{array}\right.$$

on en déduit

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}},$$

$$\frac{b}{r} = q_1 + \frac{r_1}{r} = q_1 + \frac{1}{\frac{r}{r_1}},$$

$$\frac{r}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},$$

etc.;

d'où

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \text{etc.}}}}$$

Si les quantités a et b sont commensurables entre elles, cette fraction continue sera limitée. Dans le cas contraire elle sera indéfinie. Le rapport numérique entre a et b sera exprimé dans le premier cas par la réduite finale correspondante au dernier quotient; dans le deuxième cas, il ne sera pas exprimable exactement, mais les réduites successives de la fraction continue en donneront des valeurs indéfiniment approchées

3. Si deux autres quantités a' et b' homogènes, conduisent aux mêmes quotients q, q_1, q_2,..... que les quantités a et b, le nombre de ces quotients étant d'ailleurs fini ou infini, le rapport numérique de a' et b' sera égal au rapport numérique de a et b, et l'on aura la proportion $a : b :: a' : b'$.

C'est en s'appuyant sur ce principe dû, je crois, à Arbogast, que M. Vincent établit fort simplement plusieurs propriétés fondamentales de la géométrie: 1°. la proportionnalité des angles aux arcs décrits de leurs sommets comme centre avec un même rayon; 2°. la proportionnalité des rectangles à leurs bases, quand les hauteurs sont égales, etc., propositions qui exigeaient un tour particulier de raisonnement pour passer du commensurable à l'incommensurable, et qui n'étaient pas à l'abri d'objections fondées, comme l'ont judicieusement observé MM. Lefébure de Fourcy et Vincent.

4. Mais notre but n'est pas d'insister sur l'avantage de ce nouveau mode d'établir la proportionnalité entre les quantités géométriques, parce que nous le croyons généralement apprécié aujourd'hui. Nous avons dessein de fixer ici l'attention sur une belle propriété de la série des restes r, r_1, r_2, etc., et d'abord nous établirons ce théorème fondamental.

La somme des restes r, r₁, r₂, *etc., indéfiniment décroissants qu'on obtient en soumettant deux quantités homogènes incommensurables* a *et* b *à l'opération de la recherche de la plus grande commune mesure admet toujours une limite finie.*

En effet, ajoutant la suite indéfinie des égalités (1), il vient

$$a + b = bq + rq_1 + r_1q_2 + r_2q_3 + \text{etc.},$$

ou

$$(2) \qquad a - b(q-1) = rq_1 + r_1q_2 + r_2q_3 + \text{etc.}$$

Or, q_1, q_2, q_3, etc., ne sont jamais < 1, donc la somme $r + r_1 + r_2 + r_3 +$ etc., n'est jamais $> rq_1 + r_1q_2 +$ etc., ou $> a - b(q-1)$: donc, etc.

4. Maintenant on sait (*Théorie des nombres* de Legendre, 1^re partie, § V) que les racines quarrées des nombres non quarrés s'expriment par des fractions continues périodiques que l'on détermine facilement dans chaque cas particulier par une méthode connue. Cette propriété va nous servir à trouver la limite de la somme des restes r, r_1, r_2, r_3, etc., quand le rapport des quantités a et b est exprimé par $\sqrt{m} : 1$; m étant un nombre entier quelconque.

Soit d'abord $m = 2$, et faisons $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, on aura

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Donc ici $\qquad q = 1, \quad q_1 = q_2 = q_3 = \text{etc.} = 2.$

Donc l'égalité (2) donne

$$\sqrt{2} = 2\,(r + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.});$$

d'où $$r + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

De là ce théorème élégant :

Dans la recherche de la plus grande commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré, la limite de la somme des restes est égale à la demi-diagonale du quarré.

5. Qu'il me soit permis de m'arrêter un instant sur ce premier cas, à cause de sa célébrité, et parce qu'il m'a conduit aux présentes recherches. Je crois d'abord que l'incommensurabilité de la diagonale et du côté peut être prouvée avec plus de rigueur qu'on ne le fait d'ordinaire.

Soit d la diagonale et c le côté; il est clair que d est $> c$, mais $< 2c$, donc en divisant d par c, le quotient sera 1, et si l'on nomme r le reste, on aura

$$d = c + r.$$

Ensuite si l'on porte r dans c, on verra aisément encore que r y est contenu deux fois avec un reste r_1; mais, pour ne rien supposer gratuitement, désignons par q_1 le quotient et par r_1 le reste. En portant de même r_1 dans r, soit q_2 le quotient et r_2 le reste, et ainsi de suite : on aura

$$(3)\quad \begin{cases} d = c + r, \\ c = rq_1 + r_1, \\ r = r_1q_2 + r_2, \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Il s'agit de prouver rigoureusement qu'aucun des restes r_1, r_2, r_3, etc., n'est nul, ensorte que le nombre des égalités précédentes est indéfini. A cet effet, supposons que d'une extrémité de la diagonale on décrive un cercle avec un rayon égal au côté, et que l'on prolonge la diagonale jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau le cercle, le côté c du quarré sera moyen proportionnel entre la sécante entière $2c+r$ et la partie extérieure r; donc on aura

$$\frac{2c+r}{c} = \frac{c}{r},$$

ou
$$\frac{c}{r} = 2 + \frac{r}{c};$$

mais des égalités (3), on tire

$$\frac{c}{r} = q_1 + \frac{r_1}{r};$$

donc
$$q_1 + \frac{r_1}{r} = 2 + \frac{r}{c}.$$

Or, quand un entier plus une fraction < 1 est égal à un entier plus une fraction < 1, l'entier doit être égal à l'entier et la fraction à la fraction; donc on doit avoir

$$q_1 = 2 \text{ et } \frac{r_1}{r} = \frac{r}{c}.$$

Donc r_1 n'est pas nul.

Ensuite, en renversant les fractions, on a

$$\frac{r}{r_1} = \frac{c}{r} = 2 + \frac{r}{c};$$

mais les égalités (3) donnent

$$\frac{r}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1};$$

donc on a encore

$$q_2 + \frac{r_2}{r_1} = 2 + \frac{r}{c},$$

et par conséquent

$$q_2 = 2 \text{ et } \frac{r_2}{r_1} = \frac{r}{c}.$$

Et l'on voit que r_2 n'est pas nul. En continuant ainsi, on prouvera que les quotients q_1, q_2, q_3, etc., sont égaux à 2, et qu'aucun des restes r, r_1, r_2, r_3, etc., ne peut être nul. Donc la diagonale est incommensurable avec le côté.

Il est clair aussi que les restes r, r_1, r_2, r_3, etc., forment une progression géométrique décroissante indéfinie, dont la limite est, comme on sait, égale au premier terme divisé par l'unité moins la raison;

donc la limite de la somme des restes est

$$\frac{r}{1-\frac{r}{c}} = \frac{cr}{c-r};$$

or l'inspection de la figure prouve que l'on a

$$c - r : c :: r : \frac{1}{2} d,$$

donc la limite est la demi-diagonale; ce qui s'accorde avec ce que l'on a vu

Supposons maintenant $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, on a

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.};}}}}}$$

donc ici $q = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, etc.,

et

$$\begin{aligned} a &= b + r, \\ b &= r + r_1, \\ r &= 2r_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2 + r_3, \\ r_2 &= 2r_3 + r_4, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Multipliant par 2 les 2^e, 4^e, 6^e, etc., de ces égalités, et ajoutant, on a

$$a + b = 2\,(r + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.}):$$

donc $$r + r_1 + r_2 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{3} + 1).$$

7. Pour $a = \sqrt{5}$, $b = 1$, on trouve

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.};}}}$$

ce qui donne aisément pour limite de la somme des restes $\frac{1}{4}\,(\sqrt{5} - 1)$.

Pour $a = \sqrt{6}$, $b = 1$, on trouve la limite $= \frac{1}{4}\sqrt{6}$.

8. Si $a = \sqrt{7}$, $b = 1$, la recherche de la limite est plus difficile, parce que la fraction continue présente une période de quatre termes. En effet, on a

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

Voici comment M. Terquem détermine dans ce cas la somme des restes. La méthode est générale et convient aux périodes composées d'un nombre quelconque de termes.

Soit

$$\begin{array}{rcl}
a &=& bq + r, \\ \hline
b &=& rq_1 + r_1, \\
r &=& r_1q_2 + r_2, \\
r_1 &=& r_2q_3 + r_3, \\
r_2 &=& r_3q_4 + r_4, \\ \hline
r_3 &=& r_4q_1 + r_5, \\
r_4 &=& r_5q_2 + r_6, \\
r_5 &=& r_6q_3 + r_7, \\
r_6 &=& r_6q_4 + r_8, \\ \hline
\ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Faisons

$$\begin{array}{l}
r + r_4 + r_8 + r_{12} + \text{etc.} = x, \\
r_1 + r_5 + r_9 + r_{13} + \text{etc.} = y, \\
r_2 + r_6 + r_{10} + r_{14} + \text{etc.} = z, \\
r_3 + r_7 + r_{11} + r_{15} + \text{etc.} = u.
\end{array}$$

La première des égalités donne $r = a - bq$.
Partageons les autres en groupes de quatre, et ajoutons successivement les 1$^{\text{res}}$, 2$^{\text{mes}}$, 3$^{\text{mes}}$, 4$^{\text{mes}}$ égalités de chaque groupe. Il vient

$$\begin{aligned} b + u &= q_1 x + y, \\ x &= q_2 y + z, \\ y &= q_3 z + u, \\ z &= q_4 u + x - r; \end{aligned}$$

de ces quatre équations du premier degré, on tire les valeurs de x, y, z, et u, et en les ajoutant on obtient

$$x+y+z+u=\frac{r(2q_1+2q_3-q_1q_2+q_2q_3+q_1q_2q_3)+b(2q_2+2q_4-q_2q_3+q_3q_4+q_2q_3q_4)}{(q_1+q_3)(q_2+q_4)+q_1q_2q_3q_4};$$

pour $a=\sqrt{7}$, $b=1$, on a $r=\sqrt{7}-2$, $q_1=q_2=q_3=1$, $q_4=4$; la limite cherchée est

$$x+y+z+u=\frac{5r+17}{14}=\frac{5\sqrt{7}+7}{14}.$$

Si la période était de cinq termes, on partagerait les égalités par groupes de cinq, et ainsi de suite. Le procédé convient donc à tous les cas.

Observons que de la formule qui convient à une période de n termes, on peut tirer celles qui conviennent aux périodes dont le nombre des termes est diviseur de n. Ainsi, de la formule pour les périodes de quatre termes, on déduit celle pour les périodes de 1 terme, en posant $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$; on a alors $x+y+z+u=\frac{r+b}{q_1}$; par exemple pour $a=\sqrt{2}$, $b=1$, on a $r=\sqrt{2}-1$, $q_1=2$, donc la limite $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Pour les périodes de deux termes on fait $q_1=q_3$, $q_2=q_4$, et il vient

$$x+y+z+u=\frac{rq_1+bq_2}{q_1q_2}.$$

Pour $a=\sqrt{3}$, $b=1$, on a $r=\sqrt{3}-1$, $q_1=1$, $q_2=2$; donc la limite $=\frac{(\sqrt{3}-1)+2}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; et ainsi de suite.

NOTE 1. La recherche du n° 3 peut être encore présentée d'une autre manière très simple et très rigoureuse, que voici :

Portant c sur d, on a un reste r, sur lequel je construis un quarré; il est facile de voir que le côté c sera égal à la diagonale d_1 de ce quarré, plus r. On aura donc $d = c + r$, $c = r + d_1$; maintenant, si l'on porte le côté r sur la diagonale d_1, on aura comme ci-dessus $d_1 = r + r_1$, $r = r_1 + d_2$; ensuite $d_2 = r_1 + r_2$, $r_1 = r_2 + d_3$; on en tire

$$\frac{d}{c} = 1 + \frac{r}{c}, \quad \frac{c}{r} = 1 + \frac{d_1}{r},$$

$$\frac{r}{r_1} = 1 + \frac{d_2}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_2} = 1 + \frac{d_3}{r}, \text{ etc.}$$

Or le rapport de chaque diagonale à son côté est constant; donc on a

$$\frac{d}{c} = \frac{d_1}{r} = \frac{d_2}{r_1} = \frac{d_3}{r_2} = \text{etc.};$$

d'où il suit que $\quad \frac{c}{r} = \frac{r}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \text{etc.}$

Donc les restes successifs sont en proportion géométrique décroissante, etc.

Note II. On trouve dans Kepler (*Harmoniæ mundi*, p. 10, édit de 1649) un point de philologie mathématique qui éclaircit une expression de sens assez louche. Les Grecs distinguaient deux sortes de rapports : les uns exprimables, *effables*, λογοι; les autres non exprimables, *ineffables*, αλογοι. Or, le mot λογος a deux acceptions : PAROLE (*verbum*), et RAISON (*ratio*). Au lieu de prendre la première, les Latins, en traduisant, ont pris la deuxième; de là le rapport *rationnel* et le rapport *irrationnel*, ce qui n'a pas de sens; tandis que l'expression exacte est rapport *exprimable* ou rapport *inexprimable*. Cette observation de Kepler est d'une grande justesse. (*Note de M. Terquem.*)