# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



G. LAMÉ


**Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 1 (1836), p. 77-87.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__77_0>

# NOTE

*Sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique;*

**Par G. LAMÉ,**

Professeur de Physique à l'École Polytechnique.

La théorie analytique de la chaleur paraît avoir peu contribué aux progrès de la physique proprement dite : bornée à la représentation mathématique de l'équilibre et de l'état variable des températures dans l'intérieur des corps solides homogènes, elle laisse complétement en dehors de ses formules la plupart des phénomènes calorifiques, ceux surtout dans lesquels la chaleur semble se produire et disparaître, et qu'il importe principalement d'étudier pour découvrir la cause primitive de cette classe d'effets physiques. Cependant, toute restreinte qu'elle soit, cette théorie est d'une grande importance.

Quand les lois physiques, déduites de l'expérience et de l'observation, auront acquis toute l'exactitude et toute la généralité qu'elles doivent comporter, il sera possible aux géomètres de représenter analytiquement chaque classe de phénomènes, par une ou plusieurs formules différentielles. Mais ces formules devront être intégrées, et il faudra déterminer les constantes ou les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, de manière à satisfaire aux conditions particulières de chaque problème, avant de pouvoir obtenir des résultats numériques vérifiables par l'expérience, et par suite des formules intégrales immédiatement applicables à la pratique.

Avant que ce but puisse être atteint, la physique expérimentale et l'analyse mathématique ont de nouveaux progrès à faire. Les recherches des physiciens et celles des géomètres convergent actuellement vers ce travail général; de part et d'autre se perfectionnent les instruments et les procédés dont il faudra faire usage pour le terminer.

Or la théorie analytique de la chaleur aura été éminemment utile à ces études préliminaires, en présentant un des exemples les plus parfaits et les plus simples de l'application du calcul à un certain ensemble de faits. Ses formules différentielles sont très peu compliquées, et les questions qu'elle se propose passent par toutes les phases du problème général qui vient d'être énoncé comme constituant à lui seul presque toute la physique mathématique.

Il s'agit toujours de représenter numériquement un phénomène physique pour des corps de forme particulière et dans des circonstances connues, c'est-à-dire d'intégrer certaines équations aux différences partielles, de telle sorte que les fonctions arbitraires provenant des intégrations satisfassent à des conditions données. Tout porte à croire que l'on ne parviendra à résoudre généralement des questions de cette nature, qu'après avoir obtenu un grand nombre de solutions complètes de questions particulières du même ordre; et c'est là ce qui donne une valeur pratique aux recherches ayant pour objet de représenter analytiquement l'équilibre et le mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps solide homogène de forme définie.

Les géomètres ont complétement traité sous ce point de vue la sphère, le cylindre droit à base circulaire, le parallélépipède rectangle, le prisme triangulaire régulier : on sait maintenant exprimer la loi des températures dans des corps terminés par des surfaces du second degré. Le nombre de ces solutions est sans doute très limité; mais leur comparaison indique irrévocablement la marche uniforme que l'on doit suivre pour exprimer l'état calorifique de tout autre corps solide : la difficulté principale consiste à découvrir le système unique de coordonnées qui convient à la forme de ce solide et à la question physique proposée.

C'est cette difficulté que j'ai essayé de lever dans un Mémoire sur les surfaces isothermes (imprimé parmi les *Mémoires de l'Académie des Sciences, tome* V *des Savants étrangers*), où j'ai considéré spécialement le système de coordonnées dont on doit faire usage pour découvrir les lois de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, dans l'intérieur des corps et des enveloppes solides, limitées par des surfaces du second degré exposées à des foyers constants. J'ai repris la même question sous un point de vue plus général, dans un Mémoire sur les surfaces orthogonales conjuguées, qui fait partie d'un travail relatif aux lois de l'équilibre de l'éther (inséré dans le *Journal de l'École polytechnique*, XXIII^e^ Cahier).

J'ai prouvé dans ce dernier Mémoire qu'il existe une infinité de corps et d'enveloppes cylindriques, où la loi des températures peut être exprimée avec la même facilité que dans le cylindre de la géométrie élémentaire. Je me propose de donner, dans cette note, quelques nouveaux détails sur ces nouvelles formes; leur nombre infini laisse entrevoir la possibilité de représenter algébriquement l'état calorifique d'un corps limité par des surfaces cylindriques quelconques, et d'arriver ainsi à la connaissance complète du phénomène de la communication de la chaleur à travers les milieux solides, lorsqu'elle se propage dans deux dimensions seulement. Il y a lieu de croire qu'il existe pour les trois dimensions des formules tout aussi générales, et que l'analyse mathématique parviendra un jour à exprimer en nombres le fait physique dont il s'agit pour un corps de forme quelconque. Cela sera sans contredit un progrès important, car on en déduira la marche à suivre pour obtenir des solutions aussi complètes dans des phénomènes plus compliqués et pouvant donner lieu à des applications immédiates, tels que ceux de l'élasticité et de l'équilibre intérieur des corps solides.

Considérons un tube solide indéfini, dont les parois cylindriques extérieure et intérieure soient en contact avec deux foyers ayant des températures constantes, mais différentes de l'une à l'autre paroi. Lorsque l'équilibre de chaleur est établi dans ce genre d'enveloppe, les surfaces isothermes ou d'égale température sont toutes cylindriques. Si par un point d'une de ces surfaces on imagine trois éléments plans orthogonaux, desquels le premier lui soit tangent, et les deux autres normaux, l'un suivant l'arète correspondante, et le dernier perpendiculairement à cette même arète, il n'y aura évidemment perte ou flux de chaleur qu'à travers le premier élément; en sorte que la chaleur se dissipera à travers l'enveloppe vers le foyer le plus froid, en suivant des courbes normales à toutes les surfaces isothermes, et que l'on peut appeler par cette raison *filets de chaleur.* Tous ces filets peuvent être considérés comme répartis sur des surfaces cylindriques, coupant normalement les cylindres isothermes suivant leurs arètes.

Ces deux systèmes de cylindres sont *conjugués,* en ce sens qu'ils pourraient changer de rôle; c'est-à-dire que dans un nouveau tube solide ayant pour parois entretenues à deux températures constantes, deux des cylindres formés par les filets du premier tube, le flux de chaleur s'opérerait suivant les sections transversales des premières surfaces isothermes. Mais il importe surtout de remarquer que pour exprimer généralement l'état calorifique d'un des tubes précédents, lorsque les foyers, toujours constants, varient cependant d'intensité d'une arète à l'autre des parois, il faut prendre pour surfaces coordonnées les deux systèmes de cylindres conjugués qui viennent d'être définis, et les plans perpendiculaires à leurs arètes; c'est-à-dire que les paramètres de ces trois genres de surfaces sont les coordonnées propres à la question physique, dans le cas dont il s'agit.

Pour que les cylindres conjugués puissent conduire à cette solution générale, il faut avant tout que leurs paramètres, considérés comme des fonctions de $x$, $y$, $z$, satisfassent à trois équations aux différences partielles exprimant que ces surfaces sont isothermes et orthogonales. Si l'axe des $z$ est parallèle aux arètes, les paramètres $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$ des deux systèmes de cylindres seront donnés par des équations de la forme $\varepsilon = f(x, y)$, $\varepsilon_1 = f_1(x, y)$, et les trois relations différentielles dont nous parlons pourront toujours être ramenées aux suivantes :

$$(1)\quad \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\varepsilon_1}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon_1}{dy^2} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\varepsilon_1}{dy} = 0.$$

J'ai démontré dans le Mémoire cité (*Journal de l'École Polytech-*

*nique*, XXIII$^e$ Cahier) que les paramètres différentiels du premier ordre

$$(2) \qquad n = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2}, \quad n_1 = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon_1}{dy}\right)^2},$$

des fonctions $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, satisfaisant aux équations (1), sont toujours égaux à la même fonction $\psi(x, y)$, multipliée par deux constantes $a$, $a_1$, en sorte que l'on peut poser

$$(3) \qquad n = a\psi, \quad n_1 = a_1\psi.$$

Cela posé, considérons l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$

qui appartient à l'équilibre de chaleur d'un corps solide indéfini de forme cylindrique, dont les parois sont entretenues à des températures constantes, les mêmes sur chaque arète, mais différentes en général d'un arète à l'autre. La fonction V, qui exprime la température variable, étant rapportée aux coordonnées $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, l'équation précédente devient [en ayant égard aux équations (1), (2), (3)] $a^2\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + a_1^2\frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2} = 0$; ou bien (en posant $\varepsilon = a\xi$, $\varepsilon_1 = a_1\xi_1$) $\frac{d^2V}{d\xi^2} + \frac{d^2V}{d\xi_1^2} = 0$. C'est cette dernière équation qu'il faut intégrer, de telle manière que V se réduise à des fonctions données de $\xi$ ou $\xi_1$, pour des valeurs particulières de $\xi_1$ ou de $\xi$.

Or ce problème analytique est aujourd'hui résolu de la manière la plus complète; la loi des températures du corps cylindrique proposé s'obtiendra donc aussi facilement que dans le cas du prisme rectangulaire, et par les mêmes formules. Ainsi l'on saura exprimer algébriquement l'état calorifique d'un tube ou d'une enveloppe ayant pour parois deux cylindres $\varepsilon$ ou $\varepsilon_1$, et même celui d'un corps prismatique dont les quatre faces latérales courbes seront deux cylindres $\varepsilon$ et deux cylindres $\varepsilon_1$, pourvu que les foyers constants possèdent la même température sur chaque arète d'une paroi.

Ces problèmes de physique mathématique ne présentent donc plus d'autre difficulté que celle de la recherche des fonctions $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$ qui puissent vérifier les équations (1). Parmi les surfaces cylindriques qui remplissent ces conditions, nous considérerons d'abord celles comprises dans le groupe suivant

$$(5)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \Sigma A \log \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}, \\ \varepsilon_1 = \Sigma A \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right), \end{cases}$$

$\alpha$ et $\beta$ étant les coordonnées d'une ligne fixe parallèle aux $z$, A un coefficient constant; $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$ étant composés d'autant de termes semblables que l'on voudra, qui différeront par les constantes $\alpha$, $\beta$, A. Ces équations donnent

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d\varepsilon_1}{dy} = \Sigma A \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$
$$\frac{d\varepsilon}{dy} = -\frac{d\varepsilon_1}{dx} = \Sigma A \frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2};$$

d'où il est facile de conclure que les relations différentielles (1) sont satisfaites.

Pour simplifier, on peut ne considérer que l'état calorifique des différents points d'une section plane, normale aux arètes du corps cylindrique, puisque dans le cas actuel tout reste identique d'une section à l'autre. Sous ce point de vue, $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$ (5) seront les paramètres de deux systèmes de courbes isothermes, conjuguées et orthogonales.

Le cas le plus simple, compris dans les formules générales (5), est celui où les seconds membres ne contiendraient qu'un terme. On peut alors supposer $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et prendre

$$(6)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}, \\ \varepsilon_1 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right): \end{cases}$$

d'où $\qquad x^2 + y^2 = c^2e^{2\varepsilon},\quad y = x \operatorname{tang} \varepsilon_1, \qquad$ et enfin

$$y = ce^{\varepsilon} \sin \varepsilon_1, \qquad x = ce^{\varepsilon} \cos \varepsilon_1.$$

C'est le cas d'un tube ou d'une enveloppe solide dont les parois sont des cylindres à bases circulaires concentriques; les cylindres formés par les filets de chaleur sont alors des plans méridiens. On est ainsi conduit aux coordonnées semi-polaires employées depuis long-temps pour exprimer l'état calorifique de cette forme de corps.

Toutefois, au lieu du rayon $r$ que l'on adopte ordinairement, il est préférable de prendre pour paramètre des surfaces cylindriques $\varepsilon = \log \frac{r}{c}$, ou le logarithme de son rapport à une ligne constante $c$. De cette manière les formules différentielles et intégrales, pour la forme considérée, deviennent identiquement les mêmes que celles qui correspondent au cas du prisme indéfini à base rectangle; il suffira d'y remplacer les coordonnées $x, y$, par $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ (6).

Outre le tube cylindrique à bases circulaires concentriques, ce genre de coordonnées (6) embrasse aussi le cas d'un solide compris entre deux plans méridiens formant entre eux un angle quelconque; et plus généralement celui d'un voussoir, indéfini dans le sens des arètes, dont l'intrados, l'extrados et les faces de joint seraient entretenus à des températures constantes, variant d'ailleurs d'une manière quelconque d'une arète à l'autre de ces surfaces; les lois de l'équilibre de chaleur peuvent être facilement exprimées par des formules analytiques dans ces diverses circonstances.

Les formules (5), en attribuant à leurs seconds à deux termes seulement, comprennent un grand nombre de systèmes différents de courbes orthogonales. Le plus simple est celui pour lequel le coefficient A a la même valeur, mais un signe différent d'un terme à l'autre. Si l'on prend pour origine des coordonnées $x, y$, le milieu de la droite qui joint les points fixes $(\alpha, \beta)$, $(\alpha', \beta')$, et si la grandeur de cette droite est représentée par $2c$, on pourra poser dans le cas dont il s'agit

$$(7) \quad \begin{cases} \varepsilon = \log \sqrt{\dfrac{(x+c)^2+y^2}{(x-c)^2+y^2}}, \\ \varepsilon_1 = \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{y}{x-c}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{y}{x+c}\right), \end{cases}$$

ou bien, en développant

$$\left(x - c\,\frac{e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}}{e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon}}\right)^2 + y^2 = \frac{4c^2}{(e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon})^2},$$

$$x^2 + \left(y - \frac{c}{\text{tang}\,\varepsilon_1}\right)^2 = \frac{c^2}{\sin^2\varepsilon_1}.$$

Les courbes $\varepsilon$ sont des cercles; sur chacune d'elles les rayons vecteurs aux deux points fixes sont dans un rapport constant. Les courbes $\varepsilon_1$ sont encore des cercles, et représentent des segments capables construits sur la ligne $2c$. Il est curieux que les deux seuls lieux géométriques offerts par la géométrie élémentaire se trouvent ici réunis, de manière à jouer un rôle également important dans un même problème de physique mathématique.

Les cercles $\varepsilon$ ne peuvent se couper, ils sont tous excentriques, et le lieu de leurs centres est la droite qui passe par les deux points fixes; les cercles $\varepsilon_1$ se coupent tous au contraire en ces deux points. Dans ce système, deux cercles $\varepsilon$ ou $\varepsilon_1$ étant tracés, on peut construire, par des procédés géométriques trop simples pour que nous devions nous y arrêter, tout autre cercle $\varepsilon$ ou $\varepsilon_1$ dont le paramètre sera connu. Il sera facile, d'après cela, de représenter analytiquement et même géométriquement l'état calorifique de plusieurs corps solides.

Considérons, par exemple, une enveloppe solide dont les surfaces extérieure et intérieure soient des cylindres à bases circulaires, mais excentriques, c'est-à-dire considérons un tube indéfini qui n'ait pas la même épaisseur sur tout son contour. Si les parois sont entretenues à deux températures différentes, les surfaces isothermes sont toutes des cylindres à bases circulaires, parallèles mais excentriques à ces parois; les filets de chaleur sont des cercles, et il est facile de trouver le cylindre correspondant à une température donnée.

Considérons encore une masse solide indéfinie, traversée par deux puits cylindriques dont les axes parallèles se trouvent à une distance plus grande que la somme de leurs rayons. Si ces puits sont des foyers constants, la loi des températures de la masse solide est facile à définir; les surfaces isothermes sont toutes des cylindres circulaires excentriques, la chaleur se dissipe d'un puits à l'autre en suivant des filets circulaires. Ces cylindres et ces filets peuvent être déterminés par des constructions géométriques très simples.

Si les parois du tube ou des puits précédents sont entretenues à des températures constantes, mais variables d'une arête à l'autre, l'état calorifique de l'enveloppe ou de la masse solide est plus compliqué; mais il peut s'exprimer analytiquement par les formules du prisme rectangulaire, qui résolvent aussi le cas d'un corps prismatique dont les quatre faces latérales courbes feraient partie de deux cylindres $\varepsilon$ et de deux cylindres $\varepsilon_1$ compris dans les formules (7).

En exprimant les arcs des cercles orthogonaux conjugués (7) en fonction des deux paramètres $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$, on parvient à trouver directement, par de simples considérations géométriques, les valeurs d'une certaine classe d'intégrales définies très connues des géomètres. Ce genre de démonstration est curieux en ce qu'il permet de suivre, pour ainsi dire à l'œil, les variations de ces intégrales; mais pour ne pas trop m'éloigner du but que je me suis proposé, je m'abstiendrai d'entrer dans ces détails.

Les formules (5), dans le cas de deux points fixes seulement, comprennent encore le cas où le coefficient A a la même valeur et le même signe pour les deux termes. En adoptant la même notation que dans le cas précédent, on peut alors poser

$$(8)\quad \begin{cases} \varepsilon = \log \dfrac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{a^2}, \\ \varepsilon_1 = \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{y}{x-c}\right) + \text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{y}{x+c}\right), \end{cases}$$

$a$ étant une ligne constante. Ces équations donnent

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4e^{2\varepsilon};$$

$$y^2 - x^2 + \frac{2}{\text{tang}\,\varepsilon_1}\,xy + c^2 = 0.$$

Chaque courbe $\varepsilon$ est telle que le produit des rayons vecteurs aux points fixes est constant; chaque courbe $\varepsilon_1$ est une hyperbole. Toutes les hyperboles $\varepsilon_1$ coupent normalement les lieux géométriques du quatrième ordre au paramètre $\varepsilon$.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir la grande variété de corps cylindriques compris dans les équations (5), et dont l'état calorifique peut être exprimé par les séries intégrales trouvées pour le prisme rectangulaire indéfini. Il existe cependant des formules encore plus générales. Si l'on développe une fonction imaginaire de la forme $F(x+y\sqrt{-1})$, de manière à séparer la partie réelle P de la partie imaginaire $Q\sqrt{-1}$, P et Q étant deux fonctions réelles de $x$ et de $y$.

on aura $F(x+y\sqrt{-1}) = P+Q\sqrt{-1}$, et l'identité $\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx}\sqrt{-1}$, donnant

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\sqrt{-1} = -\frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dx}\sqrt{-1},$$

on en conclut que

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{}{dy} = -\frac{dQ}{dx};$$

d'où il est aisé de voir qu'en posant $\varepsilon = P$, $\varepsilon_1 = Q$, les équations différentielles (1) seront satisfaites.

Ainsi une fonction quelconque $F(x+y\sqrt{-1})$ fournit un système de surfaces cylindriques orthogonales et conjuguées. Considérons, par exemple, la fonction $(x+y\sqrt{-1})^m$, qui devient (en posant... $\sqrt{x^2+y^2} = r, \frac{y}{x} = \text{tang}\,\varphi$) $(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi)r^m$; on pourra prendre en coordonnées semi-polaires

$$(9) \qquad \begin{cases} \varepsilon = r^m \cos m\varphi, \\ \varepsilon_1 = r^m \sin m\varphi; \end{cases}$$

quel que soit d'ailleurs l'exposant $m$.

Si l'on a $m = \frac{\pi}{\alpha}$, $\alpha$ étant l'angle formé par deux plans méridiens, le paramètre $\varepsilon_1$ est nul pour les deux plans $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, qui dans leur ensemble constituent une des surfaces isothermes $\varepsilon_1$, celle où la température serait zéro; les autres surfaces isothermes $\varepsilon_1$ sont des cylindres asymptotiques à ces plans, ayant pour bases des courbes à branches indéfinies comme l'hyperbole; les filets de chaleur composent des cylindres de même forme, aux paramètres $\varepsilon = r^m \cos m\varphi$.

Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les courbes isothermes et les filets de chaleur deviennent des hyperboles équilatères. Ainsi l'on peut exprimer la loi des températures dans un solide indéfini, terminé d'un côté par deux plans formant un angle droit, et de l'autre par un cylindre hyperbolique, asymptotique à ces plans, lorsque les parois planes et la paroi courbe sont soumises à des foyers variables d'une arète à l'autre de ces parois.

Plus généralement, toute fonction $F(\alpha)$ développable suivant les puissances de la variable $\alpha$, donnant $F(\alpha) = \Sigma A\alpha^m$, on a

$$F(x+y\sqrt{-1}) = \Sigma A r^m (\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi),$$

et l'on en déduit les formules

$$(10) \qquad \begin{cases} \varepsilon = \Sigma A r^m \cos m\varphi, \\ \varepsilon_1 = \Sigma A r^m \sin m\varphi, \end{cases}$$

pour représenter les paramètres d'une infinité de surfaces cylindriques, orthogonales et conjuguées. On pourra donc calculer numériquement les températures d'un corps terminé par des surfaces cylindriques appartenant à chacun de ces systèmes. Ce seront toujours les séries intégrales du prisme rectangulaire indéfini qu'il faudra employer pour cela, en donnant des valeurs convenables aux variables qu'elles comprennent.

Il m'a paru important, pour la physique mathématique, de signaler la généralisation que comporte la solution d'un des problèmes qui constituent la théorie analytique de la chaleur. On parviendra sans doute à trouver des solutions tout aussi générales pour les cas plus compliqués de cette théorie.