JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

VINCENT

Note sur la résolution des Équations numériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 341-372.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__341_0>

NOTE

Sur la résolution des Équations numériques ;

Par M. VINCENT (*).

1. Dans une note qui m'est commune avec M. *Bourdon*, et qui fait partie de la *sixième édition* de son *Algèbre*, il a été démontré que *Si dans une équation numérique rationnelle en* x *dépourvue de racines égales, on fait successivement, et conformément au procédé de Lagrange,*

$$x = a + \frac{1}{x'},\quad x' = b + \frac{1}{x''},\quad x' = c + \frac{1}{x'''}\ldots\ldots,$$

on parvient toujours par la suite des transformations, et quels que soient d'ailleurs les nombres a, b, c... [supposés toutefois positifs et > 1], *à une équation transformée qui se trouve dans l'un de ces deux cas : ou de ne plus avoir que des permanences, ou de ne plus offrir qu'*UNE *variation ;* dans ce second cas, l'équation en x a une racine réelle positive représentée par la fraction continue

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}},$$

et n'en a qu'une seule de cette valeur; le premier cas, au contraire, arrive toutes les fois que l'équation n'a aucune racine susceptible de l'expression indiquée.

Non-seulement cette propriété des équations numériques, pro-

(*) Cette Note a déjà été publiée dans les *Mémoires de la Société royale de Lille* (année 1834) : dans l'intérêt des professeurs, nous avons cru devoir la réimprimer ici, avec quelques additions que l'auteur y a faites depuis. J. L.

priété exclusivement inhérente à la réduction de leurs racines réelles en fractions continues, est tout-à-fait suffisante, ainsi qu'on peut le voir, pour conduire à la séparation de ces racines, comme naturellement, c'est-à-dire sans que l'on soit obligé de déterminer *à priori* leur quotité ou de leur assigner des limites (*), et pourvu seulement qu'afin de s'épargner une infinité d'essais inutiles, on se laisse diriger dans le choix des nombres a, b, c,.... par le théorème de M. *Budan* (**);

(*) Qui ne connaît aujourd'hui le beau théorème découvert par M. *Sturm* sur les limites des racines?.... Bien que la méthode de résolution proposée dans ce qui va suivre, en soit absolument indépendante, toute complète et rigoureuse qu'elle nous paraisse, le théorème de M. *Sturm* n'en est pas moins d'une extrême importance à nos yeux, pour la facilité avec laquelle il permet de reconnaître *à priori* le nombre et les limites des racines réelles; et sous ce rapport il offrira toujours un puissant auxiliaire à toutes les méthodes de résolution, quelques avantages qu'elles puissent d'ailleurs présenter. Il ne faut pas perdre de vue, au surplus, que l'emploi du procédé de M. *Sturm* se trouve tout préparé par les opérations nécessaires à la séparation préalable des racines égales.

(**) Ce théorème peut être énoncé comme il suit :

Si, dans une équation en x *que nous représenterons par* $f(x) = 0$, *on fait alternativement* $x = p + x'$, $x = q + x''$, p *et* q *étant deux nombres réels de signes quelconques, et tels que l'on ait* $p < q$ [c'est-à-dire que p soit le plus rapproché de l'infini négatif, et q le plus rapproché de l'infini positif] : — 1° *La transformée en* $x' = x - p$ *ne peut avoir moins de variations que la transformée en* $x'' = x - q$; — 2° *le nombre des racines réelles de l'équation* $f(x) = 0$, *comprises entre* p *et* q, *ne peut jamais surpasser celui des variations perdues dans le passage de la transformée en* $(x - p)$ *à la transformée en* $(x - q)$; — 3° *quand le premier nombre est moindre que le second, la différence est toujours un nombre pair.* — [Dans le cas particulier où l'un des nombres p, q, serait nul, la transformée correspondante devrait être remplacée par la proposée elle-même].

Fourier, qui était parvenu de son côté au même théorème, et qui en a donné, dans son *Analyse des équations*, ouvrage publié après sa mort par M. *Navier*, une démonstration différente de celle de M. *Budan*, l'énonce d'une autre manière qui revient à-peu-près à la suivante :

Si dans la suite des $(m+1)$ *fonctions* $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots$, $f^{(m)}(x)$, *on substitue alternativement à la place de* x *deux nombres réels quelconques* p, q [p *étant* $<$ q], *et que l'on représente par* P, Q, *les deux suites de nombres résultant respectivement de ces substitutions :* — 1° *La suite* P *ne peut présenter moins de variations que la suite* Q; — 2° *le nombre des racines réelles de l'équation* $f(x) = 0$, mais en outre, la même propriété fournit un caractère au moyen duquel on peut reconnaître d'une manière certaine quand cette séparation est complétement effectuée. Pour ces deux raisons, j'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt de reprendre ici la proposition énoncée, et de faire voir comment elle peut se déduire de la théorie des fonctions dérivées, indépendamment de l'*algorithme* particulier sur lequel reposait sa première démonstration.

Ensuite, m'appuyant sur la propriété citée et profitant des travaux de M. *Budan* et de ceux de *Fourier*, j'indiquerai, pour résoudre les équations, un procédé mixte qui, réunissant autant que possible, la rapidité de la méthode de *Newton* avec la sûreté de celle de *Lagrange*, me paraît offrir les avantages de l'une et de l'autre sans en avoir les inconvénients.

2. Supposons donc, pour démontrer la proposition énoncée ci-dessus (1), que l'on ait effectué les substitutions successives

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad x' = b + \frac{1}{x''}, \quad x'' = c + \frac{1}{x'''} \ldots ;$$

soient $\frac{p}{p'}$, $\frac{q}{q'}$, deux réduites consécutives de la fraction continue qui

---

comprises entre p *et* q, *ne peut jamais surpasser celui des variations perdues dans le passage de l'hypothèse* x=p *à l'hypothèse* x=q; —3° *quand le premier nombre est moindre que le second, la différence est toujours un nombre pair.*

Pour l'historique de ce théorème, ainsi que pour l'examen des avantages qu'il présente dans les applications et les points de vue sous lesquels il pouvait laisser quelque chose à désirer, nous renverrons aux *Leçons d'Algèbre* de M. *Lefébure de Fourcy*.

Il est surprenant que *Fourier* n'ait pas cherché, dans son ouvrage, à démontrer la proposition qui fait l'objet principal de la présente note, et qui seule, à ce qu'il nous semble, pouvait donner à sa méthode tout le degré de rigueur et de précision dont elle est susceptible. Il a bien, à la vérité, dans les *Mémoires de l'Institut* (année 1827), énoncé que la réduction en fractions continues devait toujours effectuer la distinction des racines réelles et des racines imaginaires; mais il n'a donné aucune preuve de cette assertion, et n'a pas non plus expliqué de quelle manière ce départ pouvait s'opérer. — [D'un autre côté, l'on croit qu'une proposition relative à cet objet se trouvait dans ses papiers. Il est à craindre que la nouvelle perte que les sciences viennent de faire dans la personne de M. Navier, ne nous prive de ce document qu'il eût été intéressant de posséder.]

résulte de ces transformations, et y le dénominateur complet de la fraction intégrante qui vient immédiatement après, de sorte que l'on ait

$$x = \frac{qy + p}{q'y + p'} :$$

l'équation transformée en y pourra alors être considérée comme le résultat de la substitution immédiate de cette valeur de x dans l'équation proposée en x; de même que réciproquement, en éliminant y entre cette transformée et la valeur precédente de x, on retomberait sur l'équation primitive.

Cela posé, considérons les facteurs réels du premier et du second degré de l'équation en x; examinons les facteurs en y qui leur correspondent respectivement dans l'équation en y; et par suite voyons quelle forme prendra cette dernière équation elle-même.

Soit d'abord un facteur réel du premier degré $(x - \alpha)$. Il en résultera

$$\frac{qy + p}{q'y + p'} = \alpha;$$

d'où

$$q'\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right) y + p'\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) = 0.$$

Or, pour que ce facteur du premier degré en y puisse avoir *une* variation [et, par conséquent, en introduire *au moins une* dans l'équation en y], il faut et il suffit que la racine α soit comprise entre les deux réduites consécutives $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$; et comme ces réduites, quelles que soient les fractions intégrantes successives avec lesquelles on les forme, tendent continuellement vers l'égalité puisque leurs différences consécutives vont sans cesse en diminuant, il s'ensuit qu'après un certain nombre de transformations, une seule des valeurs de x [supposées toutes inégales entr'elles], pourra rester comprise entre deux réduites consécutives, lesquelles représenteront alors des valeurs de plus en plus approchées de cette racine.

Soit maintenant un facteur réel du second degré, tel que

$$\left[\left(x - \alpha\right)^2 + \beta^2\right)\Big],$$

correspondant à un couple de racines imaginaires

$$x = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}.$$

Il en résultera

$$\frac{qy + p}{q'y + p'} = \alpha \pm \beta \sqrt{-1};$$

ce qui donnera le facteur double du premier degré:

$$q'\left[\frac{q}{q'} - \left(\alpha \pm \beta \sqrt{-1}\right)\right] y + p'\left[\frac{p}{p'} - \left(\alpha \pm \beta \sqrt{-1}\right)\right],$$

et par suite le facteur réel du second degré :

$$\begin{aligned} & q'^2 \left[\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right)^2 + \beta^2 \right] y^2 \\ + & 2q'p' \left[\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right) \left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) + \beta^2 \right] y \\ + & p'^2 \left[\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right)^2 + \beta^2 \right]. \end{aligned}$$

Or, pour que ce facteur puisse introduire des variations dans l'équation en y, il faut nécessairement que l'on ait:

$$\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right) \left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) + \beta^2 < 0;$$

ce qui exige *deux conditions*: la première, que α ou la partie réelle des deux racines, soit comprise entre les deux réduites consécutives $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$; la seconde, que le carré de β ou du coefficient de $\sqrt{-1}$ dans ces deux racines, soit inférieur à la valeur numérique du produit

$$\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right) \left(\frac{p}{p'} - \alpha\right),$$

et à plus forte raison, que β soit $< \frac{1}{2p'q'}$, puisque les valeurs numériques des facteurs

$$\pm \left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) \text{ et } \mp \left(\frac{q}{q'} - \alpha\right)$$

forment une somme égale à

$$\pm \left(\frac{p}{p'} - \frac{q}{q'}\right) \text{ ou à } \frac{1}{p'q'}.$$

La première de ces deux conditions pourrait bien être remplie indéfiniment, et alors la série des réduites convergerait vers un nombre égal à la quantité α; mais la seconde finira tôt ou tard par ne l'être plus, puisque, les dénominateurs des réduites croissant indéfiniment, la différence de deux réduites consécutives peut devenir moindre que toute quantité donnée.

Il résulte de là, que par la suite des calculs, on parviendra toujours à une équation qui se trouvera dans l'un de ces deux cas : ou que *tous ses facteurs réels*, tant du premier degré que du second, seront *composés de termes entièrement positifs*; ou bien que ces facteurs seront *positifs à l'exception d'un seul* de la forme $(y-\varphi)$, φ étant un nombre positif et > 1. Dans le premier cas, l'équation n'aura évidemment que des permanences; dans le second, on sait déjà qu'elle doit avoir un nombre *impair* de variations, et nous allons prouver que ce nombre impair finit toujours par se réduire à *un*. — (*Voyez* une *Addition* à la fin du cahier.

3. Pour cela, faisons un moment abstraction du facteur $(y-\varphi)$ et de tous ceux qui lui correspondaient dans les équations en $x, x', x''\ldots$; puis, dans le produit des autres facteurs de l'équation en x, produit que nous appellerons X et que nous supposerons du degré m, remplaçons x par

$$\frac{qy+p}{q'y+p'} = \frac{q}{q'} + \frac{pq'-qp'}{q'(q'y+p')} = \frac{q}{q'} \pm \frac{1}{q'(q'y+p')};$$

ou simplement faisons $x = k + u$, en posant, pour abréger,

$$\frac{q}{q'} = k \qquad \text{et} \qquad \frac{\pm 1}{q'(q'y+p')} = u.$$

Alors, en représentant par $\mathrm{K}, \mathrm{K}', \mathrm{K}''\ldots\ldots \mathrm{K}^{(m)}$, ce que deviennent respectivement le polynome X et ses dérivés successifs jusqu'à l'ordre m inclusivement quand on y fait $x+k$, nous aurons identiquement :

$$\mathrm{X} = \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}'u}{1} + \frac{\mathrm{K}''u^2}{1.2} + \frac{\mathrm{K}'''u^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\mathrm{K}^{(m)}u^m}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}.$$

Or, la valeur de u peut se mettre sous la forme suivante :

$$u = \frac{\pm\frac{1}{q'^2}}{y+\frac{p'}{q'}} = \frac{i}{y+t},$$

en posant encore, pour abréger,

$$\frac{\pm 1}{q'^2} = i \quad \text{et} \quad \frac{p'}{q'} = t;$$

donc nous aurons pour le développement de X,

$$X = K + \frac{K'}{1} \cdot \frac{i}{y+t} + \frac{K''}{1.2} \cdot \frac{i^2}{(y+t)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{K^{(m)}}{1.2.3\ldots\ldots m} \cdot \frac{i^m}{(y+t)^m};$$

d'où résultera, après la multiplication par $(y+t)^m$, le polynome en y:

$$K(y+t)^m + \frac{K'i}{1}(y+t)^{m-1} + \frac{K''i^2}{1.2}(y+t)^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{K^{(m)}i^m}{1.2.3\ldots\ldots m}.$$

Maintenant, la fraction $i = \frac{\pm 1}{q'^2}$ qui entre dans ce polynome, diminue à mesure que le nombre des transformations se multiplie, et peut devenir, par la suite du calcul, moindre que toute quantité donnée; et comme d'ailleurs le coefficient K conserve toujours une valeur finie, attendu que par hypothèse l'équation primitive en x n'ayant pas de racines égales, la quantité k ne saurait être la valeur approchée d'aucune racine du polynome X, il s'ensuit que les polynomes transformés tendent sans cesse vers une limite, de la forme

$$K(y+t)^m;$$

c'est-à-dire [abstraction faite du coefficient K], qu'ils approchent continuellement de la puissance m^e d'un binome dont le premier terme est l'inconnue y de l'équation transformée, et le second terme une quantité numérique $\left[t = \frac{p'}{q'}\right]$ égale au rapport du dénominateur d'une réduite au dénominateur de la réduite suivante, rapport qui, par conséquent, est toujours *moindre que l'unité*.

Mais on sait: — 1° que dans le développement de toute puissance entière d'un binome, les coefficients vont en augmentant depuis les deux termes extrêmes jusqu'au milieu.

Donc, dans le développement de $K(y + t)^m$, en tenant compte des puissances successives de t, puissances qui vont en diminuant puisque t est < 1, *plus de la moitié des coefficients des puissances successives et ascendantes de* y *vont en augmentant.*

2° On sait encore que dans ce même développement de $(y + t)^m$, le rapport de chaque coefficient au précédent, en avançant d'un quelconque des deux termes extrêmes vers l'autre terme extrême, va en diminuant, puisque la fraction $\frac{m-n+1}{n}$, qui représente le rapport du $(n+1)^e$ coefficient au n^e, va elle-même en diminuant à mesure que n augmente; ou bien, ce qui est la même chose, *le rapport de chaque coefficient au suivant va en augmentant.*

Donc, en effectuant sur le polynome X [que nous supposerons, pour fixer les idées, du 6e degré], la série des opérations indiquées, et poussant le calcul suffisamment loin, on arrivera toujours à un polynome en y, tel que le suivant :

$$Py^6 + Qy^5 + Ry^4 + Sy^3 + Ty^2 + Uy + V,$$

dans lequel, les coefficients P, Q, R..... étant tous positifs, on aura en outre les deux inégalités continues :

1° *Entre plus de la moitié de ces coefficients* depuis V jusqu'à P :

$$V < U < T < S\ldots\ldots;$$

2° *Depuis le dernier terme jusqu'au premier :*

$$\frac{V}{U} < \frac{U}{T} < \frac{T}{S} < \frac{S}{R} < \frac{R}{Q} < \frac{Q}{P}.$$

Cela posé, en multipliant le polynome en y par le facteur $(y - \varphi)$, on aura pour produit :

$$\begin{array}{l} Py^7 \\ + (Q - P\varphi)\,y^6 \\ \quad + (R - Q\varphi)\,y^5 \\ \qquad + (S - R\varphi)\,y^4 \\ \qquad\quad + (T - S\varphi)\,y^3 \\ \qquad\qquad + (U - T\varphi)\,y^2 \\ \qquad\qquad\quad + (V - U\varphi)\,y \\ \qquad\qquad\qquad - V\varphi. \end{array}$$

Or, puisque d'ailleurs $\varphi > 1$, on a d'abord

$$\begin{gathered}V < U < U\varphi,\\ U < T < T\varphi,\\ T < S < S\varphi\ldots\ldots\ldots;\end{gathered}$$

d'où il résulte que toujours *au moins la moitié des termes* du produit total, à commencer par le dernier, *sont négatifs;* et quant aux termes de degrés plus élevés en y, *un ou plusieurs* d'entre eux peuvent être encore négatifs; mais dès que l'un d'eux est positif, les autres de degrés plus élevés le sont aussi. Par exemple, si

$$S > R\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi < \frac{S}{R},$$

il en résulte *à fortiori*:

$$\varphi < \frac{R}{Q}, \qquad \text{d'où} \qquad R > Q\varphi,$$
$$\varphi < \frac{Q}{P}, \qquad \text{d'où} \qquad Q > P\varphi;$$

et de même des autres termes s'il y en avait davantage.

Ainsi, comme il fallait le démontrer, l'équation que l'on obtient en égalant à *zéro* le polynome en y, *ne peut avoir plus d'une variation;* et d'ailleurs, à cause du premier terme qui est positif, on voit qu'*elle en a nécessairement une.*

4. Examinons maintenant comment cette propriété des équations peut servir à faciliter et à simplifier la recherche de leurs racines; et pour cela, expliquons d'abord en peu de mots le procédé auquel on est naturellement conduit par le théorème de M. Budan, lorsqu'on veut exprimer ces racines en fractions continues.

Soit, pour cela, l'équation générale:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots\ldots\ldots = 0.$$

En posant $x = a + x'$, on aura pour transformée:

$$f(a + x) = f(a) + f'(a)\frac{x'}{1} + f''(a)\frac{x'^2}{1.2} + f'''(a)\frac{x'^3}{1.2.3} + f''''(a)\frac{x'^4}{1.2.3.4}\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Alors, si l'on fait
$$f\,(a) = A',$$
$$\frac{f'\,(a)}{1} = B',$$
$$\frac{f''\,(a)}{1.2} = C',$$
$$\frac{f'''\,(a)}{1.2.3} = D',$$
$$\frac{f''''\,(a)}{1.2.3.4} = E',$$

. . . .

l'équation en x' pourra s'écrire ainsi :
$$A' + B'x' + C'x'^2 + D'x'^3 + E'x'^4 \ldots\ldots\ldots = 0.$$

De plus, si l'on suppose $a = 1$, on aura simplement :
$$\begin{array}{lllll}
f\,(1) & = A' & = A + B + & C + & D + \quad E\ldots\ldots \\
\frac{f'\,(1)}{1} & = B' & = B + & 2\,C + & 3\,D + 4\,E\ldots\ldots \\
\frac{f''\,(1)}{1.2} & = C' & & = C + & 3\,D + 6\,E\ldots\ldots \\
\frac{f'''\,(1)}{1.2.3} & = D' & & & = D + 4\,E\ldots\ldots \\
\frac{f''''\,(1)}{1.2.3.4} & = E' & & & = \quad E\ldots\ldots
\end{array}$$

. . . . ;

et généralement, quel que soit le degré de l'équation en x, on obtiendra toujours facilement et à la seule inspection, les coefficients de la transformée en $x' = (x - 1)$, d'après la formule du *Triangle arithmétique*.

La même règle qui sert à passer de l'équation en x à l'équation en $(x - 1)$, conduira de celle-ci à la transformée en $(x - 2)$, de là à la transformée en $(x - 3)$. . . . ; et ainsi de suite.

On obtiendrait, pour la même équation et par un procédé pareil, les transformées en $(x + 1)$, $(x + 2)$, $(x + 3)$, . . etc., en observant seulement de changer, dans chacune des sommes qu'exige le calcul des coefficients A′, B′, C′, D′. . ., les signes de tous les termes de rang pair.

5. Cela posé, admettons que l'on ait déterminé les coefficients des transformées successives en $(x \mp 1)$, en $(x \mp 2)$, en $(x \mp 3)\ldots$, et que l'on soit parvenu ainsi, d'une part à une transformée en $(x - l)$ qui n'ait plus que des permanences, et d'autre part à une transformée en $(x + l')$ qui n'ait plus que des variations.

Cette opération faite, on connaît les parties entières de toutes les racines réelles que l'équation en x *a ou peut avoir.*

En effet [les racines entières étant supposées déjà extraites], pour que deux nombres entiers consécutifs, $\pm a$, $\pm (a + 1)$ [a pouvant d'ailleurs être nul], comprennent une racine ou plusieurs, *il est nécessaire*, relativement aux racines positives, que la transformée en $(x - a)$ ait plus de variations que la transformée suivante en $(x - a - 1)$, et pour les racines négatives, que la transformée en $(x + a)$ ait moins de variations que la transformée en $(x + a + 1)$. Mais ne nous occupons que des racines positives (*).

Si donc, dans le passage de la transformée en $(x - a)$ à la transformée en $(x - a - 1)$, un certain nombre de variations ont disparu, alors seulement il y a lieu de *supposer* l'existence de racines réelles comprises entre a et $(a + 1)$, en nombre égal *au plus* à celui des variations perdues.

Dans cette hypothèse, on pose $x - a = \frac{1}{x'}$; et les coefficients de l'équation en x' s'obtiennent en renversant simplement l'ordre des coefficients de l'équation en $(x - a)$ [et changeant, s'il y a lieu et si l'on veut, tous les signes, afin de rendre le premier positif]; puis on calcule les coefficients des transformées en $(x' - 1)$, en $(x' - 2)$, en $(x' - 3), \ldots$.. jusqu'à ce qu'on arrive à une transformée qui n'ait plus que des permanences.

La valeur x' devant être *plus grande que l'unité* pour toute valeur réelle de x comprise entre a et $(a+1)$, il s'ensuit qu'il ne saurait exister de pareilles valeurs de x si l'équation en $(x' - 1)$ n'avait déjà plus que

(*) Dans les applications, il est préférable pour la simplicité de la méthode, de ramener la recherche des racines négatives à celle des racines positives, en changeant préalablement le signe de x dans l'équation proposée. Par ce moyen, on évite le procédé de calcul des transformées en $(x + 1)$, $(x + 2)\ldots$.

des permanences; et généralement, le nombre des racines réelles de l'équation proposée, comprises entre a et $(a+1)$, peut être tout au plus égal à celui des variations de l'équation en $(x'-1)$.

Maintenant, pour qu'une valeur de x' [ou plusieurs] soit comprise entre b et $(b+1)$, b étant un nombre entier positif *au moins égal à l'unité*, il faut que, dans le passage de l'équation en $(x'-b)$ à l'équation en $(x'-b-1)$, un certain nombre de variations aient disparu: et c'est seulement dans cette hypothèse que l'on peut supposer des valeurs de x', en nombre égal au plus à celui de ces variations, comprises entre b et $(b+1)$.

On fait alors $x'-b=\frac{1}{x''}$; les coefficients de l'équation en x'' s'obtiennent encore en renversant simplement l'ordre des coefficients de l'équation en $(x'-b)$; et l'on calcule de même les coefficients des transformées en $(x''-1)$, en $(x''-2)$, en $(x''-3)$,..., jusqu'à ce que l'on parvienne à une transformée qui n'ait plus que des permanences.

En raisonnant sur x'' comme on a raisonné sur x', on fait, s'il y a lieu, $x''-c=\frac{1}{x'''}$, puis $x'''-d=\frac{1}{x^{\text{IV}}}$,......; et ainsi de suite.

On opère, d'ailleurs, comme il vient d'être développé, pour tout système de deux équations ou de deux transformées consécutives, entre lesquelles il a disparu des variations [sans tenir compte, toutefois, de celles qui disparaissent entre les transformées en x' et $(x'-1)$, en x'' et $(x''-1)$,...]; et l'on pousse chacune de ces séries ou *branches* d'opérations, jusqu'à ce que l'on parvienne à une équation en $x^{(n)}$, telle que la transformée en $(x^{(n)}-1)$, qui s'en déduit, ou n'ait plus que des permanences, ou ne présente plus qu'une seule variation. Toute série d'opérations qui se trouve dans le premier cas, est terminée, et ne donne aucune racine réelle. Dans le second cas, au contraire, les valeurs déjà obtenues dans la série correspondante, pour x, x', x'', x''', x^{IV},..., forment une fraction continue dont les réduites successives représentent des valeurs de plus en plus approchées de l'une des racines réelles de l'équation proposée.

6. Ces racines se trouvant ainsi complétement séparées, soit y l'inconnue de la dernière transformée relative à l'une d'elles. Pour approcher davantage de la valeur de cette racine, nous pourrions continuer

le calcul en suivant toujours la même marche ; et nous serions sûrs de n'avoir, dans toutes les transformées subséquentes, qu'une seule variation, et par conséquent une seule racine positive, laquelle, de plus, serait toujours nécessairement plus grande que l'unité.

Mais les approximations successives fournies par la réduction en fraction continue ne croissant que très lentement, changeons maintenant notre marche, et exprimons en décimales la valeur cherchée de y, suivant le procédé de *Newton*.

Ce procédé, dans le cas actuel, et vu la forme particulière à laquelle nous avons ramené l'équation à résoudre, se trouve affranchi des inconvénients qu'il présente dans le cas général ; et en outre, comme on va le voir, il n'exige nullement ici la considération des différentes hypothèses que *Fourier* a dû discuter dans son ouvrage (*).

Notre équation en y n'ayant qu'une variation, *deux* conditions faciles à remplir sont seules nécessaires pour assurer la régularité, la simplicité, et la rapidité du calcul qu'exige sa résolution ; et ces deux conditions peuvent même se réduire à *une* seule, savoir : *Que l'on connaisse une première valeur suffisamment approchée de* y *et moindre que sa valeur exacte*, pour laquelle il suffira souvent de prendre sa partie entière.

Afin d'expliquer ceci, faisons $y = g + h$, g étant la valeur approchée et déjà connue de y, et h la quantité *positive* inconnue qu'il faut ajouter à g pour avoir la valeur totale. En représentant par $f(y) = 0$ l'équation en y, on aura :

$$f(g+h) = 0,$$

ou, en développant,

$$f(g) + f'(g)\frac{h}{1} + f''(g)\frac{h^2}{1.2} + f'''(g)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots + f^{(m)}(g)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m} = 0,$$

équation qui, d'après le théorème de M. *Budan*, ne pourra non plus avoir qu'*une seule variation.*

(*) Voyez sur cet objet, outre les *Leçons d'Algèbre* de M. *Lefébure de Fourcy*, le *Traité élémentaire d'Algèbre* de MM. *Mayer* et *Choquet*.

Maintenant, de l'équation précédente on tire

$$h = -\frac{f(g)}{f'(g)} - \left\{ \frac{f''(g)}{f'(g)} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{f'''(g)}{f'(g)} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{f^{(m)}(g)}{f'(g)} \cdot \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} \right\}.$$

Or, on sait que dans un pareil développement, il est toujours possible de prendre h assez petit pour que le signe de la somme ne dépende que de celui de son premier terme; donc puisque h doit être positif, les deux quantités $f(g)$ et $f'(g)$ seront de signes contraires, c'est-à-dire que $f(g)$ étant négatif, $f'(g)$ sera positif; et alors *la variation unique de l'équation en* h *se trouvera située entre le terme tout connu* f(g) *et le terme du premier degré* hf'(g). Telle est la *première condition* que nous exigeons avant de procéder à l'approximation *newtonienne;* et cette condition sera toujours aisée à remplir : quand la partie entière de y, prise pour g, ne suffira pas, on cherchera le chiffre des *dixièmes* par les moyens usités, le chiffre des *centièmes* si cela était nécessaire, et ainsi de suite; mais, nous le répétons, très souvent la partie entière suffira, et elle ne sera même pas toujours indispensable.

Cette première condition remplie, les fonctions dérivées $f''(g)$, $f'''(g)$, ... etc., seront toutes positives; et en prenant $\frac{-f(g)}{f'(g)}$ pour la valeur de h, on aura nécessairement une quantité trop forte.

Quant à la limite de l'erreur, il est clair que si l'on nomme **M** la plus grande valeur que puisse prendre le plus grand des coefficients de h^2, h^3,... dans l'accolade, cette erreur sera moindre que la somme des termes de la progression

$$M(h^2 + h^3 + h^4 + \ldots . h^m),$$

ou

$$Mh^2 \, \frac{1 - h^{m-1}}{1 - h},$$

ou enfin, plus simplement, et *à fortiori*, elle sera moindre que

$$M \, \frac{h^2}{1 - h}.$$

Quoique la valeur numérique de cette expression soit très facile à calculer, nous pouvons encore, à l'exemple de *Fourier*, obtenir une évaluation plus simple de la limite de l'erreur, en ne considérant que le coefficient de h^2 : car il résulte d'une proposition démontrée par

Lagrange, que si g et g' sont deux nombres comprenant y, et ne différant, par exemple, que d'*une* seule unité d'un certain ordre décimal, le premier nombre g étant ainsi une limite inférieure de y, et le second g' une limite supérieure, l'erreur commise lorsqu'on fait $h = \frac{-f(g)}{f'(g)}$ est toujours moindre que $\frac{1}{2} \frac{f''(g')}{f'(g)} h^2$. Par conséquent, la fraction $\frac{1}{2} \frac{f''(g')}{f'(g)}$, que nous représenterons maintenant par M, étant déterminée une fois pour toutes dès le commencement du calcul pour deux valeurs de g et g' qui ne diffèrent que d'*une unité*, d'*un dixième*..., pourra servir dans toute la suite des opérations, à apprécier l'erreur commise sur l'évaluation de h : il suffira pour cela de multiplier M par la fraction variable h^2, ou simplement par l'unité de l'ordre immédiatement supérieur au premier chiffre significatif de h.

Ainsi, tant que l'on ne connaîtra que la partie entière de la racine, on devra faire $h = 1$; et pour que l'on puisse alors passer sans recherche intermédiaire à la détermination des chiffres décimaux, il faudra que M *soit* $< \frac{1}{10}$: c'est *la seconde condition* dont nous avons parlé; quand elle ne sera pas remplie, on déterminera par des essais directs; comme nous l'avons dit plus haut, le chiffre des *dixièmes*. On pourra ensuite chercher le chiffre des *centièmes* en divisant $-f(g)$ par $f'(g)$, pourvu toutefois que M soit < 1 ; sans quoi il faudra aussi déterminer directement le chiffre des *centièmes*... ; et ainsi de suite.

Généralement, représentons par n le nombre des chiffres décimaux déjà déterminés, et par ν le nombre des chiffres de la partie entière de M. Quand M sera compris entre 1 et 0,1, ν sera égal à *zéro*; quand M sera moindre que 0,1, ν deviendra négatif, et sa valeur absolue représentera le nombre de *zéros* placés entre la virgule décimale et le premier chiffre significatif; enfin, dans le cas particulier où M serait une puissance exacte de 10 ou de 0,1, la valeur de ν, positive ou négative, serait l'exposant de cette puissance (*).

Cela posé, pour que l'on puisse obtenir une nouvelle valeur approchée de la racine avec n' chiffres décimaux exacts, n' étant $> n$, et

(*) Le nombre n est également susceptible de devenir négatif, ce qui pourrait arriver si tous les chiffres de la partie entière même n'étaient pas encore déterminés.

$(n' - n)$ étant le nombre des nouveaux chiffres décimaux, il faudra que l'on ait

$$\frac{10^{\nu}}{10^{2n}} < \text{ ou } = \frac{1}{10^{n'}},$$

ou
$$10^{2n-\nu-n'} > \text{ ou } = 1,$$

ou enfin
$$2n - \nu - n' > \text{ ou } = 0.$$

Par conséquent, le nombre $(n' - n)$ des nouveaux chiffres décimaux qu'il sera permis de calculer, est égal à $(n - \nu)$; ou bien, le nombre total des chiffres alors connus, ou n', est égal à $2n - \nu$; et ainsi il est constamment le double du nombre des chiffres connus par l'approximation précédente, *plus* ou *moins* [suivant la valeur de M] le nombre constant ν (*).

Au reste, tout ceci a été longuement expliqué par *Fourier* dans son *Analyse des équations*. Seulement ici, nous le répétons, *à cause de la forme particulière* à laquelle l'équation a été ramenée, *le quotient de* $-\mathrm{f}(g)$ *par* $\mathrm{f}'(g)$ *est toujours une limite supérieure de la racine, et ce nombre diminué d'une unité du dernier ordre décimal, toujours une limite inférieure;* et c'est cette dernière qu'il faut prendre pour valeur de g dans l'approximation suivante.

Une remarque est encore nécessaire relativement à la valeur du quotient dont nous parlons : ce quotient n'est ordinairement pas exact; et lorsqu'on a déterminé les n' chiffres cherchés, on néglige les suivants. — Or, si cette partie négligée approche beaucoup d'*une* unité de l'ordre précédent, on devra [la limite de l'erreur ayant été prise nécessairement au-dessus de sa valeur exacte] on devra regarder comme probable que la partie restante est inférieure à la véritable valeur de la racine; et alors on prendra cette partie pour la valeur suivante de g. Il n'y aurait qu'un très petit inconvénient à se tromper sur ce point, et l'on reconnaîtrait immédiatement l'erreur à l'approximation suivante : car alors $f(g)$ se trouverait positif au lieu d'être négatif comme il le devrait, la nouvelle équation en h ayant perdu sa variation. — Au

(*) Dans les cas ordinaires, les chiffres qui exigent une détermination directe, sont les deux premiers de la racine, quel que soit d'ailleurs le nombre de ceux qui composent la partie entière; quant aux nombres de chiffres déterminés après ces deux-là dans les approximations subséquentes, ils suivent la loi de la progression $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \ldots\ldots$ etc.

contraire, lorsque la partie du quotient que l'on aura négligée ne sera qu'une petite fraction de l'unité de l'ordre précédent, il sera probable que la partie restante n'est pas inférieure à la véritable valeur de la racine; et l'on devra retrancher une unité. Dans ce cas, une fausse induction se reconnaîtrait encore à l'approximation suivante, parce que l'on retrouverait dans la nouvelle valeur de h, l'unité supprimée à tort. On pourrait alors, soit continuer la résolution avec cette dernière valeur de h, soit reprendre le calcul de l'approximation précédente après y avoir rectifié la valeur de g; et ce second parti sera toujours à préférer, afin de ne pas compromettre le degré d'exactitude des approximations ultérieures.

Ainsi, dans la règle que l'on vient de donner pour la détermination de la valeur de h, on peut sous-entendre que le quotient de $-f$ par f' est calculé à *une demi-unité* près *du dernier ordre décimal*, sauf à vérifier la limite inférieure prise en conséquence pour la valeur de h, afin de s'assurer que cette valeur n'est pas trop petite ou trop grande d'une unité du dernier ordre (*).

7. Maintenant, l'équation en y étant supposée complétement résolue, il reste à savoir avec quel degré d'approximation l'on pourra obtenir la valeur de x lorsqu'on y introduira celle de y.

Pour cela, rappelons que l'on a

$$x = \frac{qy + p}{q'y + p'};$$

désignons par γ la valeur approchée de y, déterminée au moyen du calcul précédent, et supposée, comme nous l'avons dit, inférieure à la véritable; et soit ε l'unité du dernier ordre décimal de γ : la véritable valeur de y sera comprise entre γ et $\gamma+\varepsilon$; celle de x le sera entre

$$\frac{q\gamma + p}{q'\gamma + p'} \quad \text{et} \quad \frac{q(\gamma+\varepsilon) + p}{q'(\gamma+\varepsilon) + p'};$$

et ainsi l'erreur commise sur la valeur de x en la supposant égale à

(*) Dans le cas où la rectification dont nous parlons ici serait nécessaire, il est facile de voir que les calculs déjà faits donnent un moyen très simple de l'effectuer, sans que l'on ait besoin pour cela de recommencer toutes les opérations; il est sans doute inutile que nous insistions là-dessus.

la première de ces deux fractions, sera moindre que leur différence, ou que

$$\frac{qy+p}{q'y+p'}-\frac{q(y+1)+p}{q'(y+1)+p'}=\frac{(pq'-qp')1}{(q'y+p')(q'y+p'+q'1)}$$
$$=\frac{\pm 1}{(q'y+p')(q'y+p'+q'1)};$$

et par conséquent, *à fortiori*, cette erreur sera moindre que la valeur numérique de la fraction $\frac{1}{(q'y+p')^2}$.

Donc, pour avoir la valeur de x réduite en décimales, on appréciera *à vue* le nombre des chiffres contenus dans le carré de la partie entière de $(q'y+p')$; et ce nombre de chiffres *diminué d'un* sera celui des chiffres décimaux exacts que l'on pourra obtenir dans la valeur de x, de plus que dans celle de y.

Quant au sens de l'erreur, il dépend du rang de la transformée en y, toute valeur approchée de la racine de cette équation, pourvu qu'elle le soit *par défaut* et *non par excès*, jouissant à cet égard des mêmes propriétés que le quotient entier incomplet qu'elle remplace. Cette erreur est donc de sens contraire à celle que produit la réduite précédente $\frac{q}{q'}$, en supposant toutefois que l'on n'ait apporté aucune altération au quotient de $qy+p$ par $q'y+p'$.

8. Pour faire une première application de ce qui précède, je prendrai l'équation suivante, déjà traitée par LAGRANGE :

$$x^3-7x+7=0.$$

Je forme le tableau des coefficients des différentes transformées, d'après la méthode du *numéro* 4; et j'obtiens ainsi

	A	B	C	D	
-4	-29	$+41$	-12	$+1$	
-3	$+1$	$+20$	-9	$+1$	$-x=3+\frac{1}{x'}$
-2	$+13$	$+5$	-6	$+1$	
-1	$+13$	-4	-3	$+1$	
∓ 0	$+7$	-7	∓ 0	$+1$	
$+1$	$+1$	-4	$+3$	$+1$	$x=1+\frac{1}{x'}$, ... (?)
$+2$	$+1$	$+5$	$+6$	$+1$	

D'où je conclus que l'équation proposée a *nécessairement* une racine réelle négative comprise entre -3 et -4; et que les deux autres racines, si elles sont réelles, *ce qui est encore douteux*, ne peuvent être que positives et comprises en $+1$ et $+2$.

Occupons-nous d'abord de ces dernières.

Pour *reconnaître leur nature* et en *obtenir une première valeur approchée* si elles sont réelles, je fais d'abord, comme il a été dit au *numéro* 5, $x = 1 + \frac{1}{x'}$, d'où résulte l'équation

$$x'^3 - 4x'^2 + 3x' + 1 = 0;$$

qui donne de même, pour les coefficients de ses transformées,

	A	B	C	D	
0	$+1$	$+3$	-4	$+1$	
1	$+1$	-2	-1	$+1$	$x' = 1 + \frac{1}{x''}$.
2	-1	-1	$+2$	$+1$	
3	$+1$	$+6$	$+5$	$+1$	$x' = 2 + \frac{1}{x''}$.

Ainsi, je vois que les deux racines cherchées sont réelles, et que x' est compris, pour l'une entre 1 et 2, et pour l'autre entre 2 et 3. Les racines se trouvent donc déjà complétement séparées; les deux premières valeurs approchées de chacune d'elles sont:

$$x_1 = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}; \qquad x_2 = \frac{1}{1}, \frac{3}{2};$$

et pour en avoir une troisième, je fais alternativement les deux hypothèses:

$$x' = 1 + \frac{1}{x''}, \qquad x' = 2 + \frac{1}{x''};$$

d'où résultent les deux équations en x'':

$$x''^3 - 2x''^2 - x'' + 1 = 0 \qquad (1),$$
$$x''^3 + x''^2 - 2x'' - 1 = 0 \qquad (2).$$

La première de ces équations n'étant pas encore ramenée à n'avoir qu'une variation, je continue la réduction des racines en fraction continue; et je forme pour cela les deux tableaux (1) et (2) qui suivent :

(1)	A	B	C	D
0	$+1$	-1	-2	$+1$
1	-1	-2	$+1$	$+1$
2	-1	$+3$	$+4$	$+1$
3	$+7$	$+14$	$+7$	$+1$

$$x'' = 2 + \frac{1}{x'''}.$$

(2)	A	B	C	D
0	-1	-2	$+1$	$+1$
1	-1	$+3$	$+4$	$+1$
2	$+7$	$+14$	$+7$	$+1$

$$x'' = 1 + \frac{1}{x'''};$$

d'où il résulte que la valeur de x'' est comprise, pour x_1, entre 2 et 3, et pour x_2 entre 1 et 2; ce qui donne les deux nouvelles réduites :

$$x_1 = \frac{5}{3}, \qquad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Quant aux équations en x''' qui s'en déduisent, elles sont identiques; et ainsi la détermination des deux racines positives de l'équation proposée est ramenée à la résolution d'une seule transformée, qui est la suivante :

$$x'''^3 - 3x'''^2 - 4x''' - 1 = 0.$$

Cette équation en x''' n'ayant plus qu'*une* variation, on pourrait passer à la résolution en décimales, suivant la méthode indiquée au *numéro* 6. Mais rien n'obligeant à adopter cette nouvelle marche pour *la première* équation qui se présente avec une seule variation; et, de plus, les dernières réduites obtenues n'ayant encore que de très petits dénominateurs, circonstance qui ne permettrait pas d'élever de beaucoup le degré d'approximation fourni par la résolution en décimales (*voyez* 7), je cherche encore une valeur réduite de chaque racine; il y a d'ailleurs pour cela, dans l'exemple actuel, une raison que l'on comprendra dans un instant.

Je forme donc le tableau des coefficients pour les transformées en $(x''' - 1)$, $(x''' - 2)$, ...; et j'ai ainsi :

	A	B	C	D	
0	-1	-4	-3	$+1$	
1	-7	-7	∓ 0	$+1$	
2	-13	-4	$+3$	$+1$	
3	-13	$+5$	$+6$	$+1$	
4	-1	$+20$	$+9$	$+1$	
5	$+29$	$+41$	$+12$	$+1$	$x''' = 4 + \frac{1}{y}$,

ce qui me donne une valeur de x''' comprise entre 4 et 5, et par suite les deux nouvelles réduites

$$x_1 = \frac{22}{13}, \qquad\qquad x_2 = \frac{19}{14},$$

toutes deux exactes à moins d'*un centième* près.

Alors je fais

$$x''' = 4 + \frac{1}{y};$$

et l'équation à résoudre sera la suivante, à laquelle je m'arrêterai pour chercher en décimales la valeur de sa racine positive:

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0.$$

Mais auparavant, j'observerai encore que cette équation est également propre à donner la racine négative de la proposée: en effet, si dans cette dernière on fait $x = -\left(3 + \frac{1}{y}\right)$, on obtient de nouveau la même équation en y; et telle est la raison de préférence que j'ai indiquée tout à l'heure. Ainsi, la racine positive de cette seule équation en y donnera les trois racines de la proposée (*), au moyen des trois formules suivantes:.

$$x_1 = \frac{22y + 5}{13y + 3}, \ x_2 = \frac{19y + 4}{14y + 3}, \ x_3 = -\frac{3y + 1}{y}.$$

Cherchons donc cette valeur de y.

9. Sans avoir besoin de développer le tableau complet des trans-

(*) Cette propriété de l'équation en y mériterait peut-être un examen spécial.

formées en $(y-1)$, $(y-2)$,......., on voit sur-le-champ, en mettant les deux premiers termes sous la forme $(y-20)y^2$, que la racine cherchée et comprise entre 20 et 21 (*).

Je fais donc $y = 20 + h$; et en nommant $f(y)$ le premier membre de l'équation en y, et $f'(y)$, $f''(y)$, $f'''(y)$, ses dérivés, j'exécute le calcul suivant (*voyez* 6):

$$f(20+h) =$$
$$f(20) + f'(20)\frac{h}{1} + f''(20)\frac{h^2}{1.2} + f'''(20)\frac{h^3}{1.2.3} = 0;$$
$$f(20) = 20^3 - 20.20^2 - 9.20^1 - 1 = -181\ (**);$$
$$\frac{1}{1}f'(20) = 3.20^2 - 40.20^1 - 9 = 391;$$
$$\frac{1}{1.2}f''(20) = 3.20^1 - 20 = 40;$$
$$\frac{1}{1.2.3}f'''(20) = 1 = 1.$$

D'où résulte l'équation en h:

$$h^3 + 40h^2 + 391h - 181 = 0;$$

et par suite, $$h = \frac{181}{391} - \frac{40}{391}h^2 - \frac{1}{391}h^3.$$

Pour voir si le premier terme de cette valeur de h est suffisant pour m'en faire connaître, sans erreur, le chiffre des *dixièmes*, je remplace dans le coefficient de h^2, le numérateur $40 = \frac{1}{2}f''(20)$,

---

(*) Une abréviation analogue peut être employée pour l'équation ci-dessus en x''.

(**) Cette réduction peut s'effectuer très simplement et *à vue*, de la manière suivante :

$20-20=0$; $0\times20=0$; $0-9=-9$; $-9\times20=-180$; $-180-1=-181=f$.

De même pour f' :

$20\times3=60$; $60-40=20$; $20\times20=400$; $400-9=391$.

Et ainsi des autres.

Cette marche, que j'emploierai dans les tranformations suivantes, me paraît préférable à celle de Fourier, en ce qu'outre l'avantage d'une grande simplicité, elle présente encore celui de donner les diverses fonctions f, f', f''... indépendamment les unes des autres.

par le nombre $43 = \frac{1}{2} f''(21)$(*); et j'obtiens ainsi, pour la valeur de M (*voyez* 6) réduite en décimales,

$$M = \frac{43}{391} = 0,11, \text{ à très peu près.}$$

A la rigueur il faudrait, pour remplir la seconde condition exigée au *numero* 6, que M ne dépassât pas *un dixième;* mais comme l'excès est peu considérable, et que d'ailleurs Mh^2 n'est pas la valeur exacte de l'erreur, mais une limite supérieure de cette erreur, je puis me permettre, *sauf vérification* du résultat obtenu en conséquence, et sauf les observations faites au *numéro* 6, de prendre pour la valeur de h à *un dixième* près, la fraction $\frac{181}{391}$. Or, cette fraction, réduite en décimales, donne

$$h = 0,46;$$

donc 4 est la valeur probable du chiffre des *dixièmes* de y, ce qui se vérifiera en effet à l'approximation suivante; et d'ailleurs, on voit dès à présent, que le produit $0,11 \times (0,4)^2$ est moindre que $0,02$, et que par conséquent la valeur de h dépasse $0,44$. Mais nous devons, pour le moment, nous en tenir au premier chiffre.

Je fais donc maintenant $y = 20,4 + h'$; et pour obtenir les coefficients des diverses puissances de h' qui entrent dans le développement de $f(20,4 + h')$, j'effectue le calcul suivant, profitant ainsi des valeurs déjà calculées de $f(20)$, $f'(20)$, et $f''(20)$:

$$f\,(20,4) = (0,4)^3 + 40\,(0,4)^2 + 391\,(0,4)^1 - 181\,;$$

$$\frac{1}{1} f'\,(20,4) = 3\,(0,4)^2 + 80\,(0,4)^1 + 391\,;$$

$$\frac{1}{1.2} f''\,(20,4) = 3\,(0,4)^1 + 40\,;$$

$$\frac{1}{1.2.3} f'''(20,4) = 1 \text{ (**)}.$$

(*) Le numérateur de M s'obtiendra constamment, *dans une équation du troisième degré*, en ajoutant à la valeur numérique déjà calculée pour $\frac{1}{2} f''(g)$, *trois unités du dernier ordre* décimal. — On peut établir pour chaque degré une règle analogue.

(**) Les quantités désignées par $\frac{f'''}{1.2.3}$ étant constantes et égales à 1 dans toute la suite du calcul, je me dispenserai dorénavant de les indiquer.

$$
\begin{array}{rr}
 & 0,4 \\
+ & 40 \\
\hline
 & 40,4 \\
\times & 0,4 \\
\hline
 & 16,16 \\
+ & 391, \\
\hline
 & 407,16 \\
\times & 0,4 \\
\hline
 & 162,864 \\
- & 181, \\
\hline
- & 18,136 = f
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 3, \\
\times & 0,4 \\
\hline
 & 1,2 \\
+ & 80, \\
\hline
 & 81,2 \\
\times & 0,4 \\
\hline
 & 32,48 \\
+ & 391, \\
\hline
+ & 423,48 = \frac{1}{1}f'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 3, \\
\times & 0,4 \\
\hline
 & 1,2 \\
+ & 40, \\
\hline
+ & 41,2 = \frac{1}{1.2}f''
\end{array}
$$

Je divise ensuite $-18,136$ par $+423,48$; le quotient, à *un demi-millième* près, étant $0,043$, je fais $h' = 0,042$, et j'ai ainsi pour nouvelle valeur de y,

$$y = 20,442.$$

Observons en passant, que l'incertitude dont la valeur de la limite M restait affectée dans le calcul de la première approximation, se trouve maintenant détruite; car on a

$$\frac{\frac{1}{2}f''(20,5)}{f'(20,4)} = \frac{41,5}{423,48} = \frac{1}{10,2} \text{ ou } = 0,09\ldots\ldots;$$

et ainsi la valeur de **M** est bien réellement et pour toute la suite du calcul, inférieure à $0,1$.

Je fais actuellement $y = 20,442 + h''$; et je développe comme ci-dessus les valeurs de $f(20,442)$, de f', de $\frac{1}{2}f''\ldots$, en y faisant servir les valeurs déjà obtenues pour $f(20,4)$, $f'(20,4)\ldots$, etc.

$$f(20,442) = (0,042)^3 + 41,2(0,042)^2 + 423,48(0,042)^1 - 18,136$$

$$\frac{1}{1}f'(20,442) = 3(0,042)^2 + 82,4(0,042)^1 + 423,48$$

$$\frac{1}{1.2}f''(20,442) = 3(0,042)^1 + 41,2$$

$$
\begin{array}{lr}
 & 0{,}042 \\
+ & 41{,}2 \\ \hline
 & 41{,}242 \\
\times & 0{,}042 \\ \hline
 & 82\ 484 \\
 & 1\ 649\ 68\ \\ \hline
 & 1{,}732\ 164 \\
+ & 423{,}48\ \\ \hline
 & 425{,}212\ 164 \\
\times & 0{,}042 \\ \hline
 & 850\ 424\ 328 \\
 & 17\ 008\ 486\ 56\ \\ \hline
 & 17{,}858\ 910\ 888 \\
- & 18{,}136\ \\ \hline
- & 0{,}277\ 089\ 112 = f.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & 3, \\
\times & 0{,}042 \\ \hline
 & 0{,}126 \\
+ & 82{,}4\ \\ \hline
 & 82{,}526 \\
\times & 0{,}042 \\ \hline
 & 165\ 052 \\
 & 330\ 104\ \\ \hline
 & 3{,}466\ 092 \\
+ & 423{,}48\ \\ \hline
+ & 426{,}946\ 092 = f'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & 3, \\
\times & 0{,}042 \\ \hline
 & 0{,}126 \\
+ & 41{,}2\ \\ \hline
+ & 41{,}326 = \tfrac{1}{2}f''
\end{array}
$$

Maintenant je divise cette valeur de f par celle de f'; et le quotient, à *une demi-unité* près du *septième ordre*, étant

$$
\begin{array}{lrl}
 & & 0,\ 0\ 00\ 6490, \\
\text{je fais} & h'' = & 0,\ 0\ 00\ 6489, \\
\text{d'où} & y = & 20,\ 4\ 42\ 6489;
\end{array}
$$

et je continue le calcul de la même manière.

J'obtiens ainsi les valeurs suivantes, que je ne fais que rapporter :

$$
\left.
\begin{array}{rl}
f\ (20{,}4\ 42\ 6489) = & (0{,}0\ 00\ 6489)^3 \\
+\ 41{,}3\ 26 & (0{,}0\ 00\ 6489)^2 \\
+\ 426{,}9\ 46\ 0\ 92 & (0{,}0\ 00\ 6489)^1 \\
-\ 0{,}2\ 77\ 0\ 89\ 1\ 12 &
\end{array}
\right\} =
$$

$$
-\ 0{,}0\ 00\ 0263\ 9\ 14\ 3914\ 2\ 43\ 1831;
$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{1}\, f'\,(20{,}4\;42\;6489) = 3\,(0{,}0\;00\;6489)^2\\ +\;82{,}6\;52\,(0{,}0\;00\;6489)^1\\ +\;426{,}9\;46\;0\;92\end{array}\right\} =$$

$$426{,}9\;99\;7261\;4\;60\;1363\,;$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{1.2}\, f''\,(20{,}4\;42\;6489) = 3\,(0{,}0\;00\;6489)^1\\ +\;41{,}3\;26\end{array}\right\} =$$

$$41{,}3\;27\;9467\,;$$

$$\begin{aligned}-f:f' &= 0,\;0\;00\;0000\;61806689\,;\\ h''' &= 0,\;0\;00\;0000\;61806688\,;\\ y &= 20,\;4\;42\;6489\;61806688.\end{aligned}$$

Continuant, et abrégeant encore, j'obtiens pour dernière approximation de la valeur de y,

$$\begin{aligned}f &= -0{,}0\;00\;0000\,000001345\,64\,2116\,86046287\;1\,57\,5556\,72547328,\\ f' &= 426{,}9\;99\;7312\,57000656\;1\,95\,2592\,44588032\,,\\ f'' &= 41{,}3\;27\;9468\,85420064,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-f:f' &= 0,\;0\;00\;0000\;00000000\;3151388673961020,\\ h'''' &= 0,\;0\;00\;0000\;00000000\;3151388673961019,\\ y &= 20,\;4\;42\;6489\;61806688\;3151388673961019,\end{aligned}$$

valeur exacte jusqu'à la *trente-unième* décimale.

Une approximation de plus me donnerait *soixante-trois* décimales; mais j'abandonne ce calcul qui ne présente d'autre difficulté que celle de trouver un espace suffisant pour y placer tous les chiffres à leurs rangs respectifs.

10. Reste à substituer ce résultat dans les expressions trouvées au *numéro* 8 pour x_1, x_2, et x_3; ce qui donne

$$x_1 = \frac{454\;\;7\;38\;2771\;\;59747142\;\;9330550827142418}{268\;\;7\;54\;4365\;\;03486948\;\;0968052761493247};$$

$$x_2 = \frac{392\;\;4\;10\;3302\;\;74327077\;\;9876384805259361}{289\;\;1\;97\;0854\;\;65293636\;\;4119441435454266};$$

$$-\,x_3 = \frac{62\;\;3\;27\;9468\;\;85420064\;\;9459166021883057}{20\;\;4\;42\;6489\;\;61806688\;\;3151388673961019}.$$

Enfin, si l'on veut exprimer les valeurs de x_1, x_2, x_3, en décimales, il faut observer que la valeur de y remplace le dénominateur incomplet 20 dans les réduites

$$x_1 = \frac{22.20 + 5}{13.20 + 3} = \frac{445}{263},$$

$$x_2 = \frac{19.20 + 4}{14.20 + 3} = \frac{384}{283},$$

$$-x_3 = \frac{3.20 + 1}{20} = \frac{61}{20}.$$

Or, les deux premières pouvant être calculées exactement avec *quatre* décimales, et la troisième avec *deux*, il s'ensuit que si l'on remplace le nombre entier 20 par la valeur trouvée de y, x_1 et x_2 pourront être obtenues exactement jusqu'à la *trente-cinquième* décimale inclusivement, et x_3 jusqu'à la *trente-troisième*. Au reste, on peut aussi obtenir exactement les deux dernières décimales de x_3, en observant que la valeur absolue de cette racine doit être égale à la somme des deux autres. Et l'on a ainsi

$$x_1 = 1,\ 692\ 021\ 471\ 630\ 095\ 869\ 627\ 814\ 897\ 002\ 069\ 14,$$
$$x_2 = 1,\ 356\ 895\ 867\ 892\ 209\ 443\ 894\ 399\ 510\ 021\ 300\ 58,$$
$$-x_3 = 3,\ 048\ 917\ 339\ 522\ 305\ 313\ 522\ 214\ 407\ 023\ 369\ 72,$$

valeurs exactes jusqu'à la *trente-cinquième* décimale inclusivement; l'approximation suivante eût conduit jusqu'à la *soixante-septième*.

11. Je vais encore m'occuper de quelques exemples; mais je n'en pousserai le calcul que jusqu'à la séparation des racines, ce qui est suffisant pour le but principal que je me suis proposé, et je ne ferai qu'indiquer le tableau des opérations.

Deuxième application.

$$x^6 - 12x^4 - 2x^3 + 37x^2 + 10x - 10 = 0.$$

Cet exemple, dont je dois la communication à la complaisance de M. *de Fourcy*, est très propre à faire ressortir l'avantage de la réduction en fraction continue; car le premier membre étant le développement du produit des trois facteurs

$$x^2 + 2x - 1, \quad x^2 - 2x - 2, \quad \text{et} \quad x^2 - 5,$$

dont les racines sont respectivement

$$x = -1 \pm \sqrt{2}, \quad x = 1 \pm \sqrt{3}, \quad \text{et } x = \pm \sqrt{5},$$

a toutes ses racines réelles. Et bien que *deux* d'entre elles soient comprises entre $+2$ et $+3$, et *deux* autres entre -2 et -3, on va voir que la séparation s'en fait avec la plus grande facilité.

	A	B	C	D	E	F	G	
-3	$+104$	-428	$+..$	$-..$	$+..$	$-..$	$+1$	
-2	$+6$	$+30$	$+1$	-66	$+48$	-12	$+1$	$-x = 2 + \frac{1}{x'} \ldots ?$
-1	$+8$	-28	-14	$+26$	$+3$	-6	$+1$	$-x = \frac{1}{x'},$
0	-10	$+10$	$+37$	-2	-12	0	$+1$	
$+1$	$+24$	$+36$	-26	-30	$+3$	$+6$	$+1$	$x = \frac{1}{x'},$
$+2$	$+14$	-58	-23	$+62$	$+48$	$+12$	$+1$	$x = 2 + \frac{1}{x'} \ldots ?$
$+3$	$+60$	$+\ldots$	$+..$	$+..$	$+..$	$+..$	$+1$	

$$x = 2 + \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
0	$+1$	$+12$	$+48$	$+62$	-23	-58	$+14$	
1	$+56$	-4	-274	-330	-103	$+26$	$+14$	
2	-615	-1740	-1412	-202	$+237$	$+110$	$+14$	$x' = 1 + \ldots$
3	-3608	-3588	$+714$	$+2126$	$+997$	$+194$	$+14$	
4	-3151	$+9260$	$+15224$	$+8334$	$+2177$	$+278$	$+14$	$x' = 4 + \ldots$
5	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+14$	

$$-x = 2 + \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
0	$+1$	$+12$	$+48$	$+66$	$+1$	-30	$+6$	
1	$+104$	$+196$	$+42$	-110	-59	$+6$	$+6$	
2	$+185$	-220	-492	-166	$+61$	$+42$	$+6$	$x' = 2 + \ldots$
3	-584	-1212	-114	$+618$	$+361$	$+78$	$+6$	
4	-847	$+2284$	$+4776$	$+2962$	$+841$	$+114$	$+6$	$x' = 4 + \ldots$
5	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+6$	

Résumé : *six racines réelles.*

Positives	1^re^ entre o et 1,	Négatives	1^re^ entre o et -1,
	2^e^ $x = 2 + \dfrac{1}{1+\ldots}$,		2^e^ $-x = 2 + \dfrac{1}{2+\ldots}$;
	3^e^ $x = 2 + \dfrac{1}{4+\ldots}$.		3^e^ $-x = 2 + \dfrac{1}{4+\ldots}$

12. *Troisième application.*

$$x^6 - 6x^5 + 40x^3 + 60x^2 - x - 1 = 0.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
-1	$+27$	-37	$+15$	-40	$+\ldots$	$-\ldots$	$+1$	$-x=\frac{1}{x'}$ 3 racines dont 2 douteuses.
o	-1	-1	$+60$	$+40$	0	-6	$+1$	
$+1$	$+93$	$+215$	$+135$	-0	-15	$+0$	$+1$	$x=\frac{1}{x'}$: *une* racine *réelle*.
$+2$	$+429$	$+431$	$+60$	-40	0	$+6$	$+1$	$x=2+\frac{1}{x'}$ 2 racines douteuses.
$+3$	$+887$	$+467$	$+15$	$+40$	$+45$	$+12$	$+1$	

$$x = 2 + \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
o	$+1$	$+6$	0	-40	$+60$	$+431$	$+429$	2 racines *imaginaires*.
1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	

$$-x = \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
o	-1	-6	0	$+40$	-60	-1	$+1$	*une* racine *réelle*, et
1	-27	-125	-235	-90	-50	$+5$	$+1$	2 racines *imaginaires*.

Résumé.

Quatre racines *imaginaires* ;
Une racine *réelle* entre o et $+1$;
Une racine *réelle* entre o et -1.

13. *Quatrième et dernière application.*

Je considère une dernière équation que je trouve à la page 196 du 15^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et qui résulte d'un calcul pris pour exemple par M. *Bret*, dans sa théorie de l'élimination.

Cette équation est du 9^e degré ; mais elle a pour racine $+1$ et -1 ; j'y supprime donc les facteurs $(x-1)$ et $(x+1)$, quoique ces facteurs puissent facilement se découvrir par la méthode même ; et j'obtiens alors pour l'équation à résoudre,

$$4x^7 - 6x^6 - 7x^5 + 8x^4 + 7x^3 - 23x^2 - 22x - 5 = 0.$$

Racines positives.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	−5	−22	−23	+7	+8	−7	−6	+4	$x=\frac{1}{x'}$ 2 racines
+1	−44	−58	−30	−11	+23	+41	+22	+4	douteuses.
+2	+33	+326	+...	+...	+...	+...	+...	+4	$x=2+\frac{1}{x'}$ *une* racine
+3	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+4	*réelle*

$$x=\frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+4	−6	−7	+8	+7	−23	−22	−5	2 racines *imaginaires.*
+1	−41	—	—	—	—	—	—	—	

Racines négatives.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+5	−22	+23	+7	−8	−7	+6	+4	$-x=\frac{1}{x'}$ 4 racines
1	+8	+42	+.....	+...	+....	+....	+....	+4	douteuses

$$-x=\frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+4	+6	−7	−8	+7	+23	−22	+5	$x'=1+\frac{1}{x''}$ 4 racines
1	+8	+14	+16	−15	+33	−4	+13	+5	douteuses.
2	+..	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+.	

$$x'=1+\frac{1}{x''}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+5	+13	−4	+33	−15	+16	+14	+8	4 racines *imaginaires.*
1	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+...	

Résumé.

Une seule racine *réelle* comprise entre 2 et 3.

Addition au numéro 2.

Comme le calcul de la recherche des *deux racines indiquées* par les variations du facteur réel du second degré, produit de deux facteurs imaginaires du premier, ne se termine que quand ces deux variations disparaissent entre une *transformée principale* en y et sa première *transformée secondaire* en $(y-1)$, il est nécessaire, pour compléter les développemens contenus dans le *numéro* 2, de faire voir que ces deux variations finissent en effet par disparaître entre deux pareilles transformées.

Et en effet, si l'on pose $y = 1 + y'$, et que l'on ordonne par rapport à y', on obtient

$$
\begin{aligned}
&q'^2\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)^2+\beta^2\right]y'^2\\
&+\left.\begin{array}{r} 2q'^2\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)+\beta^2\right]\\ +\,2p'q'\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)+\beta^2\right]\end{array}\right\}y'\\
&+\left.\begin{array}{r} q'^2\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)^2+\beta^2\right]\\ +\,2p'q'\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)+\beta^2\right]\\ +\,p'^2\left[\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)^2+\beta^2\right]\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

Or, on voit d'abord que le coefficient du terme en y'^2 et le terme sans y', sont essentiellement positifs, car ils ne sont respectivement autre autre chose que

$$(q-q'\alpha)^2+q'^2\beta^2,$$

et

$$[(q-q'\alpha)+(p-p'\alpha)]^2+(q'+p')^2\beta^2.$$

Quant au coefficient de y', il peut se mettre sous la forme suivante:

$$2q'\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)(q-q'\alpha+p-p'\alpha)+(q'+p')\beta^2\right],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2q'(q'+p')\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{q+p}{q'+p'}-\alpha\right)+\beta^2\right].$$

Maintenant, d'après une propriété des fractions continues, $\frac{q+p}{q'+p'}$ est compris entre $\frac{p}{p'}$ et α; de sorte de $\left(\frac{q+p}{q'+p'}-\alpha\right)$, étant de même signe que $\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)$, est de signe contraire à $\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)$; et par suite le produit $\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{q+p}{q'+p'}-\alpha\right)$ est négatif. Comme d'ailleurs la somme de ses facteurs vaut $\pm\left(\frac{q}{q'}-\frac{q+p}{q'+p'}\right)=\frac{1}{q'(q'+p')}$, et que par conséquent ce produit a lui-même pour valeur *maximum* $\frac{1}{4q'^2(q'+p')^2}$, nombre qui peut devenir moindre que toute fraction donnée, il s'ensuit que sa racine carrée ou $\frac{1}{2q'(q'+p')}$ finira par devenir moindre que β; et alors le facteur du second degré en y' que nous considérons, n'aura que des permanences; *ce qu'il fallait prouver.*

Il est bon de faire également une observation sur les facteurs réels du premier degré et de la forme $(y-\varphi)$, pour lesquels nous avons dit que l'on doit avoir $\varphi>1$. Le calcul que l'on exécute peut bien, à la vérité, donner implicitement lieu à de semblables facteurs dans lesquels le nombre φ soit moindre que *l'unité*. Mais outre que ces facteurs doivent évidemment perdre leur variation à la transformation suivante, il est facile de reconnaître encore, qu'ils correspondent à des racines réelles de l'équation proposée, exprimables par des fractions continues identiques jusqu'à la précédente réduite exclusivement, à la fraction calculée; de telle sorte que pour représenter ces racines, il faudrait reprendre la même fraction continue, en altérant seulement la dernière réduite par une augmentation convenable du quotient incomplet qui avait servi à la former.

Il serait sans doute superflu d'entrer dans plus de détails à ce sujet.