JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-M. FAVRE-ROLLIN

Intégration de l'équation $\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}} + \frac{\mathrm{P}d^n y}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n y}{dx^n}$+etc.$=$ V, dans laquelle on suppose p, q, m, n, etc., des nombres entiers; P, Q, etc. des coefficients constants et V une fonction quelconque de la variable indépendante x.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 339-340.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__339_0>

Intégration de l'équation $\dfrac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}} + \dfrac{Pd^m y}{dx^m} + \dfrac{Qd^n y}{dx^n} + \text{etc.} = V$, *dans laquelle on suppose* p, q, m, n, *etc., des nombres entiers;* P, Q, *etc. des coefficients constans et* V *une fonction quelconque de la variable indépendante* x;

Par A.-M. FAVRE-ROLLIN (*).

Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il y a dans le premier membre de l'équation proposée trois termes seulement : le lecteur verra sans peine que notre méthode reste la même quel que soit le nombre des termes de ce premier membre.

Soit donc l'équation
$$\frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} + \frac{Pd^m y}{dx^m} + \frac{Qd^n y}{dx^n} = V. \qquad (1)$$

Je prends la différentielle à indice $\frac{p}{q}$ de chaque membre, et je trouve
$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \frac{Pd^{m+\frac{p}{q}}y}{dx^{m+\frac{p}{q}}} + \frac{Qd^{n+\frac{p}{q}}y}{dx^{n+\frac{p}{q}}} = \frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}},$$
ce qui revient à
$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n}\right)\frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} = \frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}}. \qquad (2)$$

Substituant dans l'équation (2) la valeur de $d^{\frac{p}{q}}y$ tirée de l'équation (1), on a

---

(*) J'ai traité cette question et d'autres plus générales dans un Mémoire destiné au prochain cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*. (J. Liouville.)

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^ny}{dx^n}\right)\left(\mathrm{V} - \mathrm{P}\,\frac{d^my}{dx^m} - \frac{\mathrm{Q}d^ny}{dx^n}\right) = \frac{d^{\frac{p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{\frac{p}{q}}},$$

ou bien

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} - \left(\mathrm{P}^2\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} + 2\mathrm{PQ}\,\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}} + \mathrm{Q}^2\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right) = \frac{d^{\frac{p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{\frac{p}{q}}} - \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n}{dx^n}\right)\mathrm{V},$$

équation que je mets sous la forme

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} - \left(\frac{\mathrm{P}d^my}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^ny}{dx^n}\right)^2 = \frac{d^{\frac{p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{\frac{p}{q}}} - \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n}{dx^n}\right)\mathrm{V}, \qquad (3)$$

en observant que les exposants du développement de $\left(\frac{\mathrm{P}d^my}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^ny}{dx^n}\right)^2$, par rapport aux quantités $\frac{d^my}{dx^m}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ devront porter sur les indices de différentiation, et non sur ces quantités elles-mêmes, et indiqueront combien de fois les indices m et n doivent être répétés et non combien de fois $\frac{d^my}{dx^m}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ doivent être multipliés par eux-mêmes.

Traitant l'équation (3), comme on a traité l'équation (1), on arrivera facilement à la nouvelle équation

$$\frac{d^{\frac{3p}{q}}y}{dx^{\frac{3p}{q}}} + \left(\frac{\mathrm{P}d^my}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^ny}{dx^n}\right)^3 = \frac{d^{\frac{2p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{\frac{2p}{q}}} - \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n}{dx^n}\right)\frac{d^{\frac{p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{\frac{p}{q}}} + \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n}{dx}\right)^2\mathrm{V}.$$

En continuant ainsi l'on aura, si q est un nombre entier, l'équation finale

$$\frac{d^{q\cdot\frac{p}{q}}y}{x^{q\cdot\frac{p}{q}}} \pm \left(\frac{\mathrm{P}d^my}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^my}{dx^n}\right)^q = \left\{\begin{array}{l} \frac{d^{(q-1)\frac{p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{(q-1)\frac{p}{q}}} - \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n}{dx^n}\right)\frac{d^{(q-2)\frac{p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{(q-2)\frac{p}{q}}} + \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n}{dx^n}\right)^2\frac{d^{(q-3)\frac{p}{q}}\mathrm{V}}{dx^{(q-3)\frac{p}{q}}} + \ldots \\ \quad \ldots \pm \left(\frac{\mathrm{P}d^m}{dx^m} + \frac{\mathrm{Q}d^n}{dx^n}\right)^{q-1}\mathrm{V} \end{array}\right.$$

facile à intégrer, puisque la variable y n'est plus affectée de différentielles à indices fractionnaires. (Le signe $+$ devra être pris si q est impair, et le signe $-$ devra l'être si q est pair.)

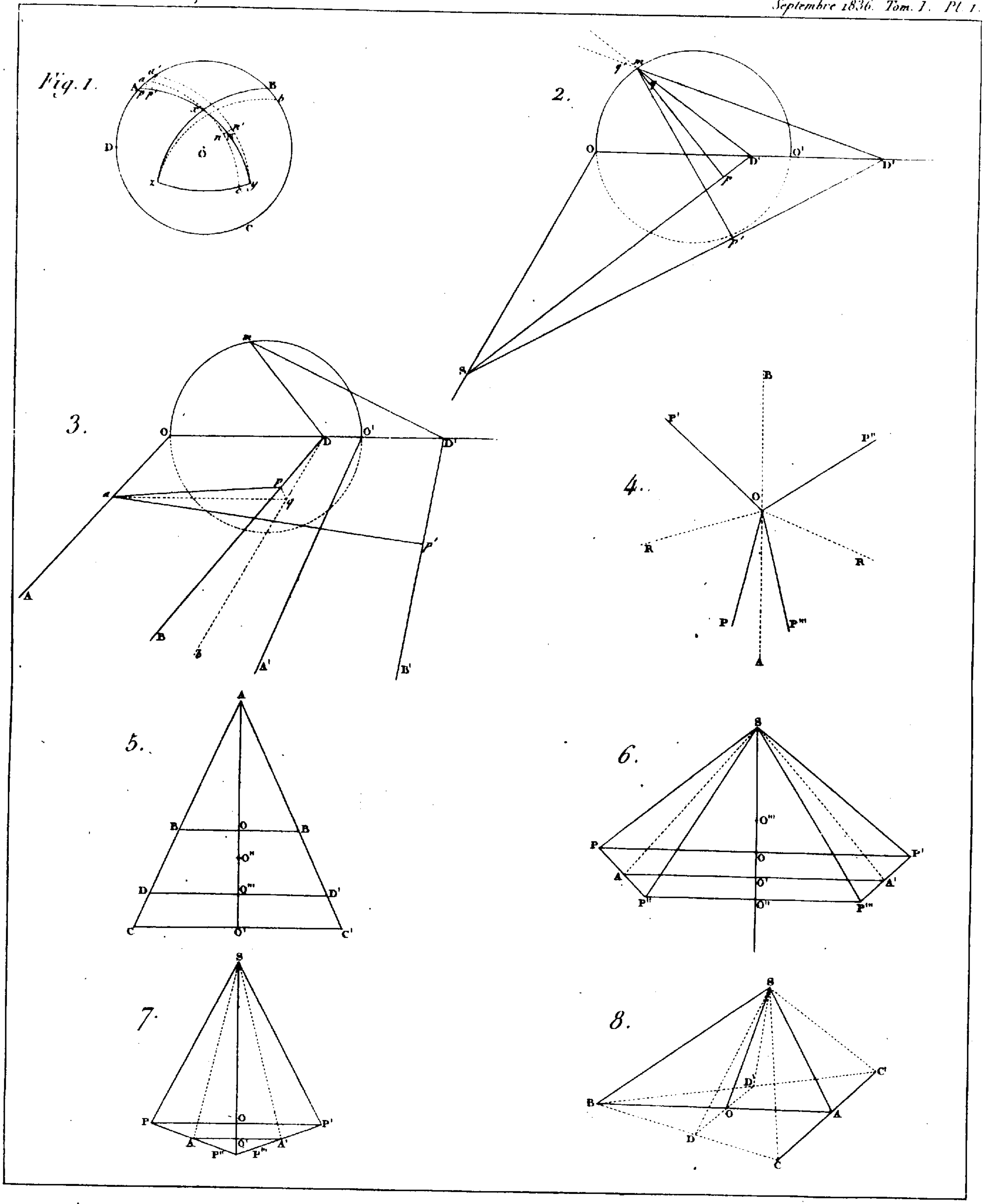
Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.