JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AIMÉ

Démonstration du Parallélogramme des Forces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 335-338.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__335_0>

Démonstration du Parallélogramme des Forces ;

Par M. AIMÉ.

1er Lemme. Si deux forces égales sont appliquées au point o (Planche I, fig. 4), leur résultante, qui divisera leur angle en deux parties égales, sera d'autant plus petite que l'angle approchera plus de deux droits.

Considérons en effet les deux angles $P'oP''$ et PoP''', tels qu'ils soient divisés en deux parties égales par la droite AB, et que l'on ait $PoP''' < P'oP''$; si l'on applique quatre forces égales suivant les directions des côtés de ces angles et qu'on les représente par les lignes oP, oP', oP'', oP''', la résultante des deux forces oP, oP' sera dirigée suivant oR et celle des deux autres suivant oR'. Or, puisque l'angle RoR' est dirigé du côté de oA, la résultante totale tombera sur oA; ce qui prouve clairement que les deux forces oP, oP''' ont une résultante plus grande que celle des deux forces oP', oP''.

2e Lemme. Le rapport entre la résultante de deux forces égales et l'une des composantes est constant, quand l'angle des forces ne variant pas, on fait seulement varier la grandeur des forces.

Cela est évident dans le cas des forces commensurables. Supposons donc deux forces égales appliquées au point A (Planche I, fig. 5), représentées en grandeur par les lignes AC, AC', et incommensurables avec l'unité de force. Considérons deux forces AB, AB' égales et commensurables et supposons que dans ce cas on sache que leur résultante est représentée par $2Ao$, je dis que l'on pourra en conclure que la résultante de AC, AC' est représentée par $2Ao'$. Car si la résultante était représentée en grandeur par $2Ao''$, on pourrait prendre une unité de force assez petite pour qu'en la portant sur AC et AC' un même nombre de fois, on obtînt deux forces égales AD et AD', dont la nouvelle résultante $2Ao'''$ se trouvât comprise entre Ao'' et Ao'. On arriverait donc à une absurdité, car la résultante des deux forces AD et AD′ ne peut être plus grande que celle des deux forces AC, AC′.

3[e] Lemme. Soient quatre forces égales P, P′, P″, P‴ (fig. 6) appliquées au point S; appelons α chacun des deux angles égaux PSP″ et P‴SP′; désignons par β l'angle P″SP‴. Alors l'angle PSP′ sera égal à $\beta + 2\alpha$. Divisons chaque angle α en deux parties égales par les droites SA, SA′; l'angle ASA′ sera $\beta+\alpha$. Divisons en deux parties égales l'angle β par la droite So. Cette construction étant effectuée, je veux établir que si pour trois quelconques des quatre angles α, β, $\beta+\alpha$, $\beta+2\alpha$, la résultante de deux forces égales est représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés qui représentent les forces, elle le sera aussi pour le quatrième.

En effet, menons PoP′, Ao′A′, P″o″P‴. Nous avons par construction $4\mathrm{S}o'=2\mathrm{S}o+2\mathrm{S}o''$; or, dans tous les cas, nous devons avoir la résultante des quatre forces P, P′, P″, P‴ égale à celle des deux résultantes de P, P″ et P′, P‴. Si donc le parallélogramme des forces est vrai par exemple pour les trois angles α, β, $\beta+\alpha$, il sera vrai pour $\beta+2\alpha$. Car soit x la grandeur de la résultante pour l'angle $\beta+2\alpha$: on aura $4\mathrm{S}o'=x+2\mathrm{S}o''$, d'où l'on tire $x=2\mathrm{S}o$. C. Q. F. D.

4[e] Lemme. Si la résultante de deux forces égales faisant entre elles un angle 2α est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés qui représentent ces forces, la même chose aura lieu pour un angle moitié moindre α.

Pour le prouver, faisons $\beta=0$ dans la figure 6 qui se change alors dans la figure 7. Je dis que 2SA représentera la résultante des deux forces égales P, P‴ comprenant entre elles un angle α. En effet, représentons par $2x$ la grandeur inconnue de cette résultante qui divise l'angle PSP″ en deux parties égales : $2x$ sera aussi la résultante des forces P′, P″ : la résultante des forces $2x$ dirigées suivant SA, SA′, n'est autre chose que la résultante totale $4\mathrm{S}o'$; l'angle ASA′ est d'ailleurs égal à α comme l'angle PSP″: en vertu du 2[e] lemme, nous pouvons donc poser $\frac{4\mathrm{S}o'}{2x}=\frac{2x}{\mathrm{SP}}$; et puisque l'on a $\frac{\mathrm{S}o'}{\mathrm{SA}}=\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SP}}$, il en résulte $x=\mathrm{SA}$, C. Q. F. D.

Ces quatre lemmes étant établis, nous pouvons démontrer facilement le théorème suivant :

Théorème. Si deux forces P et P′ faisant entre elles un angle α, sont appliquées à un même point, la résultante de ces deux forces sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent en grandeur et en direction les forces données.

Pour le démontrer, je vais distinguer deux cas: d'abord celui de deux forces égales; ensuite celui de deux forces inégales.

1^er^ *Cas*. Nous avons, établi dans le quatrième lemme, que si deux forces égales faisant un angle α déterminé, ont leur résultante représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les forces, pour un angle moitié moindre $\frac{\alpha}{2}$ la résultante sera aussi représentée par la nouvelle diagonale. Il en sera évidemment de même pour $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}\ldots$, et pour $\frac{\alpha}{2^m}$. Dans le troisième lemme, faisons $6=0$, et nous verrons que si le théorème du parallélogramme des forces est vrai pour un angle α, il sera vrai pour 2α: faisons ensuite $6=\alpha$, et nous verrons qu'il est vrai pour 2α: faisons $6=2\alpha$, et nous verrons qu'il est vrai pour 3α, puis enfin pour $n\alpha$. Ainsi le théorème sera vrai pour $\frac{n\alpha}{2^m}$, si l'on peut trouver pour α une certaine valeur différente de zéro qui satisfasse aux conditions du théorème. Or, dans le cas de trois forces égales situées dans un même plan et faisant entre elles des angles de $120°$, le théorème a lieu évidemment. Donc il est généralement vrai pour un angle dont la valeur numérique peut se mettre sous la forme $\frac{n\times 120°}{2^m}$. Je dis maintenant qu'il est encore vrai même pour un angle dont la valeur numérique ne serait pas réductible à cette forme. En effet, supposons que pour l'angle P″SP‴ (fig. 6), la résultante au lieu d'être 2So″ soit plus petite et représentée par 2So‴. Nous pourrons trouver un angle PSP′ de la forme $\frac{n\times 120°}{2^m}$, et tel que sa résultante 2So soit plus grande que 2So‴; or d'après le 1^er^ lemme, l'angle PSP′ étant plus ouvert que P″SP‴, il correspond à une résultante plus petite. Nous voyons donc que notre supposition nous conduit à une absurdité. On ferait voir de même que la résultante ne peut être plus grande que 2So″. Donc elle lui est égale.

Nous avons dit que le théorème avait lieu évidemment pour l'angle de 120°: on peut faire voir *à priori*, qu'il a encore lieu pour une infinité d'angles. En effet, supposons les trois angles P″SP′, PSP″, ASA′ égaux chacun à 120° (fig. 7). Faisons tourner l'angle P″SP autour de SA, comme charnière, de manière que son plan devienne perpendiculaire à celui de la figure. Faisons tourner de même P′SP‴ autour de SA′. Les deux forces P′ et P″ feront alors un certain angle pour lequel je dis que le théorème a lieu. En effet, les résultantes de P′, P″ et de P, P‴ sont égales entre elles; de plus leur somme est égale à celle des deux forces 2SA, 2SA′, où à 4S*o*′. Or, 2S*o*′ est précisément la diagonale du parallélogramme construit sur P et P‴ et aussi de celui construit sur P′, P″. On pourrait répéter la même opération en se servant du nouvel angle PSP‴ et l'on voit que l'on aurait une infinité d'angles différents avant d'arriver à un angle égal à deux droits.

2ᵉ *Cas*. Il reste à examiner le cas de deux forces inégales faisant entre elles un angle quelconque.

Représentons par BS et SA (fig. 8) la grandeur et la direction des deux forces données. Cherchons la résultante de ces deux forces. Pour la trouver, nous pouvons appliquer sur BS une autre force égale à BS, sur SA une autre force égale à SA.

Dans ce nouvel état, la résultante totale aura la direction et une grandeur double de la première résultante. Or je dis qu'on peut facilement trouver cette nouvelle force. En effet par SA, supposé plus petit que BS, nous pouvons mener un plan perpendiculaire à celui du triangle BSA, et construire sur la ligne CC′ perpendiculaire à SA un triangle isoscèle dont les deux côtés soient égaux chacun à BS. Nous pourrons remplacer les deux forces SA par les nouvelles forces SC, SC′. Combinons maintenant BS avec SC: nous aurons une résultante égale à 2SD; de même BS et SC′ nous donneront 2SD′ égal à 2SD. Donc la résultante totale est égale à 4S*o*; donc dans le cas de deux forces quelconques faisant un angle aussi quelconque entre elles, la résultante est égale à la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés qui représentent les forces en grandeur et en direction.