JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SAINT-GUILHEM

Théorie nouvelle du Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 309-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__309_0>

THÉORIE NOUVELLE

Du Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe;

PAR M. St.-GUILHEM,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

LEMME 1er. Si les droites oa_1, oa_2, oa_3, etc., représentent les composantes de la vitesse oa dont un point o est animé, je dis que si l'on fait tourner un corps solide d'un mouvement de rotation autour de l'axe oa, avec une vitesse angulaire égale à oa, on pourra considérer ce corps comme tournant à la fois d'un mouvement de rotation autour des axes oa_1, oa_2, oa_3, etc., avec des vitesses angulaires respectivement égales à oa_1, oa_2, oa_3, etc.

Pour le démontrer, menons par le point o un plan perpendiculaire à oa; prenons dans ce plan un point m situé à l'unité de distance du point o; si nous supposons ce point doué d'une vitesse angulaire égale à oa autour de oa, le corps dont il s'agit étant un corps solide, il suffira de prouver que le point m satisfait aux conditions énoncées. Or, menons par le point m un plan perpendiculaire à om; projetons sur ce plan les droites oa, oa_1, oa_2, etc. et appelons ces projections p, p_1, p_2, etc. : puisque des droites parallèles se projettent toujours sur un plan suivant des droites parallèles, il est clair que la droite p représenterait en grandeur et en direction la résultante des vitesses p_1, p_2, p_3, etc., si le point m était doué de ces vitesses. Imaginons que les droites p, p_1, p_2, p_3, etc., formant un système solide, tournent autour du point m dans le plan perpendiculaire à om, jusqu'à ce que la droite p vienne coïncider en direction avec la vitesse du point m; elle coïncidera aussi en grandeur avec cette vitesse, car la droite oa étant parallèle au plan de projection s'est projetée sur ce plan dans sa véritable grandeur. La vitesse angulaire du point m sera donc la résultante des vitesses p_1, p_2, p_3, etc., dans leur nouvelle position. Désignons par l_1, l_2, l_3, etc., les distances du point m aux axes respectifs oa_1, oa_2, oa_3, etc. On voit facilement par la manière dont nous avons obtenu les droites p_1, p_2, p_3, etc. que l'on a les relations

$$p_1 = \overline{oa_1}.l_1, \quad p_2 = \overline{oa_2}.l_2, \quad p_3 = \overline{oa_3}.l_3, \text{ etc.}$$

Mais les droites p_1, p_2, p_3, etc., dans leur nouvelle position, sont respectivement perpendiculaires aux axes $\overline{oa_1}$, $\overline{oa_2}$, $\overline{oa_3}$, etc., et distantes de ces axes des quantités l_1, l_2, l_3, etc.: donc le point m peut être considéré comme tournant à la fois d'un mouvement de rotation autour des axes oa_1, oa_2, oa_3, etc. avec des vitesses angulaires égales à oa_1, oa_2, oa_3, etc.; donc, etc.

Observation. Le sens dans lequel le corps tourne autour des axes oa_1, oa_2, oa_3, etc., est déterminé par la condition que si l'on fait coïncider successivement les directions de ces axes, sans altérer le mouvement de rotation du corps autour de ces axes, avec l'axe primitif oa, le corps tournera autour de oa dans le sens où le corps tournait autour de cet axe.

Lemme 2. Si un corps solide en mouvement renferme un point fixe, on peut se représenter le mouvement du corps comme un mouvement de rotation autour d'un axe dont la position varie au commencement de chaque instant et reste fixe pendant cet instant.

En effet, soit o le point fixe; m un point quelconque du corps dont la vitesse ne soit pas nulle. Menons par le point m un plan perpendiculaire à la vitesse de ce point; il est facile de voir que tous les autres points du corps situés dans ce plan, auront une vitesse perpendiculaire à ce plan. En effet, soit m' un autre point du corps situé dans ce plan: puisque le point m' reste à une distance constante du point o, sa vitesse sera nécessairement perpendiculaire à om': elle sera aussi perpendiculaire à la droite mm', car cette droite faisant au bout d'un instant un angle infiniment petit avec sa première position (sans quoi il y aurait des points du corps, situés à une distance finie du point fixe, qui auraient des vitesses infiniment grandes, ce qu'on ne suppose pas), le point m' se mouvra nécessairement comme le point m suivant une droite perpendiculaire à mm'; donc la vitesse du point m' est perpendiculaire à la fois aux deux droites om', mm'; donc elle est perpendiculaire à leur plan. Si l'on construit d'une manière semblable le plan correspondant à un autre point du corps non situé dans le premier plan, il est visible que l'intersection de ces deux plans devra être immobile, car autrement les vitesses des différents points seraient à la fois perpendiculaires aux deux plans, ce qui est absurde. Donc, etc.

L'axe immmobile autour duquel le corps tourne pendant un instant, à une époque quelconque, est l'axe *instantané* du corps à cette époque.

Nota. Les deux lemmes précédents sont relatifs à des propriétés purement géométriques des corps solides : nous n'avons voulu employer pour les établir que des considérations de pure géométrie.

Recherche des équations différentielles du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

J'appellerai force effective la force qui agissant dans la direction de la vitesse produirait dans le premier instant la variation qu'éprouve cette vitesse dans cet instant.

Lorsqu'un corps sera considéré comme tournant à la fois autour de plusieurs axes, je nommerai la force effective correspondante au mouvement de rotation qui est censé avoir lieu autour de l'un des axes, la force effective de rotation autour de cet axe.

Le corps solide que nous allons considérer ayant un point fixe, j'imaginerai que l'on ait mené par ce point trois axes rectangulaires ox, oy, oz, immobiles dans le corps, et pour simplifier les calculs, je supposerai que ces trois axes sont les trois axes principaux du corps relatifs au point fixe.

Je regarderai, comme positifs, les moments des forces qui tendent à faire tourner le corps, 1°. autour de l'axe ox, des y positives vers les z positives ; 2°. autour de l'axe oy, des z positives vers les x positives ; 3°. autour de l'axe oz, des x positives vers les y positives.

L'axe instantané aura sa direction positive déterminée de manière qu'en faisant coïncider cette direction avec la direction positive de l'axe ox par exemple, le corps tournera des y positives vers les z positives ; il est facile de voir que si l'on fait coïncider la direction positive de l'axe instantané avec la direction positive de l'axe oy ou de l'axe oz, le corps tournera des z positives vers les x positives ou des x positives vers les y positives.

Les vitesses angulaires du corps autour des axes ox, oy, oz s'obtiendront, pour une époque quelconque du mouvement, en prenant sur la direction positive de l'axe instantané une longueur égale à la vitesse angulaire du corps autour de cet axe et en projetant cette droite sur les trois axes ox, oy, oz; les projections représenteront, pour la grandeur et pour le signe, les vitesses angulaires du corps autour des trois axes. Si ces projections sont positives, les mouvements de rotation auront lieu, 1°. autour de l'axe ox, des y positives vers les z positives; 2°. autour de l'axe oy, des z positives vers les x positives ; 3°. autour de l'axe oz, des x positives vers les y positives. Si quelqu'une de ces projections est négative, le mouvement de rotation correspondant aura lieu en sens contraire.

Cela posé, appliquons à chaque point du corps une force égale et contraire à la force effective qui sollicite ce point; il est évident qu'en vertu des liaisons qui unissent invariablement les différents points du corps, il y aura équilibre entre les forces nouvellement appliquées, les forces centrifuges développées autour de l'axe instantané et les forces motrices. Donc la somme des moments des forces effectives par rapport à chacun des axes ox, oy, oz, est égale à la somme des moments des forces centrifuges, plus la somme des moments des forces motrices, par rapport au même axe.

Évaluons chacune de ces sommes. Soit m un point du corps dont la masse est m, ρ sa distance à l'axe instantané, ω la vitesse angulaire du corps autour de cet axe. La force effective qui sollicite la molécule m a pour expression $m\rho\,\frac{d\omega}{dt}$: elle peut, d'après notre premier lemme, être remplacée par les trois forces effectives de rotation $ma\,\frac{dp}{dt}$, $mb\frac{dq}{dt}$, $mc\frac{dr}{dt}$ autour des axes ox, oy, oz; a, b, c, désignant les distances du point m aux axes ox, oy, oz, et p, q, r les vitesses angulaires du corps autour des mêmes axes, lorsque le corps est considéré comme tournant à la fois autour de ces trois axes.

Les moments de ces forces autour des axes ox, oy, oz sont respectivement $ma^2 \frac{dp}{dt}$, $mb^2 \frac{dq}{dt}$, $mc^2 \frac{dr}{dt}$. Or, d'après une propriété facile à démontrer des axes principaux, les forces effectives de rotation autour de l'un des axes principaux se font équilibre autour de chacun des deux autres (*). Donc, la somme des moments des forces effectives, par rapport à chacun des trois axes principaux, est égale à la somme des moments des forces effectives de rotation autour de ces axes, par rapport aux mêmes axes. Donc, si l'on désigne par A, B, C les moments d'inertie du corps, par rapport aux trois axes principaux, les sommes des moments des forces effectives autour de ces axes seront respectivement $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$.

Passons à l'évaluation des moments U, V, W des forces centrifuges. Soient x, y, z, les coordonnées du point m, par rapport aux axes ox, oy, oz; h la distance de l'origine des axes au plan perpendiculaire à l'axe instantané, mené par le point m; la force centrifuge du point m sera évidemment égale à $m\omega^2\rho$. Cette force sera équivalente, à cause du point fixe, à la force $m\omega^2 h$ appliquée au point m, suivant une droite

(*) Considérons la force $mb\frac{dq}{dt}$; le moment de cette force autour de l'axe ox est, comme il est facile de le voir par une figure, $-mb\frac{dq}{dt}\cdot\frac{x}{b}\cdot y = -\frac{dq}{dt}\cdot mxy$. (Le signe — provient de ce que la force $mb\frac{dq}{dt}$ tendant par hypothèse à faire tourner le point m, qui est dans l'angle des coordonnées positives, des z positives vers les x positives, tendra à faire tourner ce point, autour de l'axe ox, des z positives vers les y positives ; par conséquent son moment par rapport à l'axe des x sera négatif.) La somme des moments des forces effectives de rotation autour de l'axe des y, par rapport à l'axe des x, sera donc $-\frac{dq}{dt}\Sigma mxy$, d'où l'on voit que ces forces se feront équilibre autour de l'axe des x, si l'on a $\Sigma mxy = 0$, c'est-à-dire si l'axe des x est un axe principal du corps. En faisant les mêmes calculs pour tous les autres cas, on tirera toujours une conclusion semblable ; donc, etc. Si les axes ox, oy, oz n'étaient pas les axes principaux du corps, ces mêmes calculs feraient connaître les moments des forces dont il s'agit.

parallèle à l'axe instantané. Cette dernière force fera avec les axes des angles dont les cosinus seront $\pm\frac{p}{\omega}$, $\pm\frac{q}{\omega}$, $\pm\frac{r}{\omega}$ (le signe $+$ ou le signe $-$ ayant lieu suivant que la force est parallèle à la direction positive ou négative de l'axe instantané). Les projections de cette force sur les axes ox, oy, oz seront donc $\pm m\omega ph$, $\pm m\omega qh$, $\pm m\omega rh$: par conséquent, les moments de la force $m\omega^2 h$ autour des axes ox, oy, oz, seront, soit que l'on adopte le signe supérieur ou le signe inférieur, $m\omega h(ry - qz)$, $m\omega h(pz - qx)$, $m\omega h(qx - py)$.

Remarquons d'ailleurs que le plan mené par le point m perpendiculairement à l'axe instantané a pour équation

$$h = \frac{p}{\omega}x + \frac{q}{\omega}y + \frac{r}{\omega}z:$$

en substituant pour h cette valeur dans les expressions précédentes et faisant la somme de tous les moments relatifs à chaque axe, on aura

$$\begin{aligned} U &= \Sigma m(ry - qz)(px + qy + rz), \\ V &= \Sigma m(pz - rx)(px + qy + rz), \\ W &= \Sigma m(qx - py)(px + qy + rz), \end{aligned}$$

ou simplement, en observant que l'on a $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mzx = 0$, $\Sigma mxy = 0$,

$$\begin{aligned} U &= rq(B - C), \\ V &= pr(C - A), \\ W &= qp(A - B). \end{aligned}$$

Il ne reste plus à évaluer que les moments des forces motrices données par rapport aux axes ox, oy, oz, ce qui ne peut présenter aucune difficulté, lorsqu'on connaît la grandeur et la position de ces forces par rapport à ces axes; en désignant les trois sommes de moments de ces forces, par rapport à ces trois axes, par F, G, H, on aura définitivement les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= F + rq(B - C), \\ B\frac{dq}{dt} &= G + pr(C - A), \\ C\frac{dr}{dt} &= H + qp(A - B). \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Ces équations feront connaître, à une époque quelconque, les vitesses angulaires du corps autour des trois axes principaux.

Pour compléter la solution du problème que nous nous sommes proposé, il reste à déterminer la position d'un des axes principaux à une époque quelconque. Pour cela (Planche I, fig. 1) du point o, comme centre avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère; soit ABC le cercle suivant lequel elle coupe un plan fixe dans l'espace; x, y, z les points où les axes principaux ox, oy, oz, viennent rencontrer la surface de cette sphère; A le point où le grand cercle xy vient rencontrer le cercle fixe ABC. Soit ψ la distance angulaire du point A à un point fixe D du cercle ABC; θ l'angle que l'arc Ax fait avec l'arc AD et ψ, l'arc Ax. Il est évident qu'au moyen des trois quantités ψ, θ et φ le point x sera parfaitement déterminé dans l'espace. Cherchons les variations qu'éprouvent les trois quantités ψ, θ et φ dans l'instant dt. D'après les principes du calcul infinitésimal, la variation de chacune de ces quantités sera égale à la somme des variations infiniment petites qu'elle éprouvera en faisant tourner le corps successivement autour des trois axes ox, oy, oz, avec les vitesses angulaires p, q, r.

Nous désignerons la variation d'une quelconque de ces quantités résultant de la rotation du corps autour de l'axe ox par la caractéristique d_1; autour de l'axe oy par d_2, autour de l'axe oz par d_3. D'après cette convention, on aura $d\psi = d_1\psi + d_2\psi + d_3\psi$, et ainsi des autres.

Supposons qu'en faisant tourner le corps autour de l'axe ox, des y positives vers les z positives, le cercle Ax ait pris la position ax; qu'en faisant tourner le corps autour de oy, des z positives vers les x positives, le cercle Ay ait pris la position $a'y$; enfin, qu'en faisant tourner le corps autour de oz, des x positives vers les y positives, le cercle Bz ait pris la position bz.

Abaissons des points a et a' des perpendiculaires sur l'arc Ax, prenons à partir du point A sur l'arc Ax, une longueur AN égale à 90°; abaissons du point N deux perpendiculaires, l'une sur le cercle ax, l'autre sur le cercle $a'y$.

Cela posé, rappelons-nous que dans un triangle rectiligne rectangle, un côté est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle adjacent et que les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons. Nous trouverons facilement à l'aide de la figure, les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} d_1\varphi &= d_1\psi \cos\theta, \\ d_2\varphi &= d_2\psi \cos\theta, \\ d_3\varphi &= rdt \\ 0 &= d_3\psi \cos\theta, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1\psi \sin\theta &= pdt \,.\, \sin\varphi, \\ d_2\psi \sin\theta &= qdt \,.\, \cos\varphi, \\ d_3\psi \sin\theta &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1\theta &= -\, pdt \,.\, \cos\varphi, \\ d_2\theta &= qdt \,.\, \sin\varphi, \\ d_3\theta &= 0; \end{aligned}\right\}$$

de ces équations on déduit immédiatement,

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= d\psi \cos\theta + rdt \\ d\psi \sin\theta &= pdt \sin\varphi + qdt \cos\varphi, \\ d\theta &= qdt \sin\varphi - pdt \,.\, \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Ces trois équations jointes aux équations (A) résolvent complétement le problème du mouvement d'un corps solide autour du point fixe.

Nota. En tirant des équations (B), les valeurs de pdt, qdt, rdt, on obtient facilement les équations que l'on donne ordinairement dans les traités de Mécanique.