JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Démonstration d'un Théorème dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 269-277.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__269_0>

DÉMONSTRATION

D'un Théorème dû à M. STURM *et relatif à une classe de fonctions transcendantes ;*

PAR JOSEPH **LIOUVILLE**.

(Présentée à l'Académie des Sciences le 27 juin 1836.)

1. Soient x une variable indépendante; x, X, deux limites de cette variable rangées par ordre de grandeur; et g, k, l, trois fonctions de x dont les deux premières sont constamment > 0, tandis que la troisième est à volonté positive ou nulle. En attribuant au paramètre r une valeur convenable, on peut toujours trouver une fonction V qui ne devienne identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, x restant indéterminée, et qui, en outre, satisfasse à l'équation différentielle indéfinie

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)\,V = 0,$$

et aux conditions définies

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}, \\ \dfrac{dV}{dx} + HV = 0 \text{ pour } x = X; \end{cases}$$

h et H désignent deux nombres compris entre 0 et $+\infty$, ou même égaux soit à 0, soit à $+\infty$.

On se sert de la fonction V pour la solution de la plupart des problèmes physico-mathématiques. M. Sturm en a étudié avec soin les diverses propriétés; et je crois avoir ajouté à ses recherches quelques résultats nouveaux dans mon mémoire *sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en série dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable* (*). Dans le mémoire cité j'ai pris pour point de départ un théorème général dont l'auteur a bien voulu me communiquer la démonstration encore inédite. Établir rigoureusement ce théorème par une voie simple et très différente de celle qu'a suivie M. Sturm, tel est le but que je me propose aujourd'hui.

2. Pour que la fonction V satisfasse à l'équation (A) et aux conditions définies (B), il faut que le paramètre r soit choisi parmi les racines d'une certaine équation

$$\text{(C)} \qquad \varpi(r) = 0.$$

Les racines de l'équation (C) sont en nombre infini, toutes réelles et inégales. Nous les nommerons $r_1, r_2, \ldots r_m, \ldots r_n \ldots$, et nous les supposerons rangées par ordre de grandeur, en sorte que l'on ait $r_1 < r_2 \ldots < r_m \ldots < r_n$. La racine r_1 peut être nulle ou positive; les autres sont > 0. Nous désignerons par $V_1(x)$ ou par V_1 ce que devient la fonction V quand on y pose $r = r_1$, et en général par $V_n(x)$ ou par V_n ce que devient V quand on y pose $r = r_n$. Dans son mémoire *sur les équations différentielles linéaires du second ordre* (**), M. Sturm a prouvé qu'entre les limites x, X de la variable x, la fonction V_1 ne s'évanouit jamais; au contraire, la fonction V_n s'évanouit $(n-1)$ fois pour $(n-1)$ valeurs de x inégales entre elles. Ces diverses propriétés de la fonction V résultent d'une analyse aussi directe qu'élégante, et désormais nous les supposerons bien connues.

On sait aussi qu'en désignant par p, q deux indices différents, on a

$$\text{(D)} \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_p V_q \, dx = 0,$$

(*) *Voyez* le cahier de juillet, page 252 de ce volume.
(**) *Voyez* le cahier de mars, page 106 de ce volume.

résultat remarquable dont M. Poisson s'est servi pour prouver la réalité de toutes les racines de l'équation (C).

Désignons par A_m, A_{m+1}, ... A_n des constantes quelconques, et posons

$$U = A_m V_m + A_{m+1} V_{m+1} + \ldots\ldots + A_n V_n;$$

toutes les fois que l'indice p sera choisi hors de la série des nombres m, $m+1$, ... n, on aura, d'après la formule (D),

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g U V_p dx = 0,$$

et c'est ce qui arrivera, par exemple si l'on pose $p=1$, ou $p=2$, ... ou $p=m-1$. Au contraire, si l'indice p est compris dans la série des nombres m, $m+1$, ... n, on aura

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g U V_p dx = A_p \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_p^2 dx,$$

quantité différente de zéro quand le coefficient A_p est lui-même différent de zéro.

On voit par là qu'en excluant le cas particulier où les coefficients A_m, A_{m+1}, ... A_n sont tous égaux à zéro, la fonction U de x ne peut jamais être identiquement nulle entre les limites $x=\mathrm{x}$, $x=\mathrm{X}$; supposons en effet que le coefficient A_p, compris dans la série A_m, A_{m+1}, ... A_n, soit différent de zéro, et nous trouverons l'intégrale $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g U V_p dx$ égale non pas à zéro, mais à $A_p \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_p^2 dx$, ce qui ne pourrait être si l'on avait identiquement $U=0$.

3. Cela posé, quels que soient les coefficients constants A_m, A_{m+1}, ... A_n, pourvu qu'ils ne soient pas tous nuls, je dis que l'équation

$$U = A_m V_m + A_{m+1} V_{m+1} + \ldots\ldots + A_n V_n = 0$$

aura au plus $(n-1)$ racines tant égales qu'inégales, et qu'elle aura au moins $(m-1)$ racines inégales entre elles. Dans cet énoncé on ne considère que des valeurs de x réelles et comprises entre x et X; on fait abstraction des valeurs de x qui sont égales ou inférieures à x, égales ou inférieures à X.

Ce beau théorème, dû à M. Sturm, et dont nous avons tiré ailleurs des corollaires utiles, est évident 1° lorsque le coefficient A_m

ayant une valeur finie, les coefficients $A_{m+1}, \ldots . A_n$ deviennent infiniment petits. Alors en effet l'équation $U=0$ se réduit à $V_m=0$, et possède en conséquence $m-1$ racines inégales $>x$ et $<X$; 2° lorsque le coefficient A_n ayant une valeur finie, les autres coefficients $A_{n-1}, \ldots . A_{m+1}, A_m$ deviennent infiniment petits; alors en effet l'équation $U=0$ se réduisant à $V_n=0$, possède $(n-1)$ racines $>x$ et $<X$, et inégales entre elles. Mais la difficulté est d'en trouver une démonstration applicable à tous les cas.

4. Le théorème de M. Sturm se compose évidemment de deux parties; il est assez facile de voir, et nous montrerons plus bas que la seconde est une conséquence immédiate de la première. Attachons-nous donc à établir d'abord cette première partie, savoir que l'équation $U=0$, dans laquelle l'inconnue x est comprise entre x et X, possède au plus $(n-1)$ racines tant égales qu'inégales.

Pour cela nous ferons usage du principe suivant qui n'est autre chose au fond que le théorème de Rolle: si une fonction $f(x)$, qui ne devient infinie pour aucune valeur de x comprise entre x' et x'', s'annulle à ces deux limites x', x'', et si en outre elle possède $\mu-1$ racines égales ou inégales comprises entre x' et x'', l'équation dérivée $f'(x)=0$ aura au moins μ racines égales ou inégales dans le même intervalle. En supposant toujours $x>x'$ et $<x''$, on peut ajouter que si l'équation $f(x)=0$ a $(\mu'-1)$ racines inégales entre elles, l'équation $f'(x)=0$ en aura au moins μ'.

Soit p un nombre entier positif quelconque auquel nous pourrons successivement attribuer les valeurs $m, m+1, \ldots . n$: on a

$$\frac{d\left(k\frac{dV_p}{dx}\right)}{dx}+(gr_p-l)\,V_p=0,$$

$$\frac{d\left(k\frac{dV_1}{dx}\right)}{dx}+(gr_1-l)\,V_1=0:$$

je retranche ces équations membre à membre, après avoir multiplié la première par V_1, la seconde par V_p: j'obtiens ainsi un résultat que je peux mettre sous la forme

$$(r_{,} - r_p)\, gV_{,}\, V_p\, dx = V_{,}\, \frac{d\left(k\frac{dV_p}{dx}\right)}{dx} - V_p \frac{d\left(k\frac{dV_{,}}{dx}\right)}{dx}:$$

le second membre est la différentielle exacte de la quantité .... $k\left(V_{,}\frac{dV_p}{dx} - V_p\frac{dV_{,}}{dx}\right)$, laquelle se réduit à zéro, lorsque $x = \text{x}$ et lorsque $x = \text{X}$, en vertu des conditions définies (B): intégrant à partir de $x = \text{x}$, il vient donc

$$(r_{,} - r_p)\int_{\text{x}}^{x} gV_{,}\, V_p\, dx = k\left(V_{,}\frac{dV_p}{dx} - V_p\frac{dV_{,}}{dx}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(r_{,} - r_p)\int_{\text{x}}^{x} gV_{,}\, V_p\, dx = kV_{,}^2\,.\,\frac{d\left(\frac{V_p}{V_{,}}\right)}{dx}.$$

Si, dans cette équation, on pose successivement $p = m$, $p = m + 1$, ... $p = n$, qu'on ajoute tous les résultats ainsi obtenus après les avoir multipliés respectivement par les coefficients A_m, A_{m+1} ...., A_n, et que de plus on fasse

$$(r_{,} - r_p)\, A_p = a_p, \ \frac{U}{V_{,}} = \Psi,$$

ce qui donne $a_{,} = 0$, on obtiendra

$$\int_{\text{x}}^{x} gV_{,}\,(a_m V_m + a_{m+1} V_{m+1} + \ldots + a_n V_n)\, dx = kV_{,}^2\, \frac{d\Psi}{dx}.$$

Puisque la fonction $V_{,}$ ne s'évanouit jamais entre les limites $x = \text{x}$, $x = \text{X}$, les racines de l'équation $\Psi = 0$ sont, entre ces limites, les mêmes que les racines de l'équation $U = 0$: nous appellerons μ le nombre de ces racines, et il s'agira de prouver que l'on a $\mu < n - 1$ ou tout au plus $\mu = n - 1$. Or, si l'équation $\Psi = 0$ possède μ racines $> \text{x}$ et $< \text{X}$, l'équation $\frac{d\Psi}{dx} = 0$, ou

$$\int_{\text{x}}^{x} gV_{,}\,(a_m V_m + a_{m+1} V_{m+1} + \ldots + a_n V_n)\, dx = 0,$$

en aura aussi $(\mu - 1)$ au moins $> \text{x}$ et $< \text{X}$: il est d'ailleurs évident que cette équation est satisfaite lorsque l'on pose dans son premier membre $x = \mathrm{x}$: elle l'est également lorsque l'on pose $x = \mathrm{X}$; car, en vertu de la formule (D), son premier membre se réduit alors à $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} a_1\, g\mathrm{V}_1^2\, dx$, quantité nulle puisque $a_1 = 0$. Donc la dérivée de ce premier membre doit s'évanouir au moins μ fois entre les limites x, X de l'inconnue x: en d'autres termes l'équation

$$a_m \mathrm{V}_m + a_{m+1} \mathrm{V}_{m+1} + \ldots\ldots + a_n \mathrm{V}_n = 0,$$

doit posséder au moins μ racines $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$.

Ainsi en admettant que l'équation $\mathrm{U} = 0$ possède μ racines dans l'intervalle compris depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, on est contraint d'admettre que l'équation

$$\mathrm{A}_m (r_m - r_1)\, \mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n (r_n - r_1)\, \mathrm{V}_n = 0,$$

possède μ racines au moins dans le même intervalle. Répétons notre raisonnement, et nous verrons qu'il en est de même *à fortiori* des équations suivantes:

$$\mathrm{A}_m (r_m - r_1)^2\, \mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n (r_n - r_1)^2\, \mathrm{V}_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{A}_m (r_m - r_1)^i.\, \mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n (r_n - r_1)^i.\, \mathrm{V}_n = 0,$$

quelque grand que soit le nombre i. Dans cet énoncé, nous considérons toutes les racines tant égales qu'inégales; mais en se bornant aux racines inégales entre elles, on aurait encore le même théorème : c'est ce qui résulte évidemment de la deuxième partie du principe fondamental posé plus haut.

En divisant les deux membres de la dernière de nos équations par $(r_n - r_1)^i$, on la met sous la forme

$$\text{(E)} \qquad \mathrm{A}_m \left(\frac{r_m - r_1}{r_n - r_1}\right)^i + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n \mathrm{V}_n (x) = 0.$$

L'équation (E) doit avoir μ racines au moins, quelque grand qu'on prenne le nombre entier i. Mais puisque les quantités positives $r_1, \ldots r_m, \ldots r_n$ sont rangées par ordre de grandeur, cette équation se réduit à $\mathrm{V}_n = 0$ lorsqu'on attribue à i une valeur infiniment grande; et alors elle possède $(n-1)$ racines: donc on a $\mu < n-1$ ou tout au plus $\mu = n-1$, ce qu'il fallait démontrer.

5. On rendra la fin de cette démonstration plus rigoureuse encore en la présentant d'une autre manière. Faisons $\left(\frac{r_{n-1}-r_1}{r_n-r_1}\right)^i = \omega$, l'équation (E) dont on divisera les deux membres par A_n, peut être mise sous la forme

$$V_n(x) + \omega\Pi(x) = 0,$$

$\Pi(x)$ désignant une fonction qui ne dépasse jamais un certain *maximum* M et dont la dérivée $\Pi'(x)$ ne surpasse jamais un autre *maximum* N: le coefficient ω devient infiniment petit lorsqu'on prend i infiniment grand. Les $(n-1)$ racines de l'équation $V_n(x) = 0$, comprises entre x et X, sont toutes inégales. Cela étant, on peut diviser X — x en intervalles assez petits pour que dans les uns $V_n(x)$ conserve toujours une valeur $> \omega M$, tandis que dans les autres $V_n(x)$ s'évanouira et changera de signe, la dérivée $V'_n(x)$ restant constamment $> \omega N$: dans les premiers, il est évident que l'on a $V_n(x)^2 > \omega^2\Pi(x)^2$, et que par suite l'équation $V_n(x) + \omega\Pi(x) = 0$ n'est jamais satisfaite; pour étudier ce qui arrive dans les seconds, nommons α une quelconque des racines de $V_n(x) = 0$, et désignons par h une quantité finie très petite; le coefficient ω étant infiniment petit, les deux fonctions

$$V_n(\alpha - h) + \omega\Pi(\alpha - h), \quad V_n(\alpha + h) + \omega\Pi(\alpha + h)$$

auront les mêmes signes que leurs premiers termes, c'est-à-dire des signes opposés: donc entre les limites $\alpha - h$, $\alpha + h$ de x, l'équation

$$V_n(x) + \omega\Pi(x) = 0$$

a au moins une racine: d'ailleurs elle n'en a qu'une, puisque la dérivée $V'_n(x) + \omega\Pi'(x)$, dont le premier terme $V'_n(x)$ reste $> \omega N$, ne s'évanouit pour aucune valeur de x comprise entre $\alpha - h$ et $\alpha + h$.

Outre les $(n-1)$ racines $>$ x et $<$ X, l'équation $V_n = 0$ peut avoir encore dans certains cas la racine x et la racine X. Le cas où la racine α serait ainsi égale à une des limites x, X mérite un examen spécial. Supposons par exemple $\alpha = \mathrm{x}$: on traiterait de la même manière le cas où $\alpha = \mathrm{X}$. Or, $\mathrm{V}_n(\mathrm{x})$ étant $= 0$, la dérivée $\mathrm{V}'_n(x)$ ou $\frac{d\mathrm{V}_n(\mathrm{x})}{d\mathrm{x}}$ ne peut pas être nulle : la première des équations (B), lorsqu'on y pose $r = r_n$ nous donne donc $h = \infty$, et par suite $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, quelle que soit la valeur de r : l'équation (E) et l'équation $\mathrm{V} = 0$ sont donc satisfaites en posant $x = \mathrm{x}$; mais nous devons faire abstraction de cette racine $x = \mathrm{x}$, puisque, dans l'énoncé du théorème de M. Sturm, on ne considère que les racines $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$. Maintenant de $x = \mathrm{x}$ à $x = \mathrm{x} + h$, h étant une quantité très petite, je dis que l'on n'a jamais

$$\mathrm{A}_n\mathrm{V}_n(x) + \omega\Pi(x) = 0 :$$

en effet il faudrait pour cela (d'après le théorème de Rolle) que, dans le même intervalle h, la dérivée $\mathrm{V}'_n(x) + \omega\Pi'(x)$ pût s'évanouir, ce qui n'a pas lieu.

En résumé l'équation (E), où l'on suppose i infini, a $(n-1)$ racines $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$, comme l'équation $\mathrm{V}_n(x) = 0$; et l'on a $\mu < n - 1$ ou tout au plus $\mu = n - 1$, comme nous l'avons dit ci-dessus.

6. La seconde partie du théorème de M. Sturm pourrait se démontrer par une méthode semblable à celle dont nous venons de faire usage, ou plutôt par une méthode inverse. En effet puisque le nombre des racines inégales entre elles d'une équation

$$\mathrm{A}_m\mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{V}_n = 0$$

est *tout au plus* égal au nombre des racines de l'autre équation

$$\mathrm{A}_m(r_m - r_1)^i\,\mathrm{V}_m + \ldots + \mathrm{A}_n(r_n - r_1)^i.\,\mathrm{V}_n = 0,$$

en remplaçant A_m par $\mathrm{A}_m(r_m - r_1)^{-i}, \ldots\ldots \mathrm{A}_n$ par $\mathrm{A}_n(r_n - r_1)^{-i}$, on en conclut réciproquement que l'équation

$$\mathrm{A}_m\mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{V}_n = 0$$

a *au moins* autant de racines inégales entre elles que l'équation

$$\mathrm{A}_m(r_m - r_1)^{-i}.\,\mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n(r_n - r_1)^{-i}.\,\mathrm{V}_n = 0,$$

laquelle en possède $m - 1$ lorsqu'on fait $i = \infty$.

Mais la première partie du théorème de M. Sturm étant admise, la seconde s'en déduit sans peine; et même les raisonnements qu'il faut employer pour cela sont écrits tout au long dans le mémoire sur le *développement des fonctions en série* que j'ai cité plus haut. Nous renverrons donc le lecteur au lemme premier et à la proposition démontrée n° VI de ce mémoire.

Pour établir ce lemme et cette proposition, il suffit évidemment de connaître la première partie du théorème de M. Sturm que nous venons de démontrer. Or, en vertu de la proposition établie n° VI du mémoire en question (dans l'énoncé de laquelle il nous est permis de remplacer n par $m - 1$, et $\varphi(x)$ par $g\,\varphi(x)$, puisque g ne s'évanouit jamais), quand l'équation

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}\varphi(x)\, dx = 0,$$

est satisfaite en remplaçant r par une quelconque des racines $r_1, r_2, \ldots . r_{m-1}$, la fonction $\varphi(x)$ change de signe $(m - 1)$ fois au moins entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$ (*). Ce cas est précisément celui où se trouve la fonction

$$\varphi(x) = \mathrm{U} = \mathrm{A}_m \mathrm{V}_m + \ldots . + \mathrm{A}_n \mathrm{V}_n:$$

donc le premier membre de l'équation $\mathrm{U} = 0$ change au moins $(m - 1)$ fois de signe lorsqu'on fait croître x, d'une manière continue, depuis x jusqu'à X: donc enfin *à fortiori* l'équation $\mathrm{U} = 0$ a au moins $(m - 1)$ racines inégales comprises entre x et X, ce qu'il fallait prouver.

(*) Le n° VI du mémoire dont nous parlons, répond aux pages 264 et 265 de ce volume : il s'y est glissé une faute grave, que l'on pourra corriger à la main sur chaque exemplaire, à l'aide de l'*errata* suivant : Page 264, ligne 8, et Page 265, ligne 5, au lieu de au moins $(n - 1)$ fois, *lisez :* au moins n fois. Page 264, ligne 11 et ligne 21, au lieu de m étant $< n$, *lisez :* m étant $\leqq n$.