JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Théorème sur les quantités incommensurables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 266-268.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__266_0>

THÉORÈME

Sur les quantités incommensurables;

PAR M. LEBESGUE.

Dans un mémoire qui fait partie du 3e cahier de ce journal, M. Léger s'occupe du problème suivant : Trouver la somme des restes donnés par l'opération de la commune mesure entre $\sqrt{m}$ et 1. La méthode qu'il indique, d'après M. Terquem, s'appliquerait également à $\frac{A+B\sqrt{m}}{C}$ et 1, ou à la racine de $ax^2+bx+c=0$ et à l'unité. Elle montre bien que la somme toujours finie est de forme $\frac{M+N\sqrt{m}}{P}$; mais c'est là, ce nous semble, tout ce qu'elle peut donner; car elle devient impraticable quand la période de la fraction continue valeur de x, n'a pas un assez petit nombre de termes. Pour résoudre plus complétement le problème, nous avons cherché la loi des restes : il y en a deux que voici :

1°. Ces restes, pris convenablement à intervalles égaux, forment des progressions géométriques, ayant la même raison.

Cette première loi, que nous démontrerons ici, donne très facilement la somme.

2°. Ces mêmes progressions géométriques sont aussi des séries récurrentes.

Pour la démonstration complète de ce théorème, nous renverrons à la *Théorie des Nombres* ou à un mémoire dans lequel nous dirons quelques mots de la présente question.

Dans ce qui suit nous représenterons la fraction continue périodique valeur de x_1, racine de $ax_1^2+bx_1+c=0$, par $x_1=q_1, q_2, q_3, \ldots q_k(q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_{k+n})$, les quotients renfermés entre parenthèses formant une période de n termes.

Nous représenterons les quotients complets par x_2, x_3, $x_4 \ldots$, de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1,\ x_2, \\ x_1 &= q_1,\ q_2,\ x_3, \\ x_1 &= q_1,\ q_2,\ q_3,\ x_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous représenterons par r_1, r_2, $r_3, \ldots$ les restes donnés par l'opération de la commune mesure sur x_1 et 1 de sorte qu'on aura

$$x_1 = 1 \cdot q_1 + r_1, \quad 1 = r_1 q_2 + r_2, \quad r_1 = r_2 q_3 + r_3 \ldots,$$

d'où résulte immédiatement,

$$x_2 = \frac{1}{r_1}, \quad x_3 = \frac{r_1}{r_2}, \quad x_4 = \frac{r_2}{r_3} \ldots, \quad x_m = \frac{r_{m-2}}{r_{m-1}},$$

et par suite,

$$r_{m-1} = \frac{1}{x_2 x_3 \ldots x_m}.$$

Si l'on remarque maintenant que la série $x_1 x_2 \ldots x_m$ est nécessairement périodique en prenant $x_{k+1}, \ldots x_{k+n}$; pour la période, on aura $x_{k+1} = x_{k+n+1} = x_{k+2n+1} =$ etc., $x_{k+2} = x_{k+n+2} = \ldots$, $x_{k+g} = x_{k+n+g} = \ldots$, $x_{k+n} = x_{k+2n} = \ldots$, ce qui réduit la valeur de r_{m-1} à la forme suivante :

$$r_{k+nf+g-1} = \frac{1}{(x_2 x_3 \ldots x_k) \cdot (x_{k+1} \ldots x_{k+n})^f \cdot x_{k+1} \ldots x_{k+g}} = r_{k+g-1}\left(\frac{r_{k+n-1}}{r_{k-1}}\right)^f.$$

si l'on fait $m = k + nf + g$, g étant $< n$.

Ainsi les valeurs de $r_{k+nf+g-1}$ correspondantes à $f = 0, 1, 2 \ldots$ forment une progression géométrique décroissante dont la raison est

$$\frac{1}{x_{k+1} \ldots x_{k+n}} = \frac{r_{k+n-1}}{r_{k-1}} < 1.$$

La somme des restes r_1, r_2, etc. est donc

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{k-1} + \frac{r_k + r_{k+1} + \ldots + r_{k+n-1}}{1 - \frac{r_{k+n-1}}{r_{k-1}}},$$

expression qui se réduit à $\frac{r_1 + r_2 + \ldots r_n}{1 - r_n}$, quand la période commence dès le terme x_2; par exemple, pour $ax_1^2 = b$.

Quoique le calcul des x_2, $x_3 \ldots$ soit assez court et puisse encore être abrégé, il serait long d'employer la formule $r_{m-1} = \frac{1}{x_2 x_3 \ldots x_m}$, pour calculer les restes. On démontrera très facilement la formule suivante qui est générale, c'est-à-dire qui suppose à x_1 une valeur quelconque. En représentant par $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$.... les convergentes successives vers la valeur de x_1, on aura $r_m = (-1)^{m-1}(x_1\beta_m - \alpha_m)$.

Pour le cas où x_1 est la racine d'une équation du second degré, on sait, par la théorie des nombres, que les valeurs de α_m, β_m prises de n en n, à partir d'un quotient appartenant à la période de x_1 forment des séries récurrentes d'échelle 2φ, $-(-1)^n$, en posant

$$2\varphi = \gamma' + \delta, \quad \frac{\gamma}{\delta} = q_{k+1},\ q_{k+2}\ldots q_{k+n-1}, \quad \frac{\gamma'}{\delta'} = q_{k+1},\ q_{k+2}\ldots q_{k+n}.$$

De là résulte par conséquent que les restes r_1, r_2.. pris de la même manière, forment des séries récurrentes d'échelle $2\varphi(-1)^n$, $-(-1)^n$.

Nos deux lois ne sont pas incompatibles. En effet, soit $S_m = (-S_{m-2})(-1)^n$, posons $S_m = x.S_{m-1}$, $S_{m-1} = x.S_{m-2}$, il en résultera $x^2 = (2\varphi x - 1)(-1)^n$. Si donc la valeur de x tirée de cette équation s'accorde avec $\frac{S_m}{S_{m-1}}$, la série récurrente sera aussi une progression géométrique.

Un seul exemple suffira. Prenons la commune mesure de $\sqrt{7}$ et 1.

Quotients.... $2;\ 1,\ 1,\ 1,\ 4;\ 1,\ 1\ \ 1,\ 4$, etc.,

Convergentes.. $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48}, \frac{590}{223}$, etc.

Restes, $1.\sqrt{7}-2$, $-1.\sqrt{7}+3$, $2\sqrt{7}-5$, $-3\sqrt{7}+8$, $14\sqrt{7}-37$, $-17\sqrt{7}+45$, $31\sqrt{7}-82$, $-48\sqrt{7}+127$, $223\sqrt{7}-590$, etc.

La somme des 4 premiers restes divisée par 1 moins le 4ᵉ reste ou par $3\sqrt{7}-7$, donne $\frac{5\sqrt{7}+7}{14}$ (comme on le voit au mémoire cité plus haut.) Si l'on veut mettre en évidence la coïncidence de la progression géométrique et de la série récurrente dont l'échelle est pour le cas présent $16, -1$, il suffira d'observer que $\frac{r_5}{r_1} = \frac{14\sqrt{7}-37}{\sqrt{7}-2} = -3\sqrt{7}+8$, ce qui est précisément la racine de l'équation $x^2 = 16x - 1$; d'ailleurs, $223\sqrt{7}-590 = 16(14\sqrt{7}-37)-(\sqrt{7}-2)$.