JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PLUCKER

Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 229-252.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__229_0>

ÉNUMÉRATION

DES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE,

D'après la nature différente de leurs branches infinies.

PAR M. PLUCKER.

1. De tous les géomètres, *Euler* est celui qui s'est le plus systématiquement occupé des courbes de degré supérieur. Il s'est attaché surtout à la considération des branches infinies, et en a tiré, dans son *Introduction à l'analyse de l'infini*, le moyen de classer les différentes espèces de courbes d'un même degré, en poussant cette classification jusqu'au quatrième degré inclusivement. Ce qu'il a fait sur ce sujet, il y a plus de quatre-vingts ans, a passé en d'autres ouvrages sous son autorité et sans être revu. Mais la longueur des calculs qu'exigeait sa méthode ne lui permettait pas de démontrer d'une manière certaine que toutes les espèces annoncées par lui existent réellement. Il donne ainsi 146 espèces de courbes du quatrième degré qu'il distribue en huit classes : il faut d'abord réduire ce nombre à 125, car, par une erreur de calcul, il en compte 21 de trop dans la sixième classe ; ensuite, dans les 125 courbes restantes, il y en a 12 qui n'existent pas du tout ; de l'une d'elles *Euler* affirme positivement le contraire. Il y a 22 espèces qui lui sont échappées, et parmi elles l'espèce générale de la dernière classe : l'oubli des autres provient de ce qu'*Euler* n'a pas reconnu 1°. que l'ordre du contact peut être différent sur deux asymptotes parallèles, et 2°. qu'il peut y avoir (pour m'expliquer brièvement) un point de rebroussement de seconde espèce à l'infini. Enfin, ses notions inexactes sur les asymptotes paraboliques, qui ne

sont jamais isolées, mais toujours en nombre infini, et sur les asymptotes courbes en général, ont dû inévitablement le conduire à des erreurs manifestes que l'on trouvera signalées plus loin.

Dans ce mémoire, nous nous proposons de refaire le travail d'*Euler* avec les moyens ordinaires de l'Analyse, maniés toutefois d'une manière nouvelle, en sorte que nous pourrons écrire immédiatement les équations qui répondent aux différentes espèces de courbes du quatrième degré, et cela par une méthode applicable aux courbes d'un degré quelconque. Les axes des coordonnées n'introduisent dans nos équations rien d'arbitraire qui nous embarrasse et qu'il faille éliminer, pour ainsi dire, si l'on veut reconnaître la nature intime de la courbe, sans avoir égard à sa position. On voit sur-le-champ la liaison de chaque terme de nos équations avec les courbes qu'elles représentent, ainsi que le changement produit dans la nature de ces courbes par le changement de forme de l'un quelconque des termes de leurs équations. Enfin, pour servir de contrôle à notre classification et en général à tous nos calculs, il est un nombre abstrait, qui s'obtient immédiatement pour chacune de nos équations; je veux parler du nombre des constantes, dont dépendent les courbes d'une espèce quelconque.

2. Fixons d'abord la notation que nous emploierons. Nous désignerons par P, Q, R, S,.... des lignes droites quelconques et par $p, q, r, s, \ldots$ les distances respectives d'un point quelconque à ces droites. En passant d'un point à un autre ces dernières quantités varient et chacune d'elles change de signe si le point passe d'un côté de la droite correspondante au côté opposé. Le côté positif de chaque droite est absolument arbitraire. Pour représenter ces droites, on a les équations suivantes :

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, \quad s=0\ldots.$$

Nous nommerons les quantités $p, q, r, s, \ldots$ *fonctions linéaires*. Elles le sont des coordonnées ordinaires, comme chacune d'elles l'est de deux quelconques prises arbitrairement parmi elles. Nous désignerons ensuite par $\Omega_n, \Omega'_n, \Omega''_n \ldots$ des fonctions quelconques du $n^{ième}$ degré de fonctions linéaires quelconques, ou, ce qui revient au même, des coordonnées ordinaires. Enfin les lettres grecques λ, $\mu, \ldots$ indiqueront toujours des quantités constantes.

3. Après avoir ainsi fixé la notation, je ne dirai que deux mots sur le principe de notre méthode; je m'abstiendrai de tout ce qui ne se rapporte pas immédiatement à l'énumération des différentes espèces de courbes du quatrième degré.

Soit, conformément à notre notation,

$$\Omega_n = 0, \qquad (a)$$

l'équation générale des courbes du $n^{ième}$ degré, et

$$p = 0,$$

l'équation d'une ligne droite quelconque. Regardons, pour fixer les idées, Ω_n et p comme fonctions de coordonnées ordinaires. On déterminera alors les intersections de la ligne droite avec la courbe, en éliminant l'une de ces deux coordonnées. L'équation résultante s'élevera en général au $n^{ième}$ degré et indiquera par ses racines n points d'intersection, réels ou imaginaires. Dans tous les cas, si, par une détermination particulière des constantes, le degré d'une équation algébrique s'abaisse de m unités, sans qu'on ait négligé aucun facteur variable, il faut en chercher la cause dans la circonstance que m des racines primitives sont devenues *infinies*. Donc, si cela arrive dans le cas présent, c'est parce que, par un changement, soit dans la position réciproque de la ligne droite et de la courbe, soit par un changement dans la nature de celle-ci, m points d'intersection ont passé à l'infini. L'équation de la droite contenant deux constantes, on peut en disposer de manière que de ses points d'intersection avec la courbe donnée deux passent à l'infini; nous dirons alors que la ligne droite est une *asymptote* de la courbe. D'après cette définition, si nous voulons que P soit une asymptote de la courbe représentée par l'équation (a), il faut que celle-ci, quand on pose $p = 0$, se réduise à une fonction du $(n-2)^{ième}$ degré, ou ce qui revient au même, il faut qu'elle puisse prendre la forme suivante :

$$p\Omega_{n-1} + \Omega_{n-2} = 0.$$

Si Ω_{n-2} se réduisait à une fonction Ω_{n-m} du $(n-m)^{ième}$ degré, m sur-passant le nombre 2 (ce qui exigerait que la courbe fût d'une nature particulière), il y aurait, sur l'asymptote P, m points d'intersection situés à l'infini. Nous dirons que l'asymptote a alors avec la courbe un contact de m points, ce qui revient à dire avec *Euler* que la courbe a une asymptote hyperbolique de l'espèce $u = \frac{a}{t^{m-1}}$. Pour chaque point d'intersection nouveau, passant à l'infini, l'ordre du contact s'élève d'une unité. Car de l'équation

$$p\Omega_{n-1} + \Omega_{n-m} = 0,$$

on tire, en regardant Ω_{n-1} et Ω_{n-m} comme des fonctions de p et d'une autre variable q, en donnant à celle-ci une valeur infinie et en négligeant p par rapport à q, l'expression suivante :

$$p = -\frac{\Omega_{n-m}}{\Omega_{n-1}} = \mu q^{-(m-1)}$$

qui fait voir que la distance des points infiniment éloignés de la courbe à l'asymptote P, si elle n'est pas infiniment grande elle-même, est un infiniment petit de l'ordre $(m - 1)$. On voit encore que, suivant que m est un nombre pair ou impair, p change de signe ou n'en change pas, si l'on prend successivement $q = \infty$ et $q = -\infty$; ce qui signifie que deux branches de la courbe qui suivent l'asymptote P en sens divers, sont situées, dans le premier cas, sur les deux côtés opposés et dans le second cas, sur le même côté de cette asymptote.

On peut mettre en évidence dans l'équation d'une courbe l'ensemble de ses asymptotes. Ainsi, par exemple, en prenant $n=4$, on obtient l'équation

$$pqrs + \Omega_2 = 0,$$

qu'on peut encore écrire de la manière suivante :

$$pqrs + \lambda tu + \mu = 0. \qquad (b)$$

Chacune des fonctions linéaires p, q, r, s, t, u dépend de deux constantes : l'équation (b) qui renferme en outre λ et μ contient ainsi 14 constantes. Ce nombre est égal à celui des constantes de l'équation générale des courbes du 4^{ième} degré. On peut donc regarder les deux équations comme équivalentes et transformer celle-ci, que nous supposerons donnée, dans l'équation (b). Cette transformation doit exiger la résolution d'une équation du $4^{ième}$ degré, car, sans changer l'équation (b), on peut changer entre elles les quatre fonctions linéaires, p, q, r, s qui répondent aux quatre asymptotes P, Q, R, S.

4. Les raisonnements du numéro précédent s'appliquent également aux asymptotes courbes. Les notions généralement admises sur ces asymptotes me paraissent peu nettes. Ainsi *Euler*, par exemple, ne voit qu'une seule asymptote parabolique là où il y en a une infinité, que l'on obtient toutes, en déplaçant l'une d'elles parallèlement à elle-même suivant la direction de ses diamètres. Parmi ces asymptotes il y en a cependant une qui a avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé que les autres; mais ce n'est pas celle d'*Euler*, qui, au contraire, dépend du choix arbitraire des axes des coordonnées. J'ajouterai peu de mots, pour faire mieux ressortir le caractère des asymptotes paraboliques.

Si les courbes représentées par l'équation (a) ont pour asymptote une parabole dont l'équation est

$$p^2 + \lambda q = 0,$$

il faut que l'équation (a) puisse s'écrire sous la forme suivante,

$$(p^2 + \lambda q)\,\Omega_{n-2} + \Omega'_{n-2} = 0, \qquad (c)$$

afin que son premier membre se réduise à une fonction du $(n-2)^{ième}$ degré, en faisant disparaître ($p^2 + \lambda q$). Quatre points d'intersection s'étant éloignés à l'infini, la parabole ne coupe la courbe qu'en $2(n-2)$ points seulement. En introduisant une constante arbitraire α et en posant, pour abréger

$$\Omega'_{n-2} - \lambda\alpha\Omega_{n-2} = \Omega''_{n-2},$$

on pourra mettre l'équation (c) sous la forme suivante :

$$[p^2 + \lambda(q + \alpha)]\,\Omega_{n-2} + \Omega''_{n-2} = 0, \qquad (d)$$

dans laquelle la parabole nouvelle, dont l'équation est

$$p^2 + \lambda(q + \alpha) = 0, \qquad (e)$$

se présente absolument de la même manière que la première parabole dans l'équation (c). Toutefois si l'on détermine α de sorte que l'on ait

$$\Omega''_{n-2} = p\Omega''_{n-3} + \Omega'_{n-3} = (p + \pi)\,\Omega_{n-3} + \Omega_{n-4},$$

ce qui peut toujours se faire et cela d'une seule manière, l'équation (d) se changera dans la suivante

$$(p^2 + \lambda q_0)\,\Omega_{n-2} + (p + \pi)\,\Omega_{n-3} + \Omega_{n-4} = 0, \quad (g)$$

en posant $(q + \alpha) = q_0$, et l'on voit que la parabole

$$p^2 + \lambda q_0 = 0 \qquad (h)$$

ne coupe la courbe proposée qu'en $(2n - 5)$ points, cinq points d'intersection ayant passé à l'infini.

Toutes les paraboles représentées par l'équation (c), si l'on attribue à α successivement toutes les valeurs possibles, sont asymptotes l'une de l'autre. L'ordre du contact à l'infini est $\frac{1}{2}$. C'est un contact du même ordre qui a lieu entre l'une quelconque de ces paraboles et la courbe proposée. Toutefois pour l'asymptote parabolique (h), que j'appellerai *osculatrice*, l'ordre du contact s'élève à l'unité, et peut, dans des cas particuliers, en croissant pour chaque point nouveau passant à l'infini d'une demi-unité, s'élever jusqu'au $\left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\text{ième}}$ ordre.

Dans les équations suivantes qui sont du quatrième degré,

$$\left.\begin{array}{l}(p^2 + \lambda q)\,rs + \nu(p + \pi)\,t + \mu = 0,\\ (p^2 + \lambda q)(rs + \delta) + \nu t = 0,\\ (p^2 + \lambda q)(rs + \delta) + \nu p + \mu = 0,\\ (p^2 + \lambda q)(rs + \delta) + \mu = 0,\end{array}\right\}\ (k)$$

l'asymptote parabolique et osculatrice est mise en évidence.

En suivant l'une des branches infinies de cette asymptote, l'on obtient pour q, r, s, t, des valeurs infiniment grandes du premier ordre et pour p une valeur infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ seulement. Avec cette attention l'on déduit des quatre équations précédentes que l'expression $(p^2 + \lambda q)$, rapportée aux points infiniment éloignés sur les branches paraboliques de la courbe proposée est successivement un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ et 2. Cette expression donne la distance (prise suivant la direction des diamètres et multipliée par un coefficient constant) du point auquel elle est rapportée à l'asymptote parabolique :

$$p^2 + \lambda q = 0.$$

La plus courte distance de ce même point à l'asymptote parabolique est infiniment petite d'un ordre plus élevé d'une demi-unité; elle est donc respectivement de l'ordre 1, $\frac{3}{2}$, 2 et $\frac{5}{3}$.

Au nombre infini d'asymptotes paraboliques répond dans le cas de deux asymptotes rectilignes, un nombre infini d'asymptotes hyperboliques, dont les deux asymptotes rectilignes sont celles de la courbe. Parmi ce nombre, il y en a deux, dont le contact avec la courbe est plus intime et s'élève sur l'une des deux asymptotes rectilignes au deuxième ordre. Dans le cas de deux asymptotes rectilignes et imaginaires, on obtient un nombre infini d'ellipses au lieu d'hyperboles, qui ne coupent la courbe qu'en $(2n-4)$ points seulement; mais, en général, il n'y en a aucune qui coupe la courbe en moins de $(2n-4)$ points.

Pour déterminer le nombre des constantes dans les équations (k), il n'en faut compter que quatre pour l'expression $(p^2 + \lambda q)$. Des cinq constantes qu'elle contient, l'une peut être prise à volonté, ce qui tient à ce qu'à une même parabole il répond un nombre infini d'expressions de la même forme. Une remarque analogue a lieu pour l'expression suivante $(p^2 + \lambda q^2)$, qui répond à deux asymptotes imaginaires, se coupant en un point réel.

Je passerai immédiatement à l'énumération des différentes courbes du quatrième degré : pour me rapprocher, autant que possible, de la marche d'*Euler*, je rapporterai ces courbes à huit cas principaux ; j'ai dû néanmoins intervertir l'ordre des troisième et quatrième cas.

Premier cas.

5. Il n'y a aucune direction réelle suivant laquelle une ligne droite coupe la courbe en moins de quatre points. Les quatre asymptotes rectilignes sont imaginaires, mais elles se coupent deux à deux en deux points réels, centres de deux séries d'ellipses concentriques, semblables et semblablement situées, dont chacune, ayant avec la courbe un double contact imaginaire à l'infini, ne la coupe qu'en quatre points. Espèce générale, dépendant de 14 constantes :

$$(p^2 + \lambda q^2)(r^2 + \gamma s^2) + \nu tu + \mu = 0. \qquad (1)$$

Deuxième cas.

6. Il y a deux directions suivant lesquelles une ligne droite arbitraire rencontre la courbe en trois points seulement. Ce sont les directions de deux asymptotes réelles, qui coupent la courbe en général et au plus en deux points. Il y a un nombre infini d'asymptotes hyperboliques, ayant ces mêmes asymptotes rectilignes. Deux d'entre elles ont suivant l'une de leurs asymptotes avec la courbe un contact du second et suivant l'autre, un contact du premier ordre. Il y a en outre deux asymptotes rectilignes et imaginaires, se coupant en un point réel, centre commun d'une infinité d'ellipses semblables qui ne coupent la courbe qu'en quatre points. Espèce générale, dépendant de 14 constantes :

$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu tu + \mu = 0. \qquad (2)$$

Il peut arriver que chacun des deux points d'intersection de chacune des deux asymptotes réelles passe à l'infini. De là proviennent les espèces suivantes :

$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \qquad (3)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu pt + \mu = 0, \qquad (4)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (5)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu p(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (6)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu pq + \mu = 0. \qquad (7)$$

On obtiendrait d'autres espèces (dont je ne ferai pas mention ici, parce qu'*Euler* ne s'en est point occupé) en considérant les cas particuliers où les points d'intersection des asymptotes imaginaires passent à l'infini : c'est ce qui arriverait, par exemple, si, dans l'équation (7), on posait $\nu = 0$: je dirai seulement que le nombre des points d'intersection situés à l'infini est dans tous les cas le même sur les deux asymptotes imaginaires; du reste il peut être égal à trois ou à quatre.

Troisième cas.

7. Il y a quatre directions différentes et réelles suivant lesquelles une ligne droite coupe la courbe en trois points seulement, et il y a quatre asymptotes rectilignes et réelles, correspondant à ces quatre

directions, qui coupent la courbe dans le cas général, dépendant de 14 constantes, en deux points. L'équation générale est

$$pqrs + \nu tu + \mu = 0. \qquad (8)$$

Les quatre asymptotes deviennent osculatrices suivant différents ordres dans les espèces suivantes, les seules possibles :

$$pqrs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \qquad (9)$$
$$pqrs + \nu pt + \mu = 0, \qquad (10)$$
$$pqrs + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (11)$$
$$pqrs + \nu p(p + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (12)$$
$$pqrs + \nu pq + \mu = 0, \qquad (13)$$
$$pqrs + \nu t = 0, \qquad (14)$$
$$pqrs + \nu p + \mu = 0, \qquad (15)$$
$$pqrs + \mu = 0\ (*). \qquad (16)$$

Quatrième cas.

8. A. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en trois points seulement, mais il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Il existe un nombre infini d'asymptotes paraboliques dont les diamètres ont la direction en question et parmi lesquelles il y en a une d'osculatrice. Il y a en outre deux asymptotes

---

(*) On voit que les ordres du contact sur les quatre asymptotes ne sont pas entièrement indépendants l'un de l'autre. En désignant les ordres de contacts sur P, Q, R et S respectivement par le nombre des points passés à l'infini, l'on aura les symboles suivants pour représenter les neuf espèces que nous venons d'énumérer :

2222, 3222, 4222, 3322, 4322, 3333, 4422, 4444.

D'après *Euler*, existerait encore l'espèce suivante :

4433 ;

c'est sa 23e, intermédiaire entre (15) et (16). Mais on n'a qu'à compter le nombre de constantes des ces deux espèces, pour voir que celle d'*Euler* n'existe pas. En effet, ce nombre diminue en passant de (15) à (16) d'une unité seulement et descend de 10 à 9.

rectilignes et imaginaires. Espèce générale dépendant de 13 constantes :

$$(p^2 + \lambda q)(r^2 + \gamma s^2) + \nu (p + \pi) t + \mu = 0. \quad (17)$$

B. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque coupe la courbe en deux points seulement, sans pour cela être une asymptote de la courbe. En général il y a deux asymptotes parallèles, qui, suivant cette même direction, coupent la courbe en un point unique. La courbe, en d'autres termes, a un point double, qui est infiniment éloigné suivant la direction en question et dont les asymptotes sont les deux tangentes. Il y a en outre deux asymptotes rectilignes et imaginaires. Nombre des constantes, 12. B se subdivise en α, β, γ.

α. Les deux asymptotes parallèles sont imaginaires; le point double situé à l'infini est un point isolé. L'équation est :

$$(p^2 + \xi^2)(r^2 + \gamma s^2) + \nu (p + \pi) t + \mu = 0 \quad (18)$$

β. Les deux asymptotes parallèles sont réelles; deux branches réelles de la courbe se coupent à l'infini. L'équation est

$$(p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma s^2) + \nu (p + \pi) t + \mu = 0. \quad (19)$$

Le contact peut s'élever sur l'une des deux asymptotes parallèles, ou sur toutes les deux, au second ordre ; c'est ce qui fournit les deux espèces suivantes :

$$(p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma s^2) + \nu (p \pm \xi) t + \mu = 0, \quad (20)$$
$$(p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma s^2 + \nu) + \mu = 0 (*). \quad (21)$$

γ. Les deux asymptotes parallèles coïncident en une seule, la courbe a sur cette asymptote double un point de rebroussement de première espèce et infiniment éloigné. Son contact avec l'asymptote est de l'ordre $\frac{1}{2}$ seulement. Nombre des constantes : 11. L'équation est

---

(*) *Euler* n'a pas reconnu l'existence de l'espèce (20), où l'ordre du contact est différent sur les deux asymptotes parallèles. Cette espèce doit trouver sa place entre sa dixième et sa onzième espèce.

$$p^2(r^2 + \gamma s^2) + \nu (p + \pi)t + \mu = 0. \qquad (22)$$

Si l'on a $\pi = 0$, le contact s'élève au premier ordre, le point double est le point de contact à l'infini de deux branches de la courbe sur l'asymptote double. L'équation devient

$$p^2 (r^2 + \gamma s^2) + \nu pt + \mu = 0. \qquad (23)\ (24)$$

Cette équation contient deux espèces différentes; les deux branches qui se touchent à l'infini peuvent être réelles ou imaginaires. La première de ces espèces a quatre branches infinies, qui s'approchent de l'asymptote double comme les quatre branches de deux hyperboles quelconques, ayant toutes les deux cette même asymptote. Il peut y avoir différentes positions de ces quatre branches par rapport à l'asymptote double. L'autre espèce n'a pas de branches infinies. Pour distinguer les deux espèces entre elles et surtout pour voir ce qui arrive dans le cas intermédiaire, j'ajouterai les développements suivants.

Posons

$$r^2 + \gamma s^2 = t^2 + 2\alpha pt + \beta p^2 + 2\zeta t + 2\eta p + \theta,$$

et négligeons ensuite p par rapport aux constantes et celles-ci par rapport à t. Nous tirons alors de la dernière équation, pour les points infiniment éloignés de la courbe, l'équation suivante :

$$p^2t^2 + \nu pt + \mu = 0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(pt + \sigma)(pt + \sigma') = 0.$$

Cette équation représente deux hyperboles qui se confondent sensiblement avec la courbe sur l'asymptote P. Elles sont réelles si

$$\nu^2 - 4\mu > 0, \qquad (23)$$

imaginaires si

$$\nu^2 - 4\mu < 0, \qquad (24)$$

et coïncident enfin si

$$\nu^2 - 4\mu = 0. \qquad (25)$$

Dans ce dernier cas l'équation de la courbe devient

$$(pt+\sigma)^2 + 2\alpha(p^2+\zeta p)pt + \beta p^4 + 2\eta p^3 + \theta p^2 = 0,$$

et peut s'écrire ainsi (en posant pour abréger $\theta - 2\alpha\sigma = \xi$)

$$(pt+\sigma)^2 + 2(\alpha p^2+\zeta p)(pt+\sigma) + \beta p^4 + 2\eta p^3 + \xi p^2 - 2\zeta\sigma p = 0. \quad (25)$$

En négligeant p^2, on obtient

$$(pt+\sigma)^2 + 2\zeta p(pt+\sigma) - 2\zeta\sigma p = 0,$$

et en résolvant cette équation par rapport à $(pt+\sigma)$, il vient

$$(pt+\sigma) = \pm\sqrt{2\zeta\sigma p}.$$

Cette équation fait voir que l'espèce (25) n'a que deux branches infinies situées sur le même côté de l'asymptote double P et formant à l'infini un point de rebroussement de seconde espèce. Ces deux branches infinies ont avec leur asymptote commune un contact du premier ordre, mais entre elles et avec l'hyperbole, dont l'équation est la suivante :

$$pt + \sigma = 0,$$

un contact de l'ordre $\frac{3}{2}$ (*).

Tout change de forme si dans l'équation (25) on pose $\zeta = 0$; on obtient alors pour les points infiniment éloignés de la courbe

$$(pt+\sigma) = \pm p\sqrt{-\xi},$$

et l'on retombe sur les deux cas (23) et (24); deux branches infinies de la courbe, réelles ou imaginaires, se touchent. Dans le premier cas cependant les quatre branches de la courbe ont nécessairement, par rapport à leur asymptote double, deux à deux la même position, que les deux branches d'une hyperbole, avec lesquelles elles ont, ainsi qu'entre elles, un contact du second ordre.

Enfin si ξ disparaît, il y a de nouveau un changement de forme.

(*) L'espèce (25) n'a pas été aperçue par *Euler*.

On obtient alors pour les points de la courbe infiniment éloignés

$$(pt + \sigma) = \pm \sqrt{2\eta p^3}.$$

La courbe forme alors comme dans l'espèce (25) un point de rebroussement de seconde espèce, situé à l'infini et dont les deux branches ont entre elles un contact de l'ordre $\frac{5}{2}$.

L'ordre du contact des branches infinies de la courbe avec leur asymptote commune restant toujours le même, nous n'avons pas d'espèces nouvelles à consigner.

Cinquième cas.

9. Au lieu des deux asymptotes rectilignes et imaginaires, la courbe a deux asymptotes réelles, auxquelles répondent deux directions suivant lesquelles la courbe est coupée par une ligne droite quelconque en trois points seulement. Si des différentes branches infinies l'une n'influait pas sur la nature des autres, nous obtiendrions, en combinant chacun des *six* cas particuliers relatifs à deux asymptotes rectilignes et énumérés dans le numéro (6) avec chacun des *neuf* cas particuliers relatifs aux asymptotes réelles et consignés dans le numéro précédent, *cinquante-quatre* espèces du cas présent. Mais ce nombre se réduit à *trente-neuf*, les autres espèces étant impossibles.

A. Asymptotes paraboliques.

$$(p^2 + \lambda q) rs + \nu (p + \pi) t + \mu + o, \qquad (26)$$
$$(p^2 + \lambda q) rs + \nu (p + \pi)(r + \rho) + \mu = o, \qquad (27)$$
$$(p^2 + \lambda q) rs + \nu (p + \pi) r + \mu = o, \qquad (28)$$
$$(p^2 + \gamma q) rs + \mu t = o, \qquad (29)$$
$$(p^2 + \lambda q) rs + \nu r + \mu = o, \qquad (30)$$
$$(p^2 + \lambda q) rs + \mu = o, \qquad (31)$$

B. Deux asymptotes parallèles et imaginaires :

$$(p^2 + \xi^2) rs + \nu (p + \pi) t + \mu = o, \qquad (32)$$
$$(p^2 + \xi^2) rs + \nu (p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = o, \qquad (33)$$
$$(p^2 + \xi^2) rs + \nu (p + \pi) r + \mu = o, \qquad (34)$$
$$(p^2 + \xi^2) rs + \mu t = o, \qquad (35)$$
$$(p^2 + \xi^2) rs + \nu r + \mu = o, \qquad (36)$$
$$(p^2 + \xi^2) rs + \mu = o. \qquad (37)$$

C. Deux asymptotes parallèles réelles et non osculatrices :

$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p+\pi)t + \mu = 0, \quad (38)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p+\pi)(r+\varsigma) + \mu = 0, \quad (39)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p+\pi)r + \mu + = 0, \quad (40)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \mu t = 0, \quad (41)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu r + \mu = 0. \quad (42)$$

D. Deux asymptotes parallèles et réelles, dont l'une osculatrice :

$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p+\xi)t + \mu = 0, \quad (43)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p+\xi)(r+\varsigma) + \mu = 0, \quad (44)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p+\xi)r + \mu = 0, \quad (45)$$

E. Deux asymptotes parallèles, réelles et osculatrices :

$$(p^2 - \xi^2)(rs + \nu) + \mu = 0, \quad (46)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \mu = 0. \quad (47)$$

F. Un point de rebroussement de première espèce à l'infini :

$$p^2rs + \nu(p+\pi)t + \mu = 0, \quad (48)$$
$$p^2rs + \nu(p+\pi)(r+\varsigma) + \mu = 0, \quad (49)$$
$$p^2rs + \nu(p+\pi)r + \mu = 0, \quad (50)$$
$$p^2rs + \nu t = 0, \quad (51)$$
$$p^2rs + \nu r + \mu = 0. \quad (52)$$

G.H.I. Deux branches de la courbe ont à l'infini un contact ou réel ou imaginaire, ou elles forment un point de rebroussement de seconde espèce :

$$p^2rs + \nu pt + \mu = 0, \quad (53)(57)(61)$$
$$p^2rs + \nu p(r+\varsigma) + \mu = 0, \quad (54)(58)(62)$$
$$p^2rs + \nu pr + \mu = 0, \quad (55)(59)(63)$$
$$p^2rs + \mu = 0\ (*). \quad (56)(60)(64)$$

(*) Ne connaissant que 7 des 9 espèces du quatrième cas, *Euler* indique, au lieu de 54 espèces, 42 seulement, et reconnaît que deux de celles-ci sont impossibles, ce qui fait qu'il en compte 40. Mais sur ce nombre il y en a encore 8 qui n'existent pas, ce qui le réduirait à 32. Enfin, les 7 espèces suivantes ont échappé à ses recherches : (43), (44), (45), (61), (62), (63), (64), ce qui donne, comme nous l'avons annoncé plus haut, 39 espèces du cinquième cas.

Sixième cas.

10. A. Il y a deux systèmes d'asymptotes paraboliques. Nombre des constantes : 12. L'équation est

$$(p^2 + \lambda q)(p^2 + \gamma s) + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0. \quad (65)$$

B. Il y a un système d'asymptotes paraboliques et deux asymptotes parallèles, ou imaginaires, ou réelles ou coïncidentes. Nombre des constantes du cas général, 11. L'équation est

$$(p^2 + \lambda q)(r^2 + \gamma^2) + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (66)$$
$$(p^2 + \lambda q)(r^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(r + \rho) + \mu = 0, \quad (67)$$
$$(p^2 + \lambda q)(r^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(r + \gamma) + \mu = 0, \quad (68)$$
$$(p^2 + \lambda q)(r^2 - \gamma^2) + \nu r + \mu = 0, \quad (69)$$
$$(p^2 + \lambda q)\, r^2 + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (70)$$
$$(p^2 + \lambda q)\, r^2 + \nu(p + \pi)\, r + \mu = 0. \quad (71)(72)(73)$$

C. Il y a deux systèmes de deux asymptotes parallèles ou imaginaires, ou réelles ou coïncidentes. Nombre des constantes du cas général, 10. C se subdivise en α, β, γ, δ, ε, ζ.

α. Deux paires d'asymptotes imaginaires.

$$(p^2 + \xi^2)(q^2 + \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + x) + \mu = 0. \quad (74)$$

β. Deux paires d'asymptotes parallèles dont l'une imaginaire et l'autre réelle.

$$(p^2 + \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + x) + \mu = 0, \quad (75)$$
$$(p^2 + \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + \gamma) + \mu = 0, \quad (76)$$
$$(p^2 + \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu q + \mu = 0. \quad (77)$$

γ. Deux paires d'asymptotes parallèles et réelles.

$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + x) + \mu = 0, \quad (78)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \xi)(q + x) + \mu = 0, \quad (79)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \xi)(q + \gamma) + \mu = 0, \quad (80)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu p + \mu = 0, \quad (81)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \mu = 0. \quad (82)$$

δ. Deux asymptotes parallèles et imaginaires, et deux coïncidant en une seule :

$$(p^2 + \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (83)$$
$$(p^2 + \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)q + \mu = 0, \qquad (84)(85)$$
$$(p^2 + \xi^2)q^2 + 2\mu(p + \pi)q + \mu^2 = 0. \qquad (86)$$

ε. Deux asymptotes parallèles et réelles, et deux coïncidant en une seule :

$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (87)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \xi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (88)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (89)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)q + \mu = 0, \qquad (90)(91)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + 2\mu(p + \pi)q + \mu^2 = 0, \qquad (92)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \xi)q + \mu = 0, \qquad (93)(94)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + 2\mu(p + \xi)q + \mu = 0. \qquad (95)$$

Deux branches qui se touchent à l'infini sont incompatibles avec deux asymptotes parallèles et toutes les deux osculatrices.

ζ. Deux paires de deux asymptotes coïncidentes :

$$p^2q^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (96)$$
$$p^2q^2 + \nu p(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (97)(98)$$
$$p^2q^2 + 2\mu p(q + \varkappa) + \mu^2 = 0. \qquad (99)$$

Il ne peut pas y avoir simultanément deux couples de branches, qui se touchent à l'infini sur deux asymptotes doubles et différentes (*).

(*) *Euler* compte 47 espèces du sixième cas ; mais dans ce nombre, il faut d'abord rectifier une erreur de calcul. Dans la supposition que la nature d'une branche infinie est absolument indépendante de la nature des autres, *Euler* fixe ce nombre à $7^2 = 49$, c'est-à-dire qu'il le croit égal au quarré du nombre adopté par lui des différentes espèces du quatrième cas, dans l'énumération desquelles les asymptotes imaginaires ne sont pour rien, au lieu qu'il aurait dû prendre le nombre $\frac{7\cdot8}{1\cdot2}$. Dans la même supposition, $\frac{9\cdot10}{1\cdot2} = 45$ espèces se présenteraient à nous. Ensuite *Euler* reconnaît que deux de ses espèces n'existent pas; son vrai nombre serait donc 26. Mais d'un côté il y a encore trois autres espèces qui n'existent pas, ce qui baisserait le nombre à 23, tandis que d'un autre côté les 12 espèces suivantes : 68, 73, 76, 79, 80, 86, 88, 92, 93, 94, 95, 99 sont omises, ce qui définitivement nous fournit le nombre 35. Sur les 45 espèces indiquées plus haut, il y en a 10 d'impossibles.

Septième cas.

11. La courbe a une asymptote rectiligne R et n'est coupée par une ligne droite, menée parallèlement à l'asymptote, qu'en trois points seulement.

A. En général, il y a en outre une seconde direction suivant laquelle la courbe est rencontrée par une ligne droite quelconque en trois points seulement. Une parabole quelconque dont les diamètres ont cette même direction, ne coupe la courbe qu'en six points. Malgré cela il n'y a ni asymptote rectiligne, ni asymptote parabolique; mais il y a une infinité d'asymptotes semi-cubi-paraboliques, toutes indiquées par une équation de la forme suivante :

$$p^3 + \lambda (q + x)^2 = 0,$$

si l'on y donne à x successivement toutes les valeurs possibles. Six points d'intersection ayant passé à l'infini, chacune de ces asymptotes coupe la courbe proposée en six points seulement; et même il en est toujours une qui en général et au plus ne coupe la courbe qu'en cinq points; je l'appellerai *osculatrice*. Par rapport à elle l'ordre du contact s'élève à $\frac{2}{3}$, tandis que, pour une autre parabole quelconque de cette espèce, il ne s'élève que jusqu'à $\frac{1}{3}$. Pour chaque point nouveau passant à l'infini, l'ordre du contact augmente de $\frac{1}{3}$. Dans l'équation suivante, contenant 12 constantes, l'asymptote osculatrice est mise en évidence :

$$(p^3 + \lambda q^2) r + \nu (p + \pi) s + \mu = 0. \qquad (100)$$

Comme l'ordre du contact de la courbe avec son asymptote R peut monter, l'on obtient les deux espèces suivantes :

$$(p^3 + \lambda q^2) r + \nu (p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \qquad (101)$$
$$(p^3 + \lambda q^2) r + \nu (p + \pi) r + \mu = 0. \qquad (102)$$

B. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque coupe la courbe en deux points seulement, sans toutefois être son asymptote. De plus, toutes les paraboles d'un paramètre déterminé et dont les diamètres ont cette même direction ne coupent la courbe qu'en quatre points, sans toutefois être ses asymptotes. Mais au nombre des lignes droites en question, il en est une seule P, asymptote de la courbe, qui la coupe en général et au plus en un seul point, et au nombre des paraboles en question, il en est une série infinie dont les axes coïncident, et qui, asymptotes de la courbe, ne la coupent qu'en trois points : parmi ces paraboles, il y en a toujours une seule, asymptote osculatrice de la courbe, qui la coupe en général et au plus en deux points. Nombre des constantes : 11. B contient α et β.

α. L'asymptote P est une asymptote ordinaire :

$$p(p^2+\lambda q)r+\nu p^2+\mu s = 0, \tag{103}$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\mu s = 0, \tag{104}$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\nu r+\mu = 0. \tag{105}$$

β. L'asymptote P est une asymptote osculatrice :

$$p(p^2+\lambda q)r+\sigma p^2+\nu p+\mu = 0, \tag{106}$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\nu p+\mu = 0, \tag{107}$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\mu = 0. \tag{108}$$

C. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en deux points seulement, mais cette droite n'est jamais asymptote de la courbe. Toute parabole dont les diamètres ont cette même direction, ne coupe la courbe qu'en cinq points; mais aucune transformation, aucun déplacement d'une telle parabole ne peut la rendre asymptote de la courbe. Il y a seulement une infinité d'asymptotes cubi-paraboliques, représentées par l'équation suivante :

$$p^3 + \lambda(q + x) = 0,$$

en y regardant x comme une quantité indéterminée. Neuf points d'intersection ayant passé à l'infini, chacune de ces asymptotes ne coupe la courbe qu'en trois points. Parmi elles il y en a une, que j'appellerai *osculatrice*, qui ne coupe la courbe qu'en deux points. En général, l'ordre du contact est $\frac{2}{3}$; pour chaque point nouveau passant à l'infini il s'élève de $\frac{1}{3}$. Nombre des constantes: 10. C'est l'asymptote osculatrice qui est mise en évidence dans les équations suivantes :

$$(p^3 + \lambda q)\,r + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (109)$$
$$(p^3 + \lambda q)\,r + \nu p + \mu = 0, \qquad (110)$$
$$(p^3 + \lambda q)\,r + \mu = 0. \qquad (111)$$

Dans les deux cas B et C, la courbe a un point double situé à l'infini. Dans le premier cas, des deux tangentes de ce point l'une est l'asymptote P, et l'autre est située tout entière à l'infini. Dans le second cas les deux tangentes sont situées à l'infini.

D. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque ne coupe la courbe qu'en un point unique. En général une telle ligne droite est asymptote de la courbe dans trois positions différentes, et alors elle ne la coupe pas du tout. La courbe a un point triple situé à l'infini, dont les trois tangentes ne sont autre chose que les trois asymptotes parallèles de la courbe. Nombre des constantes : 9. D se subdivise en α, β, γ, δ.

α. Deux des trois asymptotes parallèles sont imaginaires :

$$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (112)$$
$$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \nu p + \mu = 0, \qquad (113)$$
$$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \mu = 0. \qquad (114)$$

β. Les asymptotes parallèles sont réelles toutes les trois :

$$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (115)$$
$$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \nu p + \mu = 0, \qquad (116)$$
$$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \mu = 0. \qquad (117)$$

γ. Deux des trois asymptotes parallèles coïncident en une seule. Par rapport à elles, l'ordre du contact se réduit à $\frac{1}{2}$.

$$(p + \pi)p^2q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (118)$$
$$(p + \pi)p^2q + \nu p + \mu = 0, \qquad (119)$$
$$(p + \pi)p^2q + \mu = 0. \qquad (120)$$

δ. Les asymptotes parallèles se confondent en une seule, toutes les trois ; l'ordre du contact s'abaisse à $\frac{1}{3}$.

$$p^3q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (121)$$
$$p^3q + \nu p + \mu = 0, \qquad (122)$$
$$p^3q + \mu = 0. \qquad (123)$$

Huitième cas.

12. A. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en trois points seulement. Si l'on détermine la constante arbitraire d'une telle ligne droite de manière qu'elle ne coupe la courbe qu'en deux points, on verrait qu'alors cette ligne droite passe à l'infini. Il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Toute parabole dont les diamètres ont cette même direction, coupe la courbe en six points seulement, mais elle passe à l'infini si, afin qu'elle devienne asymptote, l'on dispose de ses deux constantes arbitraires, de manière qu'elle ne coupe la courbe qu'en quatre points. Il n'y a pas d'asymptote parabolique. Il n'y a pas non plus une asymptote courbe du troisième degré. Enfin, il n'y a pas même une asymptote parabolique du quatrième degré. Nombre des constantes: 11.

$$p^4 + q(\varkappa p^2 + \lambda q^2) + \nu(p + \pi)r + \mu = 0 \text{ (*)}, \qquad (124)$$

B. Il y a une infinité de paraboles du degré $\frac{4}{3}$, asymptotes de la courbe, et représentées par l'équation

$$p^4 + \lambda(q^3 + \varkappa)^3 = 0,$$

en y regardant $\varkappa$ comme une quantité indéterminée. En général, une telle parabole coupe la courbe en huit points, mais il y en a une qui la coupe en sept points seulement. En général, l'ordre du contact est $\frac{1}{4}$, pour celle-ci $\frac{1}{2}$, et si, dans des cas particuliers, des points d'intersection nouveaux passent à l'infini, il s'élève pour chacun d'eux de $\frac{1}{4}$. Nombre constantes: 10.

$$p^4 + \lambda q^3 + \nu(p + \pi)r + \mu = 0. \qquad (125)$$

C. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite

---

(*) L'espèce générale du huitième cas est échappée à *Euler*, qui paraît supposer qu'une courbe d'un degré quelconque a nécessairement pour asymptote une courbe donnée par une équation à deux termes :

$$p^m + \lambda q^n = 0;$$

ce qui, passé le troisième degré, n'est plus vrai.

quelconque rencontre la courbe en deux points seulement; c'est parce que celle-ci a un point double situé à l'infini. En déterminant les deux tangentes de ce point, on n'en trouve qu'une seule, asymptote de la courbe, l'autre ayant passé tout entière à l'infini. Il y a avec cette asymptote rectiligne une série infinie d'asymptotes semi-cubi-paraboliques. Nombre des constantes: 10. Suivant que l'asymptote rectiligne est une asymptote ordinaire ou osculatrice, on obtient les deux espèces suivantes :

$$(p + \pi)(p^3 + \lambda q^2) + \sigma p^2 + \mu r = 0, \qquad (126)$$
$$(p + \pi)(p^3 + \lambda q^2) + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0. \qquad (127)$$

D. Il y a une direction unique suivant laquelle la courbe est coupée par une ligne droite quelconque en deux points seulement. Il y a un point double situé à l'infini, suivant cette direction. Les deux tangentes de ce point ayant passé à l'infini toutes les deux, il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Toute parabole quelconque dont les diamètres se confondent avec cette direction coupe la courbe en quatre points seulement. Une telle parabole dépend encore de trois constantes arbitraires. En disposant convenablement de deux de ces constantes, on obtient deux séries infinies de paraboles, dont le paramètre et la position de l'axe sont déterminés, et qui sont les asymptotes de la courbe qu'elles coupent en deux points seulement. Enfin, dans chacune des deux séries, il y a une asymptote osculatrice qui coupe la courbe en général et au plus en un point unique. Ces deux asymptotes sont mises en évidence dans l'équation suivante. Nombre des constantes : 9.

$$(p^2 + \lambda q)(p^2 + \gamma r) + \nu p + \mu = 0.$$

Mais comme les deux séries d'asymptotes paraboliques sont ou réelles ou imaginaires, il faut distinguer deux espèces indiquées dans l'équation suivante (qui est équivalente à la précédente) par le double signe :

$$[(p^2 + \lambda q)^2 \mp \gamma^2 r^2] + \nu p + \mu = 0. \qquad (128, 129)$$

Pour déterminer l'espèce limite entre ces deux-là, examinons ce qui arrive dans le cas de paramètres égaux : r se réduit alors à $(p + \pi)$, ce qui fait disparaître deux constantes à la fois de l'équation précédente. Cette circonstance indique une espèce intermédiaire. Dans celle-ci, en effet, les deux séries d'asymptotes paraboliques s'éloignent à l'infini ; il n'y a pas d'asymptote parabolique proprement dite. De même que deux asymptotes rectilignes et infiniment éloignées sont remplacées par une parabole, deux asymptotes paraboliques infiniment éloignées sont remplacées par une asymptote unique du quatrième degré. L'équation de cette espèce est la suivante :

$$(p^2 + \lambda q)^2 + \nu(p + \pi)(q + x) + \mu = 0. \qquad (130)$$

Dans le cas de paramètres égaux, les équations (128) et (129) deviennent

$$(p^2 + \lambda q)^2 \mp \gamma^2 (p + \pi)^2 + \mu = 0,$$

et peuvent s'écrire sous la forme suivante, pour faire ressortir les deux asymptotes osculatrices dans le cas où celles-ci sont réelles :

$$(p^2 + \lambda q)[(p + \pi)^2 + \lambda (q + x)] + \mu = 0.$$

Dans ce cas, il faut que les huit points d'intersection passent tous à l'infini, pour que le contact de la courbe et d'une parabole soit du premier ordre, tandis que dans le cas général il suffit que cinq points, et, dans le cas de l'équation (128), que sept points d'intersection passent à l'infini. Pour les courbes du quatrième degré, les axes des deux asymptotes paraboliques à paramètres égaux ne peuvent pas coïncider. Cela exigerait qu'on pût faire disparaître π dans l'équation précédente, sans la rendre décomposable en deux facteurs du second degré. A plus forte raison, il est impossible que deux asymptotes paraboliques de la courbe coïncident en une seule (*).

(*) *Euler* compte également trois espèces du cas D, désignées par lui comme la 139e, 140e et 141e. Mais toutes ses conclusions sont erronées. En partant de l'équation

$$(y^4 + ay^2x + ex^2) + cy^2 + dyx + fy + gx + h = 0,$$

il décompose son premier terme en deux facteurs du second degré de la manière suivante :

$$(y^2 + px)(y^2 + p'x);$$

ce produit égalé à zéro représente deux paraboles ayant même axe et même sommet. Ces deux paraboles sont d'après lui les deux asymptotes de la courbe. Comme partout il ne voit que deux asymptotes paraboliques là où il y en a une infinité.

E. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite rencontre la courbe en un point unique. Il y a à l'infini suivant cette direction un point triple. Des trois tangentes de ce point, l'une est infiniment éloignée; les deux autres sont les deux asymptotes rectilignes de la courbe et peuvent être ou imaginaires, ou réelles, ou confondues en une seule. A l'autre tangente répond une série infinie d'asymptotes paraboliques qui coupent la courbe en général en deux points. Dans le nombre se trouve une parabole osculatrice qui rencontre la courbe en général et au plus, en un point unique. Nombre des constantes : 8.

$$(p^2+\xi^2)(p^2+\lambda q)+\nu p+\mu=0, \qquad (131)$$
$$(p^2-\xi^2)(p^2+\lambda q)+\nu p+\mu=0, \qquad (132)$$
$$p^2(p^2+\lambda q)+\nu p+\mu=0. \qquad (133)$$

Mais ces deux asymptotes dépendent en partie du choix arbitraire des axes des coordonnées, et d'autres asymptotes en effet vont se présenter, si, par exemple, la courbe proposée est rapportée à un autre axe des y, parallèle au premier. Je dis plus, aucune des deux paraboles d'*Euler* n'est une asymptote de la courbe. Pour le faire voir, désignons, en donnant à l'abscisse x une valeur infinie, la valeur de l'ordonnée répondant aux points de l'une des deux paraboles par y, de manière qu'on ait

$$y^2+px=0,$$

et la valeur correspondant à un point de la courbe par $(y+\beta)$, il viendra

$$(y+\beta)^2+px=-\frac{c(y+\beta)^3+d(y+\beta)x+f(y+\beta)x+gx+h}{(y+\beta)^2+p'x},$$

et de là on tire, en ayant égard à l'équation précédente et en négligeant convenablement,

$$\beta=\frac{d}{2(p-p')}=\frac{d}{\sqrt{a^2-4e}}.$$

Donc, pour que la parabole en question devienne une asymptote de la courbe, il faut la déplacer parallèlement à ses diamètres d'une distance égale à la valeur de β. Si l'on a

$$a^2-4e=0,$$

Euler en conclut que les deux asymptotes paraboliques coïncident, ce qui ne peut jamais arriver. Dans ce cas le déplacement de la parabole déterminée par lui doit être infiniment grand, pour qu'elle devienne asymptote; c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'asymptote parabolique dans ce cas.

F. La courbe a un point triple comme dans le cas précédent; deux de ses trois tangentes ont passé à l'infini. Il y a une seule asymptote rectiligne, ne coupant point la courbe. En outre, il y a une série infinie d'asymptotes cubi-paraboliques rencontrant la courbe en général en un seul point, tandis que l'une d'elles ne la coupe pas du tout. L'ordre du contact qui en général est $\frac{2}{3}$ s'élève pour celle-ci à l'unité. Nombre des constantes : 7.

$$(p + \pi)(p^3 + \lambda q) + u = 0. \qquad (134)$$

G. Les tangentes du point triple à l'infini sont situées elles-mêmes, toutes les trois, tout entières à l'infini. Il y a une infinité d'asymptotes paraboliques du quatrième ordre, qui coupent toutes la courbe proposée en deux points. L'ordre de ces asymptotes, toutes comprises dans l'équation suivante, en y regardant q comme une fonction linéaire absolument arbitraire,

$$p^4 + \lambda q = 0,$$

s'élève à $\frac{1}{4}$; mais en général il n'y a pas une de ces asymptotes pour laquelle cet ordre monte plus haut. Nombre des constantes : 6.

$$p^4 + \lambda q + \nu p^2 = 0. \qquad (135)$$

Paris, 25 février 1836.