JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. M. AMPÈRE

Mémoire sur les Équations générales du Mouvement

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 211-228.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__211_0>

MÉMOIRE

Sur les Équations générales du Mouvement (*),

PAR A. M. AMPÈRE.

I.

Quand un point matériel m est soumis à l'action d'une force extérieure constante ou variable, ou, ce qui est la même chose, à l'action de plusieurs forces extérieures qu'on peut toujours réduire à une seule résultante, on sait que les trois composantes de cette résultante parallèlement à trois axes coordonnés rectangulaires ox, oy, oz sont proportionnelles aux différentielles secondes, prises par rapport au temps, des coordonnées x, y, z, du point mobile. Lorsque le mouvement est rectiligne uniforme, ces trois différentielles sont égales à zéro, et cela doit être en effet, puisque le mouvement rectiligne uniforme est précisément celui d'un mobile sur lequel les forces extérieures ont cessé d'agir. Lorsque le mouvement au contraire est varié, en nommant X, Y, Z, les trois composantes de la force extérieure, t le temps, et m la masse du point mobile, on a les équations connues

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z},$$

lesquelles servent à deux fins, 1°. à faire connaître X, Y, Z lorsque

(*) Ce mémoire a été rédigé en 1826, à l'occasion des leçons que je faisais sur ce sujet au collége de France.

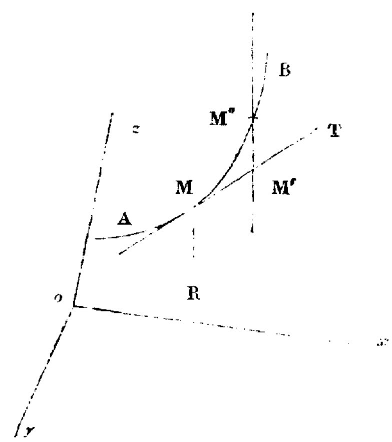
x, y, z, sont des quantités connues en fonction du temps; 2°. à faire connaître x, y, z, lorsque les données de la question sont X, Y, Z.

Les trois équations fondamentales que nous venons de rappeler sont admises par tous les géomètres, et le principe qui les contient est connu sous le nom de *principe des forces accélératrices*. Mais si l'on s'accorde généralement à en reconnaître l'exactitude, on est au contraire loin de s'entendre sur la manière dont on doit les démontrer, puisque les uns regardent avec Laplace le principe des forces accélératrices comme déduit d'un résultat d'expérience, tandis que d'autres au contraire, parmi lesquels figure Euler, ont essayé d'en établir la vérité *à priori*. Cette dissidence entre les premiers géomètres indique assez les difficultés du sujet. Toutefois, en examinant attentivement la question, il nous a semblé qu'elle se trouvait résolue sans beaucoup de peine, pourvu que l'on se fît une idée bien nette de l'inertie de la matière et de la force que cette inertie produit lorsque l'on vient à altérer le mouvement d'un mobile par l'action d'une cause extérieure quelconque. Il est visible, en effet, que cette force est nulle dans le mouvement rectiligne uniforme; et que dans un mouvement varié, elle est toujours égale et directement opposée à la force extérieure qui sollicite le mobile, et qui altère l'intensité ou le sens de sa vitesse. On voit donc que pour établir le principe des forces accélératrices, il suffit de déterminer la direction et l'intensité de la force produite par l'inertie, ce qui paraît beaucoup plus facile, et ce que nous avons essayé de faire dans ce mémoire dont l'idée fondamentale nous est connue depuis plus de vingt ans. Il est clair que dans notre démonstration, nous serons contraints d'admettre quelque chose du principe des mouvements relatifs de Laplace, que ce grand géomètre a pris comme une donnée de l'observation et dont il a déduit celui des forces accélératrices; mais tandis que ce principe considéré en lui-même et dans toute sa généralité, est loin d'être évident, nous croyons n'en avoir conservé que ce qui est d'une évidence manifeste, à peu près comme pour démontrer le parallélogramme des forces, on part du cas très simple où les forces sont de même grandeur et où la direction de la résultante est connue *à priori*, puisqu'elle partage alors leur angle en deux parties égales.

II.

Considérons un point mobile M qui, par l'action d'une cause quelconque, décrive une ligne droite ou courbe AMB (*). Pour lui faire décrire cette ligne, on peut imaginer que le mobile soit placé dans une petite cavité sphérique, au centre d'un parallélépipède solide qui l'enveloppe et dont les arêtes demeurent constamment parallèles à elles-mêmes pendant que le centre décrit la ligne AMB, et que l'enveloppe se meuve en entraînant le point matériel M sur cette ligne AMB que l'on veut faire décrire à celui-ci. Cela posé, examinons les deux cas distincts qui peuvent se présenter, celui du mouvement rectiligne uniforme et celui du mouvement varié quelconque.

Si le mouvement est rectiligne uniforme, ce qui exige que le parallélépipède enveloppe et la molécule matérielle aient reçu à la fois et conservent le même mouvement, il n'y aura aucune raison pour que la molécule exerce une pression contre l'enveloppe. Si au contraire on fait prendre au parallélépipède un mouvement rectiligne varié ou un mouvement quelconque sur une courbe AMB



et que de cette manière on amène forcément la molécule de M en M'', au lieu de la laisser aller de M en M' sur la tangente MT, comme cela

(*) Cette ligne est courbe dans la figure, parce que c'est le cas général : le calcul s'applique également aux deux cas arriverait si elle était libre, il est incontestable qu'en vertu de la tendance qu'elle a à conserver son mouvement suivant MT, c'est-à-dire en vertu de l'inertie de la matière, elle pressera l'enveloppe qui l'entraîne.

Or, nous nous proposons présentement de déterminer : 1°. la *direction* de cette force produite par l'inertie. 2°. Son *intensité*.

III.

PREMIÈRE QUESTION. — *Direction de la force produite par l'inertie.*

Pour voir dans quelle direction s'exerce en un point quelconque M de la courbe la pression du mobile contre l'enveloppe, il faut supposer que tout à coup l'enveloppe devienne perméable en M et chercher dans quel sens elle serait alors percée par le point mobile devenu libre. Cette notion de la direction de la force nous paraît la plus simple et la plus exacte de toutes; et nous croyons qu'on devrait l'introduire même en statique. Ainsi pour déterminer la direction d'une force P appliquée à un point M, il faut, suivant nous, renfermer d'abord ce point dans une enveloppe solide; l'effet de la force P est alors de presser l'enveloppe dans le sens même où elle tire; si maintenant on rend l'enveloppe perméable, il est clair que le point M se mettra en mouvement et au premier instant la percera dans une direction déterminée qui est la direction de la force P. Dans ce cas, l'enveloppe est immobile, mais cela est indifférent pour notre définition; qu'elle soit en mouvement ou en repos, on ne peut s'empêcher de regarder la direction dans laquelle le mobile la perce lorsqu'elle devient perméable, comme la direction suivant laquelle il la pressait lorsqu'elle était solide.

Après cette digression, revenons à l'examen du mouvement sur une courbe AMB; et au moment où le mobile est en M, rendons l'enveloppe perméable et cherchons dans quel sens alors elle doit être pénétrée. Or le mobile, devenu libre, s'échappera par la tangente MT et viendra en M′ sur cette tangente, tandis que l'enveloppe continuant son mouvement transportera en M″ le point où il se trouvait d'abord. On comprend d'après cela que les deux points M′, M″ appartiennent à la courbe que le mobile a tracée dans le parallélépipède enveloppe, et comme il nous faut seulement la direction du premier élément de cette courbe, il est clair que pour l'obtenir, nous devrons joindre les points M′, M″ par une ligne droite et chercher ce que cette droite deviendra à la limite, lorsque l'on rendra infiniment petit ou nul le temps employé à parcourir MM′. La droite MR limite de M′M″ sera la direction de la force produite par l'inertie.

En appelant θ le temps que le mobile devenu libre emploie à se transporter, d'un mouvement uniforme, de M en M′ sur la tangente MT, désignant de plus par x, y, z et x', y', z', les coordonnées respectives des points M, M′, et observant enfin que x, y, z sont des fonctions $f(t)$, $\mathrm{f}(t)$, $\mathrm{F}(t)$ du temps t qui répond au point M, on a par les propriétés connues du mouvement uniforme,

$$x' = x + \theta \frac{dx}{dt} = f(t) + \theta f'(t),$$

$$y' = y + \theta \frac{dy}{dt} = \mathrm{f}(t) + \theta \mathrm{f}'(t),$$

$$z' = z + \theta \frac{dz}{dt} = \mathrm{F}(t) + \theta \mathrm{F}'(t).$$

Les coordonnées x'', y'', z'', du point M″ où se transporte pendant le même temps θ le centre du parallélépipède sont également faciles à obtenir : en effet, comme l'enveloppe continue à se mouvoir sur la courbe AMB de la même manière qu'auparavant, il est évident que x'', y'', z'', sont des fonctions de $t+\theta$ absolument composées en $t+\theta$ comme x, y, z, en t, de sorte que l'on a, par le théorème de Taylor,

$$x'' = f(t) + \theta f'(t) + \frac{\theta^2}{2} f''(t + \xi\theta),$$

$$y'' = \mathrm{f}(t) + \theta \mathrm{f}'(t) + \frac{\theta^2}{2} \mathrm{f}''(t + \nu\theta),$$

$$z'' = \mathrm{F}(t) + \theta \mathrm{F}'(t) + \frac{\theta^2}{2} \mathrm{F}''(t + \zeta\theta);$$

développements où l'on sait que ξ, ν, ζ, sont des nombres plus petits que l'unité. On déduit de là,

$$x'' - x' = \frac{\theta^2}{2} f''(t + \xi\theta),$$

$$y'' - y' = \frac{\theta^2}{2} \mathrm{f}''(t + \nu\theta),$$

$$z'' - z' = \frac{\theta^2}{2} \mathrm{F}''(t + \zeta\theta).$$

Si nous tirons à présent la droite M'M'', et si nous observons que $x'' - x', y'' - y', z'' - z'$ sont les trois projections de $M'M'' = k$ sur ox, oy, oz, en nommant λ, μ, ν, les angles de cette droite avec ces mêmes axes, nous aurons

$$\begin{aligned} k \cos \lambda &= x' - x'', \\ k \cos \mu &= y' - y'', \\ k \cos \nu &= z' - z'', \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} k \cos \lambda &= -\frac{\theta^2}{2} f''(t + \xi\theta), \\ k \cos \mu &= -\frac{\theta^2}{2} \mathrm{f}''(t + \eta\theta), \\ k \cos \nu &= -\frac{\theta^2}{2} \mathrm{F}''(t + \zeta\theta), \end{aligned}$$

le signe — provenant de ce que nous cherchons les angles formés par la partie de la droite M'M'' dirigée de M'' vers M'.

Faisant la somme des quarrés de ces trois équations, on obtient

$$k = \frac{\theta^2}{2}\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + \mathrm{f}''(t + \eta\theta)^2 + \mathrm{F}''(t + \zeta\theta)^2},$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= -\frac{f''(t + \xi\theta)}{\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + \mathrm{f}''(t + \eta\theta)^2 + \mathrm{F}''(t + \zeta\theta)^2}}, \\ \cos \mu &= -\frac{\mathrm{f}''(t + \eta\theta)}{\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + \mathrm{f}''(t + \eta\theta)^2 + \mathrm{F}''(t + \zeta\theta)^2}}, \\ \cos \nu &= -\frac{\mathrm{F}''(t + \zeta\theta)}{\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + \mathrm{f}''(t + \eta\theta)^2 + \mathrm{F}''(t + \zeta\theta)^2}}. \end{aligned}$$

Mais pour que ces valeurs conviennent à la droite MR, il faut passer à la limite et y faire $\theta = 0$; si donc on désigne par W le radical

$$\sqrt{f''(t)^2 + \mathrm{f}''(t)^2 + \mathrm{F}''(t)^2},$$

on aura

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= -\frac{f''(t)}{\mathrm{W}} = -\frac{1}{\mathrm{W}} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \cos \mu &= -\frac{\mathrm{f}''(t)}{\mathrm{W}} = -\frac{1}{\mathrm{W}} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \cos \nu &= -\frac{\mathrm{F}''(t)}{\mathrm{W}} = -\frac{1}{\mathrm{W}} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}; \end{aligned}$$

pour les valeurs des cosinus des angles que la force produite par l'inertie fait à chaque instant avec les axes ox, oy, oz. Il reste encore à calculer l'intensité de cette force.

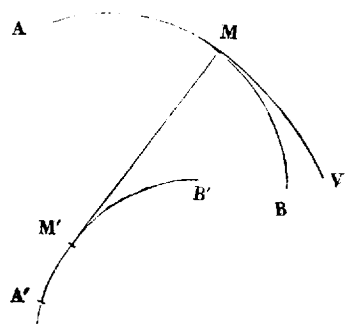
IV.

SECONDE QUESTION. — *Intensité de la force produite par l'inertie.*

Rappelons d'abord une propriété commune aux courbes planes et aux courbes à double courbure, dont nous aurons besoin dans ce qui va suivre. En menant aux divers points d'une courbe quelconque des plans normaux consécutifs, on forme par leurs intersections successives une surface développable, sur laquelle on peut tracer une infinité de développées de la courbe proposée. Ainsi, il est permis d'imaginer que le point matériel M décrive la courbe AMB d'après la loi que voici :

Soit A'M'B' une quelconque des développées de AMB : il suffit pour faire décrire au point M la courbe AMB de concevoir ce point mobile renfermé dans un tube cylindrique infiniment étroit et attaché à un fil flexible constamment dirigé suivant l'axe du tube, dont une des extrémités est fixée au point donné A'. On peut également supposer que le point mobile est retenu dans le tube par une cloison perpendiculaire à son axe, et que dans l'une ou l'autre hypothèse le tube roule sur la courbe A'M'B' à laquelle il demeure constamment tangent.

Tant que la cloison sera fixe, la longueur A'M'M sera constante et le point mobile parcourra la courbe AMB.



Mais si l'on suppose que la cloison glisse dans le tube suivant une loi quelconque, le point mobile décrira une autre courbe; et l'on aura la direction de la force produite par l'inertie dans ce nouveau mouvement, en mettant dans les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, les fonctions dérivées du second ordre des coordonnées de la nouvelle courbe à la place des dérivées du second ordre des coordonnées de la première.

Ayant ainsi la direction de la force produite par l'inertie, si on la décompose suivant deux directions rectangulaires entre elles, l'une perpendiculaire au tube et l'autre à la cloison, on aura les pressions exercées respectivement par le point mobile sur la matière qui les compose. Or, parmi tous les mouvements qu'on peut supposer à la cloison dans le tube, il y en aura un pour lequel la pression exercée contre cette cloison sera nulle; et il est clair qu'on le déterminéra en égalant à zéro la valeur de la pression exercée contre la cloison: celle-ci donc n'ayant plus aucune action contre le point mobile, on pourra alors la supprimer; d'où il suit qu'en nommant ε l'angle que la direction de la force d'inertie fait avec l'axe du tube, la courbe décrite par le point mobile quand la cloison est supprimée, s'obtiendra en combinant l'équation $\varepsilon = 100^\circ$ avec les équations qui déterminent la position du tube à chaque instant.

Maintenant la démonstration vers laquelle nous tendons, exige que nous cherchions $\cos\varepsilon$, cosinus qui est nul lorsque $\varepsilon = 100^\circ$. Afin de comprendre en une seule analyse tous les cas distincts dont nous venons de nous occuper, nous ferons l'hypothèse la plus générale, savoir celle qui consiste à regarder la longueur A'M'M comme variable, bien que cette longueur demeure constante lorsqu'on admet une cloison fixe; et en effet pour passer du cas général à ce cas particulier, il suffira d'égaler à zéro les différentielles de A'M'M.

Cela posé, pour plus d'ordre, nous désignerons par des lettres accentuées tout ce qui se rapporte à la développée, et par les mêmes lettres sans accent ce qui sera relatif à la développante. Nous ferons

$$\mathrm{AM} = s,\ \mathrm{A'M'} = s',\ \mathrm{A'M'} + \mathrm{M'M} = r,\quad \text{d'où } \mathrm{MM'} = r - s'.$$

Les coordonnées du point M étant x, y, z, celles du point M' seront x', y', z'; les cosinus des angles formés par la droite MM' avec les axes auront donc pour valeurs,

$$\frac{x - x'}{r - s'}, \quad \frac{y - y'}{r - s'}, \quad \frac{z - z'}{r - s'}.$$

Mais la force P produite par l'inertie fait avec les axes des angles dont les cosinus ont été trouvés égaux à

$$-\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}:$$

donc on aura

$$\cos \varepsilon = -\frac{1}{W}\left(\frac{x - x'}{r - s'} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y - y'}{r - s'} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{z - z'}{r - s'} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Pour transformer cette expression, différentions les deux membres de l'égalité évidente

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (r - s')^2,$$

en y regardant x, y, z, x', y', z', comme des fonctions du temps t, ce qui nous donnera

$$\left.\begin{aligned} &(x - x')\frac{dx}{dt} + (y - y')\frac{dy}{dt} + (z - z')\frac{dz}{dt} \\ -&(x - x')\frac{dx'}{dt} - (y - y')\frac{dy'}{dt} - (z - z')\frac{dz'}{dt} \end{aligned}\right\} = (r - s')\frac{dr}{dt} - (r - s')\frac{ds'}{dt}. \quad (1)$$

Or, on pourrait voir *à priori*, et il est facile de démontrer directement que les parties négatives provenant de la différentiation des lettres primées sont égales dans chaque membre.

En effet, la droite MM' étant tangente à A'M'B' en M', les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes sont égaux à $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$, et l'on peut égaler ces expressions à celles que nous avons obtenues précédemment pour les mêmes cosinus, d'où résulte

$$\frac{x - x'}{r - s'} = \frac{dx'}{ds'}, \quad \frac{y - y'}{r - s'} = \frac{dy'}{ds'}, \quad \frac{z - z'}{r - s'} = \frac{dz'}{ds'},$$

égalités desquelles on conclut aisément

$$\begin{aligned} &(x - x')\frac{dx'}{dt} + (y - y')\frac{dy'}{dt} + (z - z')\frac{dr'}{dt} \\ &\qquad = \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{r - s'} \cdot \frac{ds'}{dt} = (r - s')\frac{ds'}{dt}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'équation (1) se réduit donc à

$$(2)\qquad (x-x')\frac{dx}{dt}+(y-y')\frac{dy}{dt}+(z-z')\frac{dz}{dt}=(r-s')\frac{dr}{dt};$$

et en la différentiant de nouveau, en faisant attention que $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, on a

$$\begin{aligned}(3)\qquad &(x-x')\frac{d^2x}{dt^2}+(y-y')\frac{d^2y}{dt^2}+(z-z')\frac{d^2z}{dt^2}\\ &+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{dz'}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}\\ &=(r-s')\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Cette équation se simplifie encore parce que les termes affectés du signe — sont égaux dans les deux membres.

En effet en substituant les valeurs de $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$ qui se déduisent immédiatement de celles de $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dr'}{ds'}$, trouvés plus haut, il vient

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt}+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dr'}{dt}\\ &=\frac{1}{r-s'}\cdot\frac{ds'}{dt}\cdot\left[(x-x')\frac{dx}{dt}+(y-y')\frac{dy}{dt}+(z-z')\frac{dz}{dt}\right]\\ &=\frac{1}{r-s'}\cdot\frac{ds'}{dt}\cdot(r-s')\frac{dr}{dt}=\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Cela étant, l'équation (3) deviendra

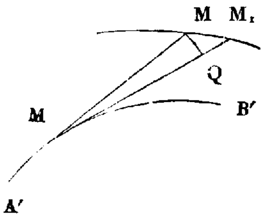
$$\begin{aligned}&(x-x')\frac{d^2x}{dt^2}+(y-y')\frac{d^2y}{dt^2}+(z-z')\frac{d^2z}{dt^2}\\ &\qquad=(r-s')\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2;\end{aligned}$$

ou bien, en divisant par $r-s'$,

$$\begin{aligned}&\frac{x-x'}{r-s'}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{y-y'}{r-s'}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{z-z'}{r-s'}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\\ &\qquad=\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{1}{r-s'}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right].\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de $\cos \varepsilon$; car il suffit pour l'obtenir de multiplier par $-\frac{1}{W}$ la quantité précédente.

Pour transformer d'une autre manière la valeur de ce cosinus, observons que le point matériel renfermé dans le tube qui se meut en restant constamment tangent à $A'M'B'$ doit décrire une trajectoire placée tout entière sur la surface développable que le tube engendre dans son mouvement. Or, si nous considérons un secteur infiniment petit $MM'M_1$ dont la base est l'arc ds de cette trajectoire, et que du point M' comme centre avec MM' pour rayon, nous décrivions l'arc de cercle MQ, nous aurons



$$MM_1 = ds, \quad M_1Q = dr,$$

et, en nommant ω l'angle du secteur développé,

$$MQ = (r - s')\, d\omega.$$

Mais

$$MM_1 = \sqrt{\overline{M_1Q}^2 + \overline{MQ}^2};$$

donc

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r - s')^2\, d\omega^2},$$

et

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r - s')^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2;$$

d'où

$$\frac{1}{r - s'}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = -(r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Donc

$$\cos \varepsilon = -\frac{1}{W}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - (r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right].$$

La quantité que nous venons d'écrire fournit le cosinus de l'angle que fait avec l'axe du tube la direction de la force produite par l'inertie. Mais il y a, ainsi que nous l'avons dit à l'avance, deux cas différents à examiner. En effet, lorsque r est variable, il faut en faire usage sous la forme précédente; mais lorsque le point matériel M est arrêté dans le tube par une cloison imperméable, la distance r est constante et $d^2r = 0$; on a alors

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{W}(r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right).$$

Lorsque la cloison est supprimée et que le mobile se meut librement dans le tube, on a l'égalité $\varepsilon = 100°$ ou $\cos \varepsilon = 0$, ainsi que nous l'avons démontré ailleurs : il est visible en outre que dans ce cas, r est une quantité variable. De l'équation $\cos \varepsilon = 0$, nous tirons donc

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Or, supposons que le point mobile ait été d'abord assujetti à parcourir la développante AMB (*Voyez* la fig., pag. 217) et qu'il soit parvenu en M au bout du temps t; puis concevons qu'à cet instant, la cloison qui le forçait à parcourir AMB soit devenue perméable; alors le point mobile se trouvant libre de se mouvoir le long du tube, décrira une nouvelle trajectoire MV pour laquelle l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

aura lieu.

Désignons par r_0 la valeur de A'M'M au moment où la cloison est devenue perméable; après un instant θ cette valeur sera par le théorème de Taylor

$$r = r_0 = \frac{dr_0}{dt}\theta + \frac{d^2r_0}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots$$

Mais quelle que soit la nouvelle trajectoire MV qui, après la perméabilité de la cloison, aura succédé à la première AMB, les deux courbes devront nécessairement avoir la même tangente en M; car la vitesse ne peut changer brusquement ni en grandeur, ni en direction. De là il suit que la dérivée première $\frac{dr_0}{dt}$ doit être la même pour les courbes AMB et MV; donc $\frac{dr_0}{dt} = 0$, sans que les dérivées suivantes soient zéro. Donc l'enfoncement dans la direction du tube à travers la cloison devenue perméable est

$$r - r_0 = \frac{d^2 r_0}{dt^2} \cdot \frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

Cet enfoncement est un résultat de la pression que la cloison éprouvait au moment où elle a été rendue perméable, et cette pression à son tour était représentée par la composante p de la force P produite par l'inertie prise suivant l'axe du tube à l'instant dont nous parlons. D'après ce qui a été dit plus haut, il est évident que

$$p = \mathrm{P} \cos \varepsilon,$$

$\cos \varepsilon$ ayant pour valeur

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{W}} (r_0 - s'_0) \left(\frac{d\omega_0}{dt}\right)^2,$$

s'_0 et ω_0 étant ce que deviennent s' et ω pour $r = r_0$. Maintenant il est facile d'exprimer $r - r_0$ au moyen des forces P, p, il suffit d'observer que le mobile étant devenu libre, on a

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} = (r_0 - s'_0) \left(\frac{d\omega_0}{dt}\right)^2 = \frac{\mathrm{W}p}{\mathrm{P}},$$

donc

$$r - r_0 = \frac{\mathrm{W}p}{\mathrm{P}} \cdot \frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots$$

Si nous considérons un autre point M″ se mouvant sur une autre courbe A″M″B″ d'une manière analogue, et que r'', r''_0, W″, p'', P″ soient pour ce mouvement les quantités correspondantes à r, r_0, W, p, P, nous aurons de même

$$r'' - r''_0 = \frac{\mathrm{W}''p''}{\mathrm{P}''} \cdot \frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

d'où nous conclurons, en divisant ces quantités l'une par l'autre et passant ensuite à la limite, c'est-à-dire faisant $\theta = 0$,

$$\frac{r - r_0}{r'' - r''_0} = \frac{\frac{\mathrm{W}p}{\mathrm{P}}}{\frac{\mathrm{W}''p''}{\mathrm{P}''}},$$

pour le rapport des *enfoncements instantanés* produits dans les deux mouvements par les pressions respectives p et p'' exercées contre les cloisons.

Or, il est évident que si, dans un temps infiniment petit, les pressions p, p'' qu'exerçaient les deux mobiles à l'instant où les cloisons ont été rendues perméables, ont produit dans ces cloisons des enfoncements égaux, ces pressions étaient égales entre elles: de plus, comme les enfoncements dépendent de la direction des tubes, c'est-à-dire de celle des développées en nombre infini dans chacune des deux courbes dont on a fait choix d'abord pour enrouler les tubes, on peut supposer qu'elles ont été prises de manière que $r - r_0$ soit égal à $r'' - r''_0$. En adoptant cette hypothèse, nous aurons d'après ce que nous venons de dire, $p = p''$, d'où résulte l'égalité

$$1 = \frac{\frac{W}{P}}{\frac{W''}{P''}},$$

puis la proportion

$$P : P'' :: W : W''.$$

Au reste, il est bon d'observer qu'on ne peut dire que $p = p''$ même en faisant $r - r_0 = r'' - r''_0$, que quand θ est infiniment petit et que l'on a passé à la limite en posant $\theta = 0$; car dans un temps fini θ, nous ne savons pas quelles sont les lois du mouvement des deux points devenus libres dans ces tubes; la seule chose certaine *à priori*, c'est que plus le temps θ sera petit, plus (si les enfoncements des deux points sont les mêmes) les forces p, p'' qui les ont produits approcheront d'être égales, tellement que pour $\theta = 0$, l'égalité $\frac{p}{p''} = 1$ sera tout-à-fait rigoureuse.

Il est donc bien prouvé par cette analyse qu'on a la proportion

$$P : P'' :: W : W''.$$

Si nous considérons un mouvement où $W'' = 1$, et que nous choisissions pour unité la force P'' correspondante, la force P sera égale à W, et l'on aura

$$P = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Ce résultat se rapporte à l'unité de masse; car, jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de la masse de nos mobiles que nous avons implicitement supposée être la même pour tous et égale à 1 : nous indiquerons dans l'article suivant, le moyen de tenir compte de cet élément nouveau. Mais auparavant, observons que, la masse étant toujours l'unité, la quantité W'' sera égale à 1 pour le mouvement uniforme avec l'unité de vitesse sur un cercle dont le rayon $= 1$; car en prenant l'origine des coordonnées au centre de la courbe et les axes ox, oy, dans son plan, et dénotant par ω l'angle Mox du rayon vecteur avec l'axe des x, on aura pour les coordonnées du point mobile M :

$$z = 0, \quad x = \cos\omega, \quad y = \sin\omega;$$

donc,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos\omega.\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\sin\omega.\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Nous ne mettons pas $\frac{d^2\omega}{dt^2}$; car cette différentielle seconde est nulle, le mouvement étant uniforme. Donc ici

$$W'' = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = 1,$$

puisque $\frac{d\omega}{dt}$ représente la vitesse que nous supposons être l'unité. La force produite par l'inertie qu'on nomme *force centrifuge* dans le mouvement que nous venons de considérer est donc notre unité de force, et c'est en adoptant cette unité qu'on a en général

$$P = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = W.$$

V.

Mais cette formule se rapporte à l'unité de masse; voyons ce qu'elle deviendrait si la masse du mobile était m, et pour cela faisons nous une idée bien nette de ce qu'on doit entendre par la masse d'un corps.

Si nous supposons qu'on prenne deux corps différents renfermés dans des parallélépipèdes, comme nous l'avons déjà vu, et qu'on les entraîne de la même manière sur une même courbe, ils presseront les parallélépipèdes; et les pressions exercées contre ces enveloppes pourront être égales ou différentes. De là l'idée de la masse des corps; car si les pressions sont égales, les corps seront dits avoir des masses égales; ils auront des masses différentes, si les pressions sont différentes.

Si à présent on enferme dans une cavité deux, trois, quatre.... corps ayant des masses égales, les pressions produites deviendront doubles, triples, quadruples.... En général, si le nombre des points matériels devient m fois plus grand, la pression et la masse deviendront toutes deux m fois plus grandes.

Si l'on applique à des masses égales des forces égales, les vitesses produites dans le même temps seront évidemment égales, et l'on voit en outre que les forces qui imprimeront le même mouvement à des corps de masses différentes, seront entre elles comme ces masses. Observons en passant que ceci fournit un moyen très simple de mesurer les masses des corps, car de l'égalité de vitesse que tous dans le même temps acquièrent dans le vide et du principe que nous venons d'établir, il faut conclure que ces masses sont proportionnelles aux poids.

Des notions que nous venons de donner sur les masses des corps, il résulte qu'en appelant m la masse du mobile qui décrit la courbe AMB, et conservant à la quantité W sa signification, la force produite par l'inertie P est exprimée par la formule

$$P = mW.$$

De plus, les cosinus des angles que cette force fait avec les axes ayant pour valeurs d'après les démonstrations précédentes

$$\cos\lambda = -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2x}{dt^2},\ \cos\mu = -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},\ \cos\nu = -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2z}{dt^2},$$

on voit que les trois composantes de P suivant ox, oy, oz, sont

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

VI.

Il ne peut plus y avoir aucune difficulté à établir les équations du mouvement d'un point matériel; car en appelant X, Y, Z les trois composantes de la force extérieure qui sollicite ce point et observant que ces trois composantes doivent être égales et directement opposées à celles de la force produite par l'inertie, on obtient les égalités :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z}$$

admises par tous les géomètres.

Mais pour dissiper toute obscurité reprenons la chose d'un peu plus haut. Considérons un point mobile M renfermé dans un parallélépipède solide et parcourant la courbe AMB sous l'influence de ce parallélépipède. La force P produite par l'inertie du mobile pressera ce parallélépipède dans une direction et avec une intensité que nous avons déterminées tout à l'heure. Appliquons maintenant au mobile M une force Q égale et directement opposée à P : il est évident que la force Q fera équilibre à la pression que supportait l'enveloppe et l'anéantira : dès-lors l'enveloppe n'exerçant plus aucune action sur le point M deviendra inutile et pourra être supprimée sans qu'il cesse de décrire la courbe AMB, sous l'influence de la force P, tout comme il la décrivait sous l'influence de l'enveloppe. Ainsi la force Q est celle qu'il faut appliquer au mobile pour lui faire parcourir la trajectoire donnée, et par suite celle dont les composantes ont été nommées X, Y, Z : donc, ces dernières sont égales et directement opposées aux composantes de la force d'inertie, ce qui nous ramène aux équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z},$$

qui contiennent les lois du mouvement d'un point matériel. Il est aisé de voir que par un raisonnement identique à celui qui précède, on démontrerait l'équation générale du mouvement telle qu'elle est dans la mécanique analytique, où on la présente comme une conséquence de ce que l'on appelle le principe de d'Alembert. Aussi à nos yeux ce principe et celui des forces accélératrices se confondent avec le principe général de la force produite par l'inertie.