JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur le Calcul des inégalités périodiques du mouvement des Planètes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 197-210.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__197_0>

NOTE

Sur le Calcul des inégalités périodiques du mouvement des Planètes,

PAR J. LIOUVILLE.

(Présentée à l'Académie des Sciences, le 29 février 1836) (*)

1. Lorsqu'une planète m' agit sur une autre planète m, elle produit dans le mouvement de cette dernière des inégalités *séculaires* ou *périodiques* qui font varier en fonction du temps les constantes arbitraires du mouvement elliptique. Le calcul de ces inégalités dépend du développement en série d'une fonction que Laplace désigne par R dans son ouvrage et qu'il appelle *fonction perturbatrice*. Les coefficients des divers termes du développement dont il s'agit peuvent être calculés de plusieurs manières. On les exprime, par exemple, en quadratures définies doubles. Je vais montrer que l'on peut quelquefois substituer à ces intégrales doubles des intégrales simples ayant à très peu près les mêmes valeurs, ce qui abrégera, ce me semble, le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes. Au fond, la méthode dont je propose de faire usage, dépend de quadratures définies doubles, tout aussi bien que la méthode ordinaire; mais ici les quadratures sont rapportées à de nouvelles variables qui permettent d'effectuer, pour ainsi dire, immédiatement, et avec une approximation très grande, l'une des deux intégrations indiquées. Dans chaque cas particulier, on jugera sans peine quels peuvent être les avantages et les inconvénients de ce nouveau procédé.

(*) Voyez le rapport de M. Poisson sur cette Note (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. Avril 1836).

2. Soient r le rayon vecteur Om mené du centre de la planète m au centre O du soleil, a le demi-grand axe, e l'excentricité de l'orbite de cette planète, γ son inclinaison sur un plan fixe que nous prendrons pour plan des xy et qui sera, si l'on veut, le plan de l'écliptique à l'époque d'où l'on compte le temps t : désignons par α la longitude du nœud ascendant OA comptée sur le plan des xy à partir de l'axe des x, par $v-\alpha$ l'angle du rayon vecteur r avec la droite OA et par ϖ la valeur de v qui répond au périhélie. Si l'on nomme u l'anomalie excentrique, les valeurs de r et de v, dans le mouvement elliptique de la planète m, seront données en fonction de u par les équations

$$r = a(1 - e\cos u), \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v - \varpi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u.$$

Pour trouver à son tour la valeur de u en fonction de l'anomalie moyenne ζ, il faut résoudre l'équation

$$\zeta = u - e\sin u.$$

Enfin, en nommant nt le moyen mouvement de la planète m et $\varepsilon - \varpi$ la valeur de ζ pour $t = 0$, on a, au bout d'un temps t quelconque, $\zeta = nt + \varepsilon - \varpi$.

Pour une autre planète m', il existe des formules semblables :

$$r' = a'(1 - e'\cos u'), \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v' - \varpi') = \sqrt{\frac{1+e'}{1-e'}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u',$$
$$\zeta' = u' - e'\sin u', \quad \zeta' = n't + \varepsilon' - \varpi'.$$

Le cosinus s de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et r' se calculera aisément d'après ce qui précède : en effet on a

$$s = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

x, y, z, étant les coordonnées du point m, x', y', z' celles du point m'; mais, par les formules connues, si l'on transforme les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, il vient

$$\begin{aligned}
x &= r[\cos\alpha\cos(v-\alpha) - \cos\gamma\sin\alpha\sin(v-\alpha)],\\
y &= r[\sin\alpha\cos(v-\alpha) + \cos\gamma\cos\alpha\sin(v-\alpha)],\\
z &= r\sin\gamma\sin(v-\alpha),
\end{aligned}$$

et

$$x' = r'[\cos\alpha'\cos(v' - \alpha') - \cos\gamma'\sin\alpha'\sin(v' - \alpha')],$$
$$y' = r'[\sin\alpha'\cos(v' - \alpha') + \cos\gamma'\cos\alpha'\sin(v' - \alpha')],$$
$$z' = r'\sin\gamma'\sin(v' - \alpha'),$$

d'où l'on peut tirer la valeur de s en fonction de r, r', v, v', α, α', γ, γ'.

3. Ces formules du mouvement elliptique des planètes représentent encore leur mouvement troublé par une cause quelconque pourvu que l'on remplace les constantes a, e, ϖ, α, γ, ε, a', e', ϖ', α', γ', ε' par des fonctions convenables du temps t : en même temps on écrira $\int ndt$ au lieu de nt, $\int n'dt$ au lieu de $n't$; et les intégrales $\int ndt$, $\int n'dt$ que nous désignerons par ρ, ρ', représenteront ce qu'on appelle alors les moyens mouvements de m, m'.

Pour déterminer les perturbations que la planète m' produit dans le mouvement de la planète m, il faut développer en série la fonction désignée par R dans la *Mécanique céleste* et nommée *fonction perturbatrice*, parce que ses dérivées partielles prises par rapport à x, y, z et précédées du signe — représentent les composantes de la force perturbatrice respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z.

L'expression de R en fonction de r, r', s est

$$\mathrm{R} = \frac{m'rs}{r'^2} - \frac{m'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr's}};$$

et par conséquent, on doit regarder R comme une fonction périodique de ζ et ζ', renfermant en outre les éléments elliptiques a, a', e, e', etc. (*).

Cela posé, pour calculer les variations des constantes a, e, ϖ, α, γ, ε et du moyen mouvement ρ, en fonction du temps t, qui sont produites par l'action perturbatrice de la planète m', on se servira des formules

---

(*) Les inégalités produites par le premier terme $\frac{m'rs}{r'^2}$ de R étant aisées à calculer par divers procédés, on pourra, si l'on veut, appliquer les raisonnements qui suivent au second terme de R seulement. Il est d'ailleurs naturel de considérer à part ce second terme puisqu'il reste le même (abstraction faite du coefficient numérique m') quand, au lieu d'étudier l'action de m' sur m, on étudie celle de m sur m'.

de Lagrange dans lesquelles les dérivées $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, etc. sont exprimées au moyen des différentielles partielles de R prises par rapport aux éléments de la planète troublée et multipliées par des coefficients dans lesquels le temps t n'entre pas explicitement. On a, par exemple,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{3}{a^2}\cdot\frac{dR}{d\epsilon}, \quad \frac{da}{dt} = -\frac{2}{an}\cdot\frac{dR}{d\epsilon} :$$

il existe des formules semblables pour les variations des autres éléments.

Quand on néglige, comme nous le ferons dans cette note, le carré de la force perturbatrice, on doit regarder dans le second membre toutes les quantités ζ, ζ', a, a', e, e', etc., comme réduites à leurs valeurs elliptiques; et en désignant par la caractéristique δ les variations éprouvées par ces quantités, on a

$$\frac{d^2\delta\rho}{dt^2} = \frac{3}{a^2}\cdot\frac{dR}{d\epsilon}, \quad \frac{d\delta a}{dt} = -\frac{2}{an}\cdot\frac{dR}{d\epsilon}, \ldots$$

Si maintenant on développe R en une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de ζ et ζ', le terme de ce développement qui sera indépendant de ζ et ζ' produira seul les inégalités séculaires des éléments de l'orbite de m; et au contraire les termes contenant sous les signes *sinus* et *cosinus* les quantités ζ et ζ' produiront les inégalités périodiques de ces mêmes éléments.

Si par exemple R contient un terme de la forme M $\sin(i\zeta - i'\zeta')$, i et i' étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, ce terme produira dans les valeurs de $\delta\rho$, δa les inégalités respectives

$$-\frac{3iM}{a^2(in - i'n')^2}\cdot\cos(i\zeta - i'\zeta'), \quad -\frac{2iM}{an(in - i'n')}\cdot\sin(i\zeta - i'\zeta') :$$

de même si R contient le terme $N\cos(i\zeta - i'\zeta')$, ce terme produira dans $\delta\rho$, δa les deux inégalités

$$\frac{3iN}{a^2(in - i'n')^2}\cdot\sin(i\zeta - i'\zeta'), \quad -\frac{2iN}{an(in - i'n')}\cdot\cos(i\zeta - i'\zeta') :$$

ces quatre inégalités dépendent du même argument $in - i'n'$.

4. On peut calculer les valeurs de M et N, correspondantes à un argument donné, par diverses méthodes. En effet, les excentricités e, e' et

l'angle A du plan de l'orbite de m avec le plan de l'orbite de m' étant de très petites quantités pour les principales planètes, on peut développer la fonction R suivant les puissances croissantes de e, e', $\sin \frac{1}{2} A$, et de la sorte on obtient avec tel degré d'approximation qu'on veut les valeurs de M et N en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons des deux planètes.

En faisant usage de cette méthode, on prouve aisément que les coefficients M et N qui répondent à l'argument $in - i'n'$ sont de l'ordre $i - i'$ par rapport aux excentricités et aux inclinaisons (la différence $i - i'$ étant calculée abstraction faite du signe), de manière que si les nombres e, e', $\sin \frac{1}{2} A$ devenaient infiniment petits du premier ordre, les nombres M et N deviendraient infiniment petits de l'ordre $i - i'$ ou $i' - i$ suivant que i est supérieur ou inférieur à i'. Ce théorème remarquable nous sera très utile par la suite.

M. Poisson a donné, pour calculer les valeurs de M et N une méthode qui, dans un grand nombre de cas, est préférable à la précédente. Cette méthode, dont M. Hansen a le premier fait usage dans la théorie de Jupiter et de Saturne, consiste à exprimer les coefficients M et N par des intégrales définies doubles relatives à ζ, ζ' et prises entre les limites o et 2π.

Je me propose de montrer, dans cette Note, que l'on peut quelquefois remplacer avec avantage les intégrales définies doubles par des intégrales définies simples exprimant les valeurs de M et N non pas rigoureusement, mais avec autant d'approximation que l'on voudra. Les formules auxquelles je suis arrivé reposent sur une analyse très simple.

5. Pour fixer les idées, proposons-nous de calculer les coefficients relatifs à la grande inégalité de Saturne produite par l'action de Jupiter, inégalité qui répond à l'argument $5n - 2n'$, nt étant le moyen mouvement de Saturne et $n't$ celui de Jupiter. Puisque R est une fonction de ζ, ζ', représentons cette fonction par $F(\zeta, \zeta')$; représentons en outre par A le terme du développement de R qui ne contient ni ζ, ni ζ', par $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, B_3, \ldots$ les coefficients des cosinus et des sinus des arcs $5\zeta - 2\zeta'$, $10\zeta - 4\zeta'$, $15\zeta - 8\zeta', \ldots$ que nous nommerons, pour abréger, θ, 2θ, $3\theta, \ldots$. D'après cela, si l'on pose

$$\begin{aligned} F(\zeta, \zeta') = A &+ A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + \ldots \\ &+ B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + B_3 \sin 3\theta + \ldots \\ &+ \varphi(\zeta, \zeta'), \end{aligned}$$

ou

$$F(\zeta, \zeta') = A + \Sigma A_p \cos p\theta + \Sigma B_p \sin p\theta + \varphi(\zeta, \zeta'),$$

la fonction $\varphi(\zeta, \zeta')$ ne contiendra aucun terme dépendant de l'argument $5n - 2n'$ ou de ses multiples. Maintenant faisons $\zeta = 2\sigma$, $\zeta' = 5\sigma - \frac{\theta}{2}$, σ désignant une nouvelle variable : il viendra

$$\begin{aligned} F\left(2\sigma, \ 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right) = A + \Sigma A_p \cos p\theta &+ \Sigma B_p \sin p\theta \\ &+ \varphi\left(2\sigma, \ 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right); \end{aligned}$$

et il est clair que le développement de $\varphi\left(2\sigma, 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right)$ ne contiendra aucun terme indépendant de σ : donc en multipliant par $d\sigma$ et intégrant, entre les limites $\sigma = 0$, $\sigma = 2\pi$, les deux membres de l'égalite précédente, on aura

$$A + \Sigma A_p \cos p\theta + \Sigma B_p \sin p\theta = \Psi(\theta),$$

équation où l'on a fait

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(2\sigma, \ 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right) d\sigma.$$

La fonction $\Psi(\theta)$ est, comme on voit, une fonction périodique de θ, et l'on a

$$\Psi(2\pi + \theta) = \Psi(\theta).$$

En changeant θ en $-\theta$, notre équation devient

$$A + \Sigma A_p \cos p\theta - \Sigma B_p \sin p\theta = \Psi(-\theta):$$

combinant cette nouvelle égalité avec celle dont elle dérive, par voie d'addition et de soustraction, et posant

$$\Psi(\theta) + \Psi(-\theta) = 2\varpi(\theta), \quad \Psi(\theta) - \Psi(-\theta) = 2\Pi(\theta),$$

on obtient

$$(1) \qquad A + \Sigma A_p \cos p\theta = \varpi(\theta),$$

$$(2) \qquad \Sigma B_p \sin p\theta = \Pi(\theta).$$

Dans la théorie de Jupiter et de Saturne, on doit regarder comme a peu près insensibles les coefficients A_2, B_2, A_3, B_3,... dont les deux premiers sont déjà du sixième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Or, en négligeant ces coefficients, il vient

$$A + A_1 \cos\theta = \varpi(\theta), \quad B_1 \sin\theta = \Pi(\theta).$$

On peut donner à θ une valeur arbitraire. En posant par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$A = \varpi\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad B_1 = \Pi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Si l'on veut, dans ces formules, substituer à la fonction ϖ la fonction Ψ, on se rappellera que l'équation $\Psi(2\pi + \theta) = \Psi(\theta)$ qui a lieu en général donne

$$\Psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right),$$

et l'on aura

$$A = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right], \quad B_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Si dans l'équation

$$A + A_1 \cos\theta = \varpi(\theta),$$

on pose successivement $\theta = 0$, $\theta = \pi$, puis qu'on ajoute et qu'on retranche l'un de l'autre les deux résultats obtenus, on aura

$$A = \frac{1}{2}[\varpi(0) + \varpi(\pi)], \quad A_1 = \frac{1}{2}[\varpi(0) - \varpi(\pi)],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$A = \frac{1}{2}[\Psi(0) + \Psi(\pi)], \quad A_1 = \frac{1}{2}[\Psi(0) - \Psi(\pi)].$$

Les valeurs de A sont exactes aux quantités près du sixième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons : celles de A_1, B_1 sont exactes aux quantités près du neuvième ordre ; car leurs expressions ne changeraient pas quand même on tiendrait compte des termes $A_2 \cos 2\theta$, $B_2 \sin 2\theta$ négligés tout à l'heure, en continuant à regarder comme insensibles les coefficients A_3, B_3, A_4, B_4,... qui sont au moins du neuvième ordre. En effet, si l'on conserve les termes

$A_2 \cos 2\theta$, $B_2 \sin 2\theta$, l'équation (2) donne

$$B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta = \Pi(\theta),$$

d'où résulte, en posant $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$B_1 = \Pi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

De même l'équation (1) donne

$$A + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta = \varpi(\theta):$$

faisant donc successivement $\theta = 0$, $\theta = \pi$, puis retranchant les deux résultats l'un de l'autre, on trouve

$$A_1 = \tfrac{1}{2}[\varpi(0) - \varpi(\pi)];$$

ces valeurs de A_1, B_1 coïncident avec celles que nous avons obtenues en premier lieu.

En prenant la dérivée par rapport à θ des deux membres de l'équation $A + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta = \varpi(\theta)$, on obtient

$$A_1 \sin\theta + 2A_2 \sin 2\theta = -\frac{d\varpi(\theta)}{d\theta} = -\varpi'(\theta);$$

faisant donc $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a, au même degré d'approximation que ci-dessus : $A_1 = -\varpi'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

6. Désignons en général par i, i' deux nombres entiers premiers entre eux, le premier étant positif et pour fixer les idées, plus grand que le second qui sera indifféremment positif ou négatif. Posons $\zeta = i'\sigma$, $\zeta' = i\sigma - \frac{\theta}{i'}$, ce qui donne $i\zeta - i'\zeta' = \theta$, puis représentons par A_p, B_p les coefficients de $\cos p(i\zeta - i'\zeta')$, $\sin p(i\zeta - i'\zeta')$ dans le développement de R. En faisant

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(i'\sigma,\ i\sigma - \frac{\theta}{i'}\right) d\sigma = \Psi(\theta),$$

puis

$$\Psi(\theta) + \Psi(-\theta) = 2\varpi(\theta), \quad \Psi(\theta) - \Psi(-\theta) = 2\Pi(\theta),$$

on trouvera, par une analyse semblable à celle employée ci-dessus,

$$(3)\qquad A + \Sigma A_p \cos p\theta = \varpi(\theta),$$
$$(4)\qquad \Sigma B_p \sin p\theta = \Pi(\theta):$$

les coefficients A_p, B_p sont de l'ordre $p(i-i')$: si donc on néglige les quantités de l'ordre $2(i-i')$, on aura simplement

$$A + A_1 \cos\theta = \varpi(\theta), \quad B_1 \sin\theta = \Pi(\theta),$$

d'où l'on conclura, sans difficulté,

$$A = \varpi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

ou

$$A = \tfrac{1}{2}[\varpi(0) + \varpi(\pi)] = \tfrac{1}{2}[\Psi(0) + \Psi(\pi)],$$

puis

$$A_1 = \tfrac{1}{2}[\varpi(0) - \varpi(\pi)] = \tfrac{1}{2}[\Psi(0) - \Psi(\pi)],$$

$$B_1 = \Pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Les valeurs de A_1, B_1 sont même exactes aux quantités près de l'ordre $3(i-i')$; car elles ne changeraient pas si l'on tenait compte des termes $A_2 \cos 2\theta$, $B_2 \sin 2\theta$, en continuant à négliger les termes suivants : $A_3 \cos 3\theta$, $B_3 \sin 3\theta, \ldots$ qui sont au moins de l'ordre $3(i-i')$. Ces formules $A_1 = \frac{1}{2}[\Psi(0) - \Psi(\pi)]$, etc. sont d'autant plus exactes que la différence $(i-i')$ est plus considérable et l'on pourra, ce me semble, en tirer parti, dans la théorie des planètes, pour la détermination des inégalités à longue période.

7. Si dans le calcul des coefficients A, A_1, etc., on veut négliger seulement les termes de l'ordre $q(i-i')$, voici quelle marche on pourra suivre (*).

(*) Trouver les valeurs de A, A_1, etc., qui satisfont aux équations (3) et (4), aux quantités près de l'ordre $q\,(i-i')$, c'est-à-dire en négligeant les quantités dont l'ordre est $= q$ ou $> q$ (ce qui réduit les premiers membres de ces équations à un nombre limité de termes), est un problème indéterminé comme tous les problèmes d'interpolation. Que l'on donne à θ un nombre suffisant de valeurs particulières, choisies arbitrairement, et l'on formera par là autant d'équations qu'il en faut pour déterminer toutes les inconnues A, A_1, etc. Chaque équation obtenue de la sorte est, pour ainsi dire, une observation à laquelle ces inconnues doivent satisfaire. Quand les

Les q valeurs de $\sqrt[q]{1}$ sont, comme on sait,

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{q},\quad \cos\frac{4\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{q},\ldots$$
$$\cos\frac{2(q-1)\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(q-1)\pi}{q}.$$

La somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ de ces racines est égale à q ou à zéro, suivant que p est ou n'est pas un multiple de q. On a donc, en supposant $p>0$ et différent de q, $2q$, etc.,

$$1+\left(\cos\frac{2\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{q}\right)^p+\ldots+\left(\cos\frac{2(q-1)\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(q-1)\pi}{q}\right)^p=0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$1+\cos\frac{2p\pi}{q}+\cos\frac{4p\pi}{q}+\ldots+\cos\frac{2(q-1)p\pi}{q}=0,$$
$$\sin\frac{2p\pi}{q}+\sin\frac{4p\pi}{q}+\ldots+\sin\frac{2(q-1)p\pi}{q}=0:$$

la dernière de ces égalités subsiste même quand p est nul et quand p est égal à un multiple de q. Cela posé, reprenons l'équation

$$\Psi(\theta)=A+\Sigma A_p\cos p\theta+\Sigma B_p\sin p\theta;$$

faisons-y successivement $\theta=0$, $\theta=\frac{2\pi}{q}$, $\theta=\frac{4\pi}{q},\ldots$ $\theta=\frac{2(q-1)\pi}{q}$, puis ajoutons tous les résultats obtenus ; le coefficient de A et celui de A_q, A_{2q}, etc., seront égaux à q, et les coefficients des autres termes seront nuls : par suite il viendra

$$q(A+A_q+A_{2q}+\text{etc.})=\Psi(0)+\Psi\left(\frac{2\pi}{q}\right)+\Psi\left(\frac{4\pi}{q}\right)+\ldots+\Psi\left[\frac{2(q-1)\pi}{q}\right],$$

---

seconds membres $\varpi(\theta)$, $\Pi(\theta)$ sont connus en nombres pour une valeur particulière de θ telle que θ_1, il est naturel de ranger les équations que produit l'hypothèse $\theta=\theta_1$ parmi celles dont on fera usage pour déterminer A, A_1, etc. Mais presque toujours les formules que nous démontrons dans le texte seront celles dont l'emploi présentera le plus d'avantages.

ce qui donne

$$A=\frac{1}{q}\left\{\Psi(0)+\Psi\left(\frac{2\pi}{q}\right)+\Psi\left(\frac{4\pi}{q}\right)+\ldots+\Psi\left[\frac{2(q-1)\pi}{q}\right]\right\},$$

en négligeant les termes A_q, A_{2q}, etc., qui sont de l'ordre $q(i-i')$ ou d'ordre supérieur. Si, pour abréger, on représente [quelle que soit la fonction $f(\mu)$] l'expression

$$f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(q-1) \text{ par } \Sigma_0^q f(\mu),$$

on pourra écrire

$$(\alpha)\qquad A=\frac{1}{q}\Sigma_0^q\,\Psi\left(\frac{2\mu\pi}{q}\right).$$

Je reviens à l'équation

$$\Psi(\theta)=A+\Sigma A_p \cos p_1\theta+\Sigma B_{p_1}\sin p_1\theta,$$

dans laquelle j'ai écrit p_1 au lieu de p, et je regarde p comme une valeur particulière de p_1 comprise entre o et q. En multipliant les deux membres par $\cos p\theta$, j'obtiens

$$\begin{aligned}\Psi(\theta)\cos p\theta = A\cos p\theta &+ \tfrac{1}{2}\Sigma A_{p_1}[\cos(p_1+p)\theta+\cos(p_1-p)\theta]\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma B_{p_1}[\sin(p_1+p)\theta+\sin(p_1-p)\theta]:\end{aligned}$$

faisant successivement dans cette équation $\theta=0$, $\theta=\frac{2\pi}{p+q}$, $\theta=\frac{4\pi}{p+q}$, ... $\theta=\frac{2(p+q-1)\pi}{p+q}$, puis ajoutant tous les résultats obtenus, je trouve que, dans le second membre, les coefficients de A, A_1, ... A_{q-1} sont nuls à l'exception de celui de A_p qui est égal à $p+q$: en négligeant les termes de l'ordre $q(i-i')$, on a donc

$$(\beta)\qquad A_p=\frac{2}{p+q}\Sigma_0^{(p+q)}\,\Psi\left(\frac{2\mu\pi}{p+q}\right)\cos\frac{2\mu p\pi}{p+q},$$

et l'on trouvera semblablement, au même degré d'approximation,

$$(\gamma)\qquad B_p=\frac{2}{p+q}\Sigma_0^{(p+q)}\,\Psi\left(\frac{2\mu\pi}{p+q}\right)\sin\frac{2\mu p\pi}{p+q}.$$

Si l'on était obligé de prendre pour q un nombre entier considérable, ces formules auraient peu d'avantages sur celles qui expriment

A, A_p, B_p en quadratures définies doubles. Mais, dans la théorie des principales planètes, il suffira de poser $q = 2$, $q = 3$, ou tout au plus $q = 4$: il faut excepter seulement le cas où l'on aurait $i' = i$, en sorte que jusqu'ici notre méthode ne s'étend pas aux inégalités dépendantes de la différence des moyens mouvements des planètes m, m' ; en effet, quand on a $i' = i$, les coefficients A_1, A_2, ... B_1, B_2... sont tous de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ; et les simplifications fondées sur la petitesse des nombres e, e', $\sin \frac{1}{2} A$ cessent alors d'être possibles. Nous reviendrons tout à l'heure sur ce cas particulier.

(8) Quand dans la valeur de A_p on pose $p = 1$, $q = 2$, il vient

$$A_1 = \frac{2}{3}\left[\Psi(0) - \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right],$$

tandis qu'en posant $p = 1$, $q = 3$, on a

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi(0) - \Psi(\pi)\right],$$

formule beaucoup plus simple que l'autre, et en même temps beaucoup plus exacte, puisque les termes négligés sont dans la première de l'ordre $2(i - i')$ et dans la seconde de l'ordre $3(i - i')$. Semblablement la formule

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

qui correspond à $q = 3$ est à la fois plus exacte et plus simple que celle qu'on obtiendrait en posant $q = 2$ dans la valeur générale de B_1. Il est bien remarquable qu'on diminue la longueur des calculs numériques à effectuer, en employant des formules plus exactes. Ces deux formules $A_1 = \frac{1}{2}[\Psi(0) - \Psi(\pi)]$, $B_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$, qui fournissent aux quantités près du neuvième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons les coefficients relatifs à la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, seront, je l'espère, appréciées par les astronomes. Elles exigent la réduction en nombres de quatre intégrales définies simples, savoir $\Psi(0)$, $\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\Psi(\pi)$, $\Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)$: ces quatre intégrales une fois calculées, on pourra trouver la valeur de A aux termes près de l'ordre $4(i-i')$, (c'est-à-dire, pour Jupiter et Saturne, aux termes près du douzième ordre), puisqu'en posant $q=4$, on a

$$A=\frac{1}{4}\left[\Psi(0)+\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)+\Psi(\pi)+\Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] (*).$$

(9) En modifiant légèrement notre méthode, nous la rendrons applicable aux inégalités dépendantes de la différence des moyens mouvements des planètes m et m'. Pour cela nous opérerons, comme il suit, le développement de R ou F (ζ, ζ').

En posant

$$\sigma=\frac{\zeta-\zeta'}{2}, \tau=\frac{\zeta+\zeta'}{2}, \text{ on a } \zeta=\sigma+\tau, \zeta'=\tau-\sigma:$$

on a ensuite $\qquad F(\zeta,\zeta')=F(\sigma+\tau,\tau-\sigma)$,

quantité qui ne change pas lorsqu'on augmente de 2π une quelconque des deux variables σ, τ, et qui par conséquent peut se réduire en une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de σ et τ. Effectuons d'abord le développement de F $(\sigma+\tau, \tau-\sigma)$ en ayant égard à la seule variable τ : le développement sera de la forme

$$F(\sigma+\tau, \sigma-\tau)=P+\Sigma P_p \cos p\tau+\Sigma Q_p \sin p\tau;$$

P, P_p, Q_p étant des fonctions périodiques de σ. Or, il est aisé de voir que les coefficients P_p, Q_q sont en général de l'ordre p par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. On pourra donc négliger comme insensibles ceux de ces coefficients qui répondront à un indice p égal ou

---

(*) Les intégrales $\Psi(0)$, $\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\Psi(\pi)$, $\Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ représentent les termes indépendants de σ dans les développements des fonctions respectives $F(i'\sigma, i\sigma)$, $F\left(i'\sigma, i\sigma-\frac{\pi}{2i'}\right)$, $F\left(i'\sigma, i\sigma-\frac{\pi}{i'}\right)$, $F\left(i'\sigma, i\sigma-\frac{3\pi}{2i'}\right)$: en représentant par... $A+\Sigma A_p\cos p\sigma+\Sigma B_p \sin p\sigma$ un quelconque de ces développements, A aura tour à tour pour valeur chacune de ces intégrales; et on pourra calculer A par la formule (α) où l'on aura soin de remplacer la fonction Ψ par la fonction F et de prendre q assez grand pour que l'ensemble des termes $A_q+A_{2q}+$ etc. soit négligeable comme on l'a supposé en établissant cette formule (α).

supérieur à un certain nombre q et calculer ensuite les autres par la méthode du n° 7. En effet, pour appliquer ici les formules du n° 7, il suffira d'y remplacer A par P, A_p par P_p, B_p par Q_p, $\varpi(\tau)$ par

$$\tfrac{1}{2}F(\sigma+\tau,\ \tau-\sigma)+\tfrac{1}{2}F(\sigma-\tau,\ -\tau-\sigma),$$

et $\Pi(\tau)$ par

$$\tfrac{1}{2}F(\sigma+\tau,\ \tau-\sigma)-\tfrac{1}{2}F(\sigma-\tau,\ -\tau-\sigma).$$

Et comme, dans la théorie des principales planètes, ces formules seront toujours suffisamment approchées en prenant pour q un nombre entier très petit, on voit que les coefficients P, P_p, Q_p se trouvent déterminés en fonction de σ, sous forme finie et sans aucune intégration. On développera ensuite P, P_p, Q_p en série de sinus et cosinus des multiples de σ; et dans ce nouveau développement tous les coefficients de la série se calculeront à l'aide d'intégrales simples.

Considérons en particulier la quantité P : les arcs qui figureront dans son développement sous les signes *sinus* et *cosinus* seront multiples non-seulement de σ, mais encore de 2σ, car d'une part on a $\sigma=\frac{\zeta-\zeta'}{2}$ et d'autre part R ne peut contenir dans son développement que des multiples de ζ,ζ' et non de leurs moitiés. On fera donc

$$P=A+\Sigma A_i\cos 2i\sigma+\Sigma B_i\sin 2i\sigma,$$

et l'on aura

$$A=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi P\,d\sigma$$

$$A_i=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi P\cos 2i\sigma\,d\sigma,$$

$$B_i=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi P\sin 2i\sigma\,d\sigma.$$

En remplaçant σ par $\frac{\zeta-\zeta'}{2}$, les deux termes $A_i\cos 2i\sigma$, $B_i\sin 2i\sigma$ deviennent $A_i\cos i(\zeta-\zeta')$, $B_i\sin i(\zeta-\zeta')$: ces deux termes sont précisément ceux qui, dans le développement complet de R, répondent à l'argument $i(n-n')$; et l'on voit que notre méthode, convenablement modifiée, s'applique presque aussi bien à ces termes-là qu'aux autres.