JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL TRANSON

Note sur les rayons de courbure des sections coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 191-194.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__191_0>

NOTE

Sur les rayons de courbure des sections coniques ;

PAR ABEL TRANSON.

La construction du rayon de courbure des sections coniques, qui est l'objet de cette note, m'a paru mériter d'être connue par son extrême simplicité et aussi parce qu'elle permet de démontrer, sans aucun appareil de calcul, les lois de la gravitation universelle.

Je rappellerai d'abord que Smith, dans son *Traité d'Optique*, liv. 2, chap. 9 (*), a donné, pour trouver tous les points de la caustique par réflexion d'une courbe quelconque, une construction qui se traduit par la formule

$$\rho\rho' = \tfrac{1}{2} r(\rho + \rho') \cos i,$$

dans laquelle i représente l'angle d'incidence, r le rayon de courbure de la courbe réfléchissante au point d'incidence, ρ et ρ' les distances respectives de ce point au point lumineux et au point correspondant de la caustique.

La formule telle que je viens de l'écrire suppose que les rayons réfléchis soient convergents. Sinon on considérera lequel des deux points conjugués se trouve situé, par rapport à l'élément sur lequel la réflexion a lieu, du côté opposé au centre de courbure de cet élément, et on changera le signe de celle des deux quantités ρ ou ρ' qui s'y rapporte.

(*) Voyez aussi l'*Analyse des infiniments petits* de l'Hôpital, *section VI*.

On voit de suite qu'en appliquant cette formule aux foyers d'une section conique, considérés comme points lumineux conjugués, on aura une relation entre les deux rayons vecteurs, l'angle qu'ils font avec la normale, et le rayon de courbure. Cette relation se trouve exprimée pour l'ellipse et l'hyperbole par une même formule

$$\rho\rho' = ar\cos i, \tag{A}$$

dans laquelle $2a$ est le grand axe de la courbe. Pour la parabole on a

$$2\rho = r\cos i. \tag{B}$$

Déjà ces formules fournissent des constructions très simples pour les rayons de courbure. Mais nous allons donner une autre formule commune à la fois aux trois courbes.

Premièrement, si l'on considère dans l'ellipse et dans l'hyperbole le triangle formé par les deux rayons vecteurs et la partie de l'axe qui joint les foyers, on aura

$$4(a^2 \mp b^2) = \rho^2 + \rho'^2 \mp 2\rho\rho' \cos 2i :$$

les signes supérieurs se rapportent à l'ellipse et les inférieurs à l'hyperbole, et comme $\cos 2i = 2\cos^2 i - 1$, il vient

$$4(a^2 \mp b^2) = (\rho \pm \rho')^2 \mp 4\rho\rho' \cos^2 i;$$

observant maintenant que $4a^2 = (\rho \pm \rho')^2$, on aura finalement

$$b^2 = \rho\rho' \cos^2 i,$$

relation qui convient à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole. Éliminant le produit $\rho\rho'$ entre cette dernière équation et (A), on trouvera

$$r = \frac{b^2}{a\cos^3 i};$$

ou bien, en appelant A le rayon de courbure au sommet du grand axe,

$$r = \frac{A}{\cos^3 i}.$$

Il est facile de prouver que la même relation subsiste dans la parabole. En effet, si l'on y considère la normale comme base d'un triangle isoscèle, ayant pour côtés le rayon vecteur et la partie de l'axe comprise entre le foyer et le pied de la normale, on aura pour la valeur de cette ligne $2\rho \cos i$. Mais ensuite comme la sous-normale est constante et égale à la moitié du paramètre $2p$, cette même normale est égale à $\frac{p}{\cos i}$; on a donc

$$2\rho = \frac{p}{\cos^2 i},$$

ce qui, combiné avec (B), donnera finalement

$$r = \frac{p}{\cos^3 i} = \frac{A}{\cos^3 i}.$$

« D'après cela, pour construire le rayon de courbure en un point » quelconque d'une section conique, on fixera d'abord les directions » de la normale et de l'un des rayons vecteurs qui se rapportent à ce » point. Sur la direction du rayon vecteur et à partir du point donné » on portera une longueur égale au rayon de courbure de la courbe » au sommet de son grand axe; à l'extrémité de cette longueur on » élèvera une perpendiculaire sur le rayon vecteur jusqu'à rencontre » de la normale; de ce point de rencontre on reviendra au rayon vec- » teur par une ligne perpendiculaire à la normale; du point ainsi » déterminé on élevera de nouveau une perpendiculaire au rayon » vecteur; et le point où cette perpendiculaire rencontrera la normale » sera le centre de courbure. »

Je passe au deuxième objet de cette note. Déjà, par la simple composition des forces, on prouve que la première loi de Kepler ou *la proportionnalité des aires aux temps*, est le résultat de ce que la force motrice des planètes est constamment dirigée vers le Soleil. Avec la relation $r = \frac{A}{\cos^3 i}$, nous sommes en état d'établir les conséquences de la deuxième loi, sans calcul et en supposant connus seulement les principes fondamentaux du mouvement curviligne.

En effet, si nous supposons que G soit la valeur de la gravitation lorsque la planète est à la distance ρ du Soleil, i étant l'angle que fait le rayon vecteur ρ avec la normale à la courbe décrite par la planète, cette force de gravitation pourra se décomposer en deux autres; l'une, dirigée suivant la tangente à l'orbite, ayant pour effet d'accélérer ou retarder la vitesse; l'autre dirigée suivant la normale, ayant pour effet d'écarter la planète de la ligne droite pour la soumettre à la courbure de l'orbite. Cette dernière force, comme composante de la gravitation est égale à G $\cos i$. D'ailleurs elle est égale et directement opposée à la force centrifuge dont la valeur est donnée par le théorème d'Huygens; de sorte que si v est la vitesse actuelle de la planète,

$$G\cos i = \frac{v^2}{r}; \qquad (\alpha)$$

ensuite nous observerons que, par la première loi de Kepler, l'aire élémentaire décrite par le rayon vecteur ou $\frac{1}{2}\,\rho\cos i\,ds$ est proportionnelle au temps, c'est-à-dire égale à Cdt, en représentant par C une constante propre à chaque planète; et vu que $\frac{ds}{dt} = v$, nous obtiendrons

$$v = \frac{C}{\rho\cos i}: \qquad (\beta)$$

combinant (α) avec (β), il vient

$$G = \frac{4C^2}{\rho^2 . r . \cos^3 i},$$

expression très générale qui permettra de calculer G en fonction de ρ toutes les fois qu'on aura, d'après la nature de la trajectoire, la valeur du produit $r\cos^3 i$ en fonction de cette même quantité ρ. Comme les orbites planétaires sont elliptiques et que pour toute ellipse, comme pour toute section conique, le produit $r\cos^3 i$ est constant, on voit que la gravitation varie pour une même planète en raison inverse du carré de la distance

Pour ce qui est de la troisième loi de Kepler, on sait qu'il est extrêmement facile d'en tirer cette conséquence que l'attraction solaire serait la même à égalité de masse pour toutes les planètes transportées à une même distance du Soleil. On peut donc considérer la démonstration des lois de la gravitation comme ramenée entièrement à des considérations élémentaires.