JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Sur les surfaces du second degré qui n'ont pas de foyer

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 187-190.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__187_0>

Sur les surfaces du second degré qui n'ont pas de foyers;

PAR M. CHASLES.

Les surfaces du second degré de révolution sont engendrées par la rotation d'une conique autour de l'un de ses deux axes principaux.

L'axe de révolution peut être le grand axe ou le petit axe principal de la conique génératrice; il résulte de là deux classes de surfaces de révolution, qui ont, sous un rapport, des propriétés caractéristiques essentiellement différentes.

Dans le premier cas, la révolution se faisant autour de l'axe qui contient les foyers de la conique génératrice, la surface engendrée a elle-même deux foyers (dont l'un peut être à l'infini, c'est le cas du paraboloïde), et un plan directeur correspondant à chaque foyer. De sorte que ces surfaces sont *le lieu géométrique d'un point dont les distances à un point et à un plan fixes sont entre elles dans un rapport constant.*

Tels sont l'ellipsoïde allongé, l'hyperboloïde à deux nappes, et le paraboloïde.

Ces surfaces participent aux nombreuses propriétés des coniques considérées par rapport à leurs foyers. C'est là leur caractère distinctif.

Les surfaces de révolution de la seconde classe sont engendrées par la rotation d'une conique autour de celui de ses deux axes principaux qui ne contient pas ses foyers. Tels sont l'ellipsoïde aplati, l'hyperboloïde à une nappe, et le cylindre parabolique que nous considérons comme engendré par une parabole tournant autour de son axe principal situé à l'infini.

Ces trois surfaces, qui sont toujours restées en dehors de l'étude que l'on a faite des trois premières, sont douées, comme celles-ci, d'une propriété générale et caractéristique, qui consiste en ce qu'elles sont *le lieu géométrique d'un point tel que le rapport des distances de ce point à un point et à une droite fixes soit constant;* c'est ce que nous exprimerons par le théorème suivant :

L'ellipsoïde de révolution aplati, l'hyperboloïde à une nappe de révolution, et le cylindre parabolique, jouissent de la propriété que les distances de l'un quelconque de leurs points à un foyer de l'une de leurs sections méridiennes, et à la directrice corespondante à ce foyer, sont entre elles dans un rapport constant, quel que soit le point pris sur la surface.

En effet, cette relation aura lieu pour tous les points de la section méridienne, c'est-à-dire que les distances de chacun des points de cette conique, à l'un de ses foyers F et à la directrice correspondante D, seront entre elles dans un rapport constant μ.

Maintenant menons un plan perpendiculaire à la directrice, il coupera la surface suivant un cercle, la conique en deux points m, m', et la directrice en un point d. Si l'on cherche quels sont les points dont les distances au foyer F et au point d sont entre elles dans le rapport μ, ces points seront, comme on sait, sur une sphère; et si l'on demande ceux de ces points qui seront sur le plan coupant, ces points se trouveront sur un cercle; ce cercle passera par les deux points m, m', qui satisfont à la condition commune à tous les points de ce cercle. Ce cercle sera placé symétriquement par rapport au plan de la section méridienne; il aura donc la droite mm' pour diamètre; ainsi ce cercle sera précisément le cercle provenu de la section de la surface de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de révolution.

Or les distances des points de ce cercle au point d de la directrice sont aussi les distances de ces points à la directrice elle-même; donc tous les points de la surface jouissent de la propriété que leurs distances au foyer d'une section méridienne et à la directrice correspondante, sont entre elles dans un rapport constant.

Ainsi le théorème est démontré.

Dans le cas du cylindre parabolique, la section méridienne est la parabole comprise dans un plan perpendiculaire à la direction des arètes du cylindre; le rapport μ est alors égal à l'unité; et le cercle compris dans le plan perpendiculaire à la directrice de la parabole se réduit à une ligne droite qui est une arète du cylindre. La démonstration précédente s'applique parfaitement à ce cas particulier.

Les trois surfaces dont nous venons de démontrer la génération commune jouissent d'une autre propriété commune que nous énoncerons d'abord pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde, et ensuite pour le cylindre parabolique.

Dans l'ellipsoïde de révolution aplati, et dans l'hyperboloïde à une nappe de révolution, si l'on conçoit une section méridienne, le cône qui aura pour sommet un foyer de cette courbe, et pour base une section faite dans la surface par un plan quelconque mené par la directrice correspondante à ce foyer, sera de révolution.

Soit Σ cette section. Cette courbe, d'après le théorème ci-dessus, jouit de cette propriété que le rapport des distances de chacun de ses points au foyer F et à la directrice D de la section méridienne, est constant. Si l'on conçoit un plan fixe mené arbitrairement par cette directrice, les distances des points de la courbe Σ à ce plan seront proportionnelles à leurs distances à la directrice; on peut donc dire que les distances de chaque point de la courbe Σ, au point F et à ce plan fixe, seront entre elles dans un rapport constant, ce qui prouve que cette courbe est une surface du second degré de révolution qui a un foyer au point F, et pour plan directeur le plan fixe; et par conséquent, d'après la propriété connue des surfaces de révolution *à foyers*, cette courbe sera vue du point F suivant un cercle; c'est-à-dire qu'elle sera sur un cône de révolution ayant son sommet au point F.

Ainsi le théorème est démontré.

Dans le cylindre parabolique, si l'on fait une section par un plan perpendiculaire aux arètes, et que par la directrice de cette courbe, on mène un plan coupant quelconque, le cône qui passera par la section que ce plan fera dans le cylindre et qui aura pour sommet le foyer correspondant à la directrice, sera de révolution.

La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème précédent.

Aux nombreuses propriétés des surfaces du second degré de révolution, relatives à leurs foyers et aux plans directeurs, correspondent d'autres propriétés des mêmes surfaces, relatives encore à un *point* et à un *plan*, mais qui ne sont plus le *foyer et le plan directeur;* et ces propriétés s'appliquent à l'ellipsoïde aplati.

Concevons un ellipsoïde de révolution à foyers; et prenons un point quelconque de son axe de révolution pour centre d'une sphère par rapport à laquelle on formera la surface polaire de l'ellipsoïde (c'est-à-dire que chaque point de la surface de l'ellipsoïde étant considéré comme le sommet d'un cône circonscrit à la sphère, le plan de la courbe de contact enveloppera une seconde surface du second degré qui est appelée la surface polaire de l'ellipsoïde). Cette surface sera évidemment de révolution et aura, en direction, même axe de révolution que l'ellipsoïde. Aux foyers et aux plans directeurs de l'ellipsoïde correspondront dans cette surface, deux *plans* et deux *points;* et les propriétés de l'ellipsoïde relatives à ses foyers et à ses plans directeurs, se transformeront en propriétés de la nouvelle surface, relatives à ces deux plans et à ces deux points.

De là dérivent une foule de propriétés nouvelles des surfaces du second degré de révolution.

On reviendra sur cet objet dans un autre moment.