JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GUILLAUME LIBRI

Note sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 10-13.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__10_0>

NOTE

Sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences ;

Par Guillaume **LIBRI**.

Je crois avoir été le premier à appeler l'attention des géomètres sur les rapports qui existent entre les racines des équations algébriques et les intégrales particulières des équations différentielles linéaires. Dans un mémoire qui a paru dans le X^e volume du *Journal de Mathématiques* de M. Crelle, j'ai montré comment on pouvait, à l'aide des intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire, diminuer d'autant d'unités l'ordre de cette équation que l'on connaissait d'intégrales particulières, et j'ai indiqué le moyen de former les coefficiens des équations de cette nature en fonctions symétriques de toutes les intégrales particulières. On a pu remarquer, dans le même mémoire, que ces fonctions symétriques étaient douées de propriétés bien plus étendues et plus générales que celles dont jouissent les fonctions symétriques des équations algébriques. La similitude entre ces deux classes d'équations s'étend très loin, et permet de traiter les équations différentielles linéaires par des méthodes analogues à celles que l'on emploie dans la théorie des équations algébriques.

Lagrange, à l'aide de la variation des constantes arbitraires, est parvenu à démontrer que si dans une équation différentielle linéaire de l'ordre n et de la forme

$$Y_n = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots + a_n y = \varphi(x),$$

on connaît $n-m$ valeurs de y, propres à satisfaire à l'équation $Y_n=0$, on peut toujours réduire l'équation $Y_n=\varphi(x)$ à une autre équation différentielle linéaire de l'ordre $n-(n-m)=m$. Ce théorème célèbre, qui porte le nom de son inventeur, et qui ne forme que la première proposition de la théorie des équations différentielles linéaires, telle que je l'ai présentée, se démontre d'une manière si simple et si générale en considérant les intégrales particulières comme les racines des équations différentielles auxquelles elles satisfont, que j'ai pensé qu'il y aurait quelque avantage à reproduire ici ma démonstration toute seule, en montrant en même temps comment on peut l'appliquer aux équations linéaires aux différences finies, ce que je n'avais pas fait dans le Mémoire déjà cité.

Soit l'équation différentielle linéaire de l'ordre n,

$$(1)\ldots\quad \frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ldots+a_n y=\varphi(x),$$

que nous écrirons pour plus de simplicité,

$$Y_n=\varphi(x),$$

en indiquant par Y_n son premier membre; et soit y_1 une valeur de y qui satisfasse à l'équation $Y_n=0$. Si dans l'équation $Y_n=\varphi(x)$, on fait $y=y_1\int zdx$, z étant une nouvelle variable, on aura (en se rappelant que l'on a en général $d^puv=ud^pv+pdud^{p-1}+\ldots\ldots+pdvd^{p-1}u+vd^pu$) une équation ordonnée par les différentielles descendantes de z, de la forme

$$(2)\ldots\ y_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\left(n\frac{dy_1}{dx}+a_1y_1\right)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\ldots\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{d^ny_1}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\ldots+a_ny_1\right)\int zdx=\varphi(x).$$

Dans cette équation, il est clair que le coefficient de $\int zdx$ est égal à zéro, puisque ce coefficient n'est autre chose que la fonction Y_n dans laquelle on a écrit y_1 au lieu de y; ce qui, par hypothèse, rend identiquement nulle cette fonction. Maintenant y_1 et ses différentielles sont des fonctions connues de x: si l'on divise donc l'équation (2) par

y_1, on aura une nouvelle équation en z, qui sera linéaire et de l'ordre $n-1$, de la forme

$$(3)\ldots\quad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + A_1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + A_2\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}}\ldots + A_{n-1}\,z = \frac{\varphi(x)}{y_1},$$

en appelant A_1, A_2,... A_{n-1}, les coefficiens de l'équation (2) divisée par y. On voit donc comment, sans faire varier les constantes arbitraires, on peut réduire l'équation linéaire (2) du degré n à une autre équation (3) également linéaire de l'ordre $n-1$, lorsqu'on connaît une intégrale particulière de l'équation (1) dans laquelle on a supposé le second membre égal à zéro.

Si l'on connaissait une seconde intégrale particulière y_2 de l'équation $Y_2 = 0$, il faudrait faire encore $y = y_1 \int z dx$, et partant $z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$, et donner à y la valeur y_2; car si l'on prenait une seconde fois la valeur y_1 qui a été déjà employée, on aurait $z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_1}\right) = \frac{d}{dx}.\,1 = 0$. Et cette intégrale particulière, qui réduirait à zéro le premier membre de l'équation (3), ne pourrait nous conduire à aucune nouvelle simplification.

On voit maintenant comment, par des transformations successives, on peut dans tous les cas, diminuer d'autant d'unités l'ordre de l'équation (1) que l'on connaît de valeurs qui, substituées pour y dans le premier membre de cette équation, le rendent identiquement égal à zéro.

On peut appliquer la même démonstration aux équations linéaires aux différences finies. Soit en effet l'équation

$$(4)\ldots\quad \Delta^n y_x + a_1\,\Delta^{n-1}y_x + a_2\,\Delta^{n-2}y_x\ldots + a_n y_x = f(x);$$

et soit y une valeur de y_x telle que l'on ait

$$(5)\ldots\quad \Delta^n y + a_1\,\Delta^{n-1}y + a_2\,\Delta^{n-2}y\ldots + a_n y = 0;$$

si dans l'équation (4) on fait $y_x = y\Sigma z_x$, on la transformera encore en une autre équation aux différences, de la forme

$$(6)\ldots\quad y\Delta^{n-1}z_x + B_1\Delta^{n-2}z_x\ldots + (\Delta^n y + a_1\Delta^{n-1}y\ldots + a_n y)\Sigma z_x = f(x);$$

(dans laquelle les coefficiens sont des fonctions connues de y qu'il est inutile de développer à cause de leur complication, et que nous appellerons B_1, B_2, etc., pour simplifier, en n'écrivant que le coefficient de Σz_x dont la forme est très simple) et comme le coefficient de Σz_x est égal à zéro par l'équation (5), il en résulte que l'on peut encore diminuer d'une unité l'ordre d'une équation linéaire aux différences, lorsqu'on connaît une intégrale particulière du premier membre, égalé à zéro, de la même équation.

On pourrait répéter le même raisonnement, et l'on démontrerait en général le théorème de Lagrange pour les équations aux différences finies de tous les ordres. On pourrait de plus former les coefficiens de ces équations en fonctions symétriques des intégrales particulières, et exprimer l'intégrale générale en fonction du second membre de l'équation proposée, et des intégrales particulières de l'équation que l'on obtient en égalant le premier membre de la première équation à zéro. Mais je reviendrai plus tard sur ce sujet; je n'ai voulu, dans cette note, qu'appeler de nouveau l'attention des géomètres sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et celle des équations linéaires, et je n'ai donné la démonstration du théorème de Lagrange, que comme un exemple de la méthode que j'avais employée.