JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FRÉDÉRIC HÉRAU

Une inégalité de Gårding à bord

Journées Équations aux dérivées partielles (2000), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_2000____A5_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Nantes, 5–9 juin 2000
GDR 1151 (CNRS)

Une inégalité de Gårding à bord

Frédéric HÉRAU

Abstract

The aim of this work is to give a Gårding inequality for pseudodifferential operators acting on functions in $L^2(\mathbb{R}^n)$ supported in a closed regular region $F \subset \mathbb{R}^n$. A natural idea is to suppose that the symbol is non-negative in $F \times \mathbb{R}^n$. Assuming this, we show that this result is true for pseudo-differential operators of order one, when F is the half-space, and under a supplementary weak hypothesis of degeneracy of the symbol on the boundary.

1. Introduction

L'existence d'une borne inférieure a priori pour un opérateur pseudo-différentiel intervient naturellement dans de nombreux problèmes d'existence ou d'unicité de la solution d'une équation aux dérivées partielles. Il s'agit de manière générale de voir dans quelle mesure une propriété de positivité du symbole peut entrainer la positivité de l'opérateur associé. Des résultats célèbres ont été obtenus, parmi lesquels on peut citer l'inégalité de Gårding forte [5, th. 18.1.14], ou celle de Fefferman et Phong [5, th. 18.6.8]

Le but de ce article est de donner une version précisée d'un théorème de X. Saint-Raymond et N. Lerner [9]. Il s'agit de prouver une inégalité de Gårding sur des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont le support est inclus dans un fermé régulier $F \subset \mathbb{R}^n$. On recherche des conditions portant sur le symbole a pour obtenir l'inégalité suivante dans laquelle $\|.\|$ désigne la norme $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\exists C, \quad \Re\mathrm{e}\,(a(x,D)u,u) \geq -C\,\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{supp}(u) \subset F. \tag{1}$$

Compte tenu de l'inégalité de Gårding classique (voir [5, th 18.1.14]), il est naturel de supposer des conditions de positivité microlocale du symbole a sur $F \times \mathbb{R}^n_\xi$. Cependant la condition $a \geq 0$ sur cet ensemble ne suffit a priori pas dans le cadre des preuves connues, en particulier à cause de l'absence de distance de sécurité entre le support de u et le lieu de l'espace des phases où le symbole est susceptible de prendre des valeurs négatives (voir [9]). Dans le cadre des opérateurs différentiels, ce

I would like to thank N. Lerner and A. Parmeggiani for usefull discussions about this subject
MSC 2000 : 35S05
Keywords : Opérateurs pseudo-différentiels, analyse microlocale, principe d'incertitude, calcul de Weyl-Hörmander, inégalité de Gårding, transformation de Wigner, paquets d'ondes.

problème de localisation ne se pose plus, et des réponses positives ont été apportées récement par X. Saint Raymond [10] pour des symboles peu réguliers.

Dans [9], les auteurs montrent en particulier que si $F = \{x \,/\, x_1 \geq 0\}$ est régulier et si $a \in S^1_{1,0}$ satisfait l'hypothèse

$$(H_1) \quad \exists b \in S^1_{1,0}, \quad b \geq 0, \quad \text{t.q.} \quad a = x_1 b, \tag{2}$$

alors on obtient (1). Nous démontrons dans cette partie que le résultat reste vrai sous une hypothèse locale moins restrictive. On considère l'hypothèse de dégénérescence suivante dans laquelle $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}$:

$$(H_2) \quad \frac{\partial a}{\partial x_1}(0, x', \xi) = 0 \implies \frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \partial x'}(0, x', \xi) = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \partial \xi}(0, x', \xi) = 0. \tag{3}$$

On peut remarquer que si $a \in S^1_{1,0}$ satisfait (H_1), et si $a \geq 0$ sur $\{x_1 \geq 0\}$, alors il satisfait aussi (H_2). On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soit $a \in S^1_{1,0}$, tel que $a \geq 0$ sur $\{x_1 \geq 0\}$. Si en plus a satisfait (H_2), alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que d'un nombre fini de semi-normes de a telle que $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $supp(u) \subset \{x_1 \geq 0\}$, on ait*

$$\Re\mathrm{e}\,(a(x, D)u, u) \geq -C \left\|u\right\|^2 .$$

Une partie importante de la preuve de ce théorème consiste à établir un lemme de préparation permettant de se ramener à une hypothèse semblable à (H_1), mais dans laquelle les symboles ont perdu leur caractère $\mathcal{C}^\infty$. Ce lemme utilise des techniques de découpage du type Calderón-Zygmund pour des métriques lentes (voir [5, sec. 1.4], et peut être considéré comme une seconde microlocalisation du problème (des techniques similaires sont utilisées par exemple dans [3] pour décomposer une fonction positive $W^{4,\infty}$). La preuve — que l'on ne donne pas ici et que l'on peut trouver dans [4, sec. 5.3] — se fait par récurrence, et un phénomène "d'ombre" déja remarqué dans [2] permet de conserver la régularité à chaque cran malgré l'utilisation répétée du théorème des fonctions implicites.

Lemme 1.2 (de préparation) *Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $f \geq 0$ sur $\{y_1 \geq 0\}$, où $y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^d$, ainsi que*

$$\partial f / \partial y_1 (0, y') = 0 \implies \partial^2 f / \partial y_1 \partial y' (0, y') = 0 \tag{4}$$

lorsque $d \geq 2$. Alors il existe $p \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $q \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $p, q \geq 0$, telles que $\forall y \in \mathbb{R}^d$, on ait $f(y) = y_1 p(y) + q(y)$.

La preuve du théorème 1.1 doit alors pallier cette perte de régularité. On utilise pour cela la quantification de Wick, dont on rappelle les définitions et propriétés dans la section suivante. Cette quantification consiste à prendre le quantifié en Weyl du symbole convolué avec une Gaussienne. Cette quantification est certes positive, mais dans notre cas, elle permet surtout, grâce à la convolution, de regagner de la régularité sur le symbole.

Des éléments de la preuve donnée dans [9] sont par ailleurs repris. En particulier on fait de nouveau appel à un lemme de commutation dû à Nirenberg et Treves ([5, lem. 28.6.2]), ainsi qu'un lemme de resommation après un découpage de Littlewood-Paley.

On peut enfin remarquer qu'une restriction majeure au théorème principal de cet article est que l'hypothèse (H_2) n'est pas invariante géométriquement. Cependant la preuve du théorème n'est pas changée si l'hypothèse (4) du lemme de préparation, et par suite (H_2), sont relaxées, et il semble raisonnable de penser que la forme normale $f = y_1 g + h$ donnée par ce lemme est valide même sans (4).

Le plan de l'article est le suivant : dans la prochaine section on effectue les premières réductions du problème, et on se ramène à l'étude de deux termes, dont l'étude fait l'objet des deux dernières sections. Pour la preuve du lemme de préparation 1.2, on renvoit à [4, sec. 5.3].

2. Préliminaires

Rappelons d'abord quelques définitions sur le calcul pseudodifférentiel. On dira qu'un symbole a est dans l'espace S^m si il appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et satisfait les estimations suivantes pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|^2)^{(m-|\beta|)/2}$$

où $C_{\alpha,\beta}$ ne dépend pas de $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. La quantification de Weyl est alors donnée pour $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ par la formule

$$(a^w u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y,\xi)} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{5}$$

et s'étend naturellement à $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$.

On va utiliser dans la suite une décomposition de Littlewood-Paley dont on rappelle une construction : il existe une fonction φ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans une couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^n; 1/4 \leq |\xi| \leq 4\}$ et une fonction φ_0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $\sum_{\nu \geq 0} \varphi_\nu^2(\xi) = 1$, où pour tout $\nu \geq 1$, on a posé $\varphi_\nu(\cdot) = \varphi(2^{-\nu}\cdot)$. Pour $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans $\{\xi \in \mathbb{R}^n; 1/8 \leq |\xi| \leq 8\}$ et valant 1 sur le support de φ, on posera également $\tilde{\psi}_\nu(\cdot) = \tilde{\psi}(2^{-\nu}\cdot)$ pour $\nu \geq 1$. On choisit de même $\tilde{\psi}_0 \in C_0^\infty$ valant 1 sur le support de φ_0. Enfin on construit $(\psi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de la même manière à partir d'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans $\{\xi \in \mathbb{R}^n; 1/16 \leq |\xi| \leq 16\}$ et valant 1 sur le support de $\tilde{\psi}$ et d'une fonction $\psi_0 \in C_0^\infty$ valant 1 sur le support de $\tilde{\psi}_0$. On a immédiatement $\|u\|^2 = \sum_\nu \|\varphi_\nu^w u\|^2 \leq \sum_\nu \|\tilde{\psi}_\nu^w u\|^2 \leq \sum_\nu \|\psi_\nu^w u\|^2 \leq C\|u\|^2$.

Considérons maintenant a satisfaisant les hypothèses du théorème 1.1. On a alors l'estimation

$$a^w = \sum_\nu \left(\varphi_\nu^2 \tilde{\psi}_\nu a\right)^w = \sum_\nu \varphi_\nu^w (\tilde{\psi}_\nu a)^w \varphi_\nu^w + R,$$

avec $R \in \mathcal{L}(L^2)$. Pour tout ce qui suivra, on désignera de manière générique par R les opérateurs bornés sur L^2. Définissons ensuite pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ une nouvelle quantification, notée Wick_ν, dans laquelle on utilise la métrique symplectique $\Gamma_\nu = 2^\nu |dx|^2 + 2^{-\nu}|d\xi|^2$, définie pour tout symbole a par

$$(a)^{\mathrm{Wick}_\nu} = \int a(Y) \left((2\pi)^{-n} e^{-\Gamma_\nu(.-Y)/2}\right)^w dY.$$

Remarque 2.1 Cette quantification est en fait une quantification de Wick pour la métrique rééchelonnée Γ_ν au lieu de la métrique $\Gamma = |dx|^2 + |d\xi|^2$. Elle est formellement autoadjointe et hérite des propriétés de la quantification de Wick classique, en particulier des propriétés de positivité et de continuité :

Lemme 2.2 *Soit $\gamma \in L^\infty$, alors pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $\gamma^{\mathrm{Wick}_\nu} \in \mathcal{L}(L^2)$ et $\left\|\gamma^{\mathrm{Wick}_\nu}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \|\gamma\|_\infty$. Par ailleurs, $\gamma \geq 0 \Longrightarrow \gamma^{\mathrm{Wick}_\nu} \geq 0$.*

(On pourra consulter [8]). On obtient également le lemme suivant :

Lemme 2.3 *Pour tout ν, on a $(\tilde{\psi}_\nu a)^{\mathrm{Wick}_\nu} - (\tilde{\psi}_\nu a)^w \in \mathcal{L}(L^2)$ uniformément en ν.*

L'utilisation de ce lemme nous permet d'écrire dans un premier temps

$$a^w = \sum_\nu \varphi_\nu^w (\tilde{\psi}_\nu a)^{\mathrm{Wick}_\nu} \varphi_\nu^w + R. \tag{6}$$

On peut maintenant utiliser les propriétés de positivité de a. On commence par remarquer que la fonction f définie par $f : (x,\xi) \longmapsto 2^{-\nu}\tilde{\psi}_\nu(2^\nu\xi)a(x, 2^\nu\xi)$, satisfait l'hypothèse (4) et est positive sur le demi-espace $\{x_1 \geq 0\}$. Par ailleurs, le fait que $a \in S^1$ implique que $f \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, de norme indépendante de ν. On peut donc appliquer à f le lemme de préparation 1.2. On obtient ainsi, après rescaling, l'existence de fonctions $b_\nu \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ et $c_\nu \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ positives, telles que pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$a_\nu(x,\xi) = x_1 b_\nu(x,\xi) + c_\nu(x,\xi), \tag{7}$$

et satisfaisant les estimations suivantes pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| \leq 2 &\Longrightarrow \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_\nu\right| \leq C_{\alpha\beta} 2^{\nu(1-|\beta|)}, \\ |\alpha| + |\beta| \leq 3 &\Longrightarrow \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c_\nu\right| \leq C_{\alpha\beta} 2^{\nu(1-|\beta|)}. \end{aligned}$$

De plus, en multipliant les deux membres de (7) par ψ_ν, on obtient que l'on peut supposer les fonctions b_ν et c_ν supportées dans $\mathrm{supp}(\psi_\nu)$ en ξ. On peut alors écrire d'après (6),

$$a^w = \sum_\nu \varphi_\nu^w (x_1 b_\nu + c_\nu)^{\mathrm{Wick}_\nu} \varphi_\nu^w + R. \tag{8}$$

Le lemme 2.2 permet de traiter immédiatement le cas du second terme puisque c_ν est positif. On obtient ainsi

$$\sum_\nu \varphi_\nu^w (c_\nu)^{\mathrm{Wick}_\nu} \varphi_\nu^w \geq 0. \tag{9}$$

Pour l'autre terme, on va d'abord utiliser un lemme inspiré de [8, prop 2.3].

Lemme 2.4 *Pour tout ν on peut écrire $(x_1 b_\nu)^{\mathrm{Wick}_\nu} = \Re\mathrm{e}\left(x_1\, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right) + R_\nu$, avec $R_\nu \in \mathcal{L}(L^2)$ uniformément en ν.*

Preuve . On commence par se ramener à la quantification de Wick classique, en posant $\Lambda = 2^\nu$ et en faisant le changement de variables symplectique $(x,\xi) \to (\Lambda^{-1/2}x, \Lambda^{1/2}\xi)$. On se ramène ainsi à l'étude de $(\Lambda^{1/2}x_1\tilde{b}_\nu)^{\text{Wick}}$, où $\tilde{b}_\nu$ satisfait les estimations suivantes : pour tout $k \le 2$, il existe $\gamma_k \ge 0$ tel que $|\partial^k \tilde{b}_\nu| \le \gamma_k \Lambda^{-k/2}$. On utilise ensuite le fait que $x_1^{\text{Wick}} = x_1$ et on obtient

$$\Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}x_1(\tilde{b}_\nu)^{\text{Wick}}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}\iint y_1\tilde{b}_\nu(Z)\Sigma_Y\Sigma_Z dY dZ\right),$$

où pour tout $Y \in \mathbb{R}^{2n}$, $\Sigma_Y = \left((2\pi)^{-n}e^{-\Gamma_0(\cdot - Y)/2}\right)^w$. Σ_Y est un opérateur de projection, formellement autoadjoint, et de symbole réel, ce qui implique $\Re\mathrm{e}\,(\Sigma_Y\Sigma_Z) = \Re\mathrm{e}\,(\Sigma_Z\Sigma_Y)$. Les fonctions y_1 et $\tilde{b}_\nu$ étant réelles, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}x_1(\tilde{b}_\nu)^{\text{Wick}}\right)\\
&= \Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}\iint y_1\tilde{b}_\nu(Z)\Sigma_Y\Sigma_Z dY dZ\right)\\
&= \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}\iint \left(y_1\tilde{b}_\nu(Z) + z_1\tilde{b}_\nu(Y)\right)\Sigma_Y\Sigma_Z dY dZ\right)\\
&= \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}\iint \left(y_1\tilde{b}_\nu(Y) + z_1\tilde{b}_\nu(Z)\right)\Sigma_Y\Sigma_Z dY dZ\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}\iint (y_1 - z_1)\left(\tilde{b}_\nu(Y) - \tilde{b}_\nu(Z)\right)\Sigma_Y\Sigma_Z dY dZ\right)\\
&= \Re\mathrm{e}\left(\Lambda^{1/2}(x_1\tilde{b}_\nu)^{\text{Wick}}\right) - \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(\iint \alpha(Y,Z)(Y-Z)(y_1 - z_1)\Sigma_Y\Sigma_Z dY dZ\right),
\end{aligned}$$

où $\alpha(Y,Z) = \Lambda^{1/2}\int_0^1 \tilde{b}'_\nu(Z + \theta(Y-Z))d\theta$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ de norme indépendante de ν. Le terme $\iint \alpha(Y,Z)(Y-Z)(y_1 - z_1)\Sigma_Y\Sigma_Z dY dZ$ se traite alors en utilisant le lemme de Cotlar (voir la version continue dans [1, lem. 4.2.3]) et en remarquant que le fait que Σ_Y soit un projecteur implique

$$\Sigma_Y\Sigma_Z\Sigma_{Y'}\Sigma_{Z'} = (\Sigma_Y\Sigma_Z)(\Sigma_Z\Sigma_{Y'})(\Sigma_{Y'}\Sigma_{Z'}).$$

En revenant dans les variables de départ, on obtient le lemme. On peut remarquer que l'on n'a pas utilisé la norme γ_2. □

Les estimations (8), (9) ainsi que le lemme 2.4 impliquent alors

$$a^w \ge \sum_\nu \varphi_\nu^w \left(\Re\mathrm{e}(x_1 b_\nu^{\text{Wick}_\nu})\right)\varphi_\nu^w + R. \tag{10}$$

Il suffit donc d'étudier la positivité du terme $\Re\mathrm{e}\left(x_1 b_\nu^{\text{Wick}_\nu}\right)$. On va séparer l'étude en deux parties en écrivant que $x_1 b_\nu^{\text{Wick}_\nu} = x_1^+ b_\nu^{\text{Wick}_\nu} + x_1^- b_\nu^{\text{Wick}_\nu}$, où x_1^+ désigne l'opérateur de multiplication par la fonction valant x_1 pour $x_1 \ge 0$ et 0 sinon, et où $x_1^- = x_1 - x_1^+$. On peut alors écrire

$$a^w \ge \sum_\nu \varphi_\nu^w \left(\Re\mathrm{e}(x_1^+ b_\nu^{\text{Wick}_\nu})\right)\varphi_\nu^w + \sum_\nu \varphi_\nu^w \left(\Re\mathrm{e}(x_1^- b_\nu^{\text{Wick}_\nu})\right)\varphi_\nu^w + R. \tag{11}$$

3. Etude du premier terme

On reprend ici des éléments de la preuve de [9] dans le cadre de notre calcul. On a le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Il existe une constante C telle que $\sum_\nu \varphi_\nu^w \Re\mathrm{e}(x_1^+ b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu})\varphi_\nu^w \geq C$.*

Preuve . On commence par écrire pour $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_1^+ b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} &= \left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} \\ &= \left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}}, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right] + \left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} \left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La quantification de Wick est positive d'après le lemme 2.2 et on peut écrire pour tout ν

$$\left(\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} \left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_\nu^w u, \varphi_\nu^w u\right) \geq 0.$$

De plus le fait que x_1^+ et $b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}$ soient autoadjoints implique

$$\Re\mathrm{e}\left(\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}}, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}}, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right].$$

On utilise alors un lemme de Nirenberg et Treves ([5, lem. 28.6.2]) et on obtient

$$\begin{aligned} &\left\|\left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}}, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \\ &\leq 4 \left\|b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{\frac{1}{4}} \left\|\left[x_1, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{\frac{1}{2}} \left\|\left[x_1 \left[x_1, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

D'après les estimations jusqu'à l'ordre 2 de b_ν, il existe une constante C_0 telle que

$$\left\|b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_0 2^\nu, \qquad \left\|\left[x_1, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_0,$$
$$\left\|\left[x_1 \left[x_1, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_0 2^{-\nu}.$$

Cela implique que $\left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}}, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right]$ appartient à $\mathcal{L}(L^2)$ uniformément en ν. On obtient ainsi

$$\sum_\nu \left(\left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(x_1^+\right)^{\frac{1}{2}}, b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}\right]\right] \varphi_\nu^w u, \varphi_\nu^w u\right) \leq \sum_\nu 4C_0 \left\|\varphi_\nu u\right\|^2 = 4C_0 \left\|u\right\|^2,$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

En utilisant ce dernier résultat, on voit que pour estimer la borne inférieure de a^w d'après (11), il suffit de traiter le terme $\sum_\nu \varphi_\nu^w \Re\mathrm{e}(x_1^- b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu})\varphi_\nu^w$, agissant sur les fonctions supportées dans $\{x \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0\}$.

4. Etude du second terme et fin de la preuve

Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ supportée dans $\{x \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0\}$, on peut écrire pour tout ν

$$\left(\varphi_\nu^w x_1^- b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} \varphi_\nu^w u, u\right) = \left(H(x_1)\varphi_\nu^w x_1^- b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} \varphi_\nu^w H(x_1) u, u\right),$$

où $H(x_1)$ désigne l'opérateur de multiplication par la fonction de Heaviside $x_1 \mapsto H(x_1)$. Nous allons montrer la continuité L^2 de $\sum_\nu A_\nu$ où

$$A_\nu = H(x_1)\varphi_\nu^w x_1^- b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} \varphi_\nu^w H(x_1).$$

Pour cela, on va utiliser le lemme de Cotlar : on va montrer que $\sup_\mu \sum_\nu A_\nu^* A_\mu$ et $\sup_\mu \sum_\nu A_\nu A_\mu^*$ sont dans $\mathcal{L}(L^2)$. Il y a deux types de termes et une somme à étudier. Précisément on a

$$A_\nu A_\mu^* = \underbrace{H(x_1)\varphi_\nu^w x_1^- b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu}}_{(*)} \underbrace{\varphi_\nu^w H(x_1)\varphi_\mu^w}_{(***)} b_\mu^{\mathrm{Wick}_\mu} x_1^- \varphi_\mu^w H(x_1),$$

$$A_\nu^* A_\mu = \underbrace{H(x_1)\varphi_\nu^w b_\nu^{\mathrm{Wick}_\nu} x_1^-}_{(**)} \varphi_\nu^w H(x_1)\varphi_\mu^w x_1^- b_\mu^{\mathrm{Wick}_\mu} \varphi_\mu^w H(x_1).$$

Il suffit de montrer que $(*)$ et $(**)$ sont bornés sur L^2 indépendamment de ν, et que $\sup_\mu \sum_\nu (***)$ est borné sur L^2.

4.1. Etude du terme $(*)$

On se ramène de nouveau à la quantification de Wick classique, en introduisant le grand paramètre $\Lambda = 2^\nu$, et en faisant le changement de variable symplectique $(x,\xi) \to (\Lambda^{-1/2}x, \Lambda^{1/2}\xi)$. On note aussi pour plus de commodité $\varphi_\Lambda(\cdot) = \varphi_\nu(\Lambda^{-1/2}\cdot)$. On se ramène ainsi à l'étude de

$$H(x_1)\varphi_\Lambda \Lambda^{1/2} x_1^- \tilde{b}_\nu^{\mathrm{Wick}} = H(x_1)\left[\varphi_\Lambda, \Lambda^{1/2}x_1^-\right] \tilde{b}_\nu^{\mathrm{Wick}}, \tag{12}$$

où $\tilde{b}_\nu$ a déjà été définie précédemment (elle satisfait les estimations suivantes : pour tout $k \leq 2$, il existe $\gamma_k \geq 0$ tel que $|\partial^k \tilde{b}_\nu| \leq \gamma_k \Lambda^{-k/2}$). En particulier $\tilde{b}_\nu \in L^\infty$ et le lemme 2.2 implique que $\tilde{b}_\nu^{\mathrm{Wick}}$ est borné sur L^2 uniformément en ν. Pour conclure l'étude de (12) et donc de $(*)$, il suffit d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.1 ([9, lem 2.2]) *On a* $\left[\varphi_\Lambda^w, \Lambda^{1/2}x_1^-\right] \in \mathcal{L}(L^2)$ *uniformément en* Λ.

Preuve . Pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\left[\varphi_\Lambda^w, \Lambda^{1/2}x_1^-\right] u(x) &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y,\xi)} \Lambda^{1/2}\varphi_\Lambda(\xi)(y_1^- - x_1^-)u(y)dyd\xi \\ &= \int \mathcal{F}_1(\varphi_\Lambda)(x-y)\Lambda^{1/2}(y_1^- - x_1^-)u(y)dy.\end{aligned}$$

Le noyau k_Λ de l'opérateur est donc défini pour x, $y \in \mathbb{R}^n$ par

$$k_\Lambda(x,y) = \mathcal{F}_1(\varphi_\Lambda)(x-y)\Lambda^{1/2}(y_1^- - x_1^-).$$

On obtient par ailleurs que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante C_N telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$|\mathcal{F}_1(\varphi_\Lambda)(t)| \leq \frac{C_N \Lambda^{n/2}}{(1 + |\Lambda^{1/2}t|)^N}.$$

On en déduit que $k_\Lambda \in L^1_{dx}$ et L^1_{dy}, et qu'il existe $C_0 \geq 0$ uniforme en $\Lambda \geq 1$ tel que $\sup_x \int |k_\Lambda(x,y)|dy = \sup_y \int |k_\Lambda(x,y)|dx \leq C_0$. D'après le lemme de Schur, cela implique le lemme 4.1 et termine l'étude du terme $(*)$. □

4.2. Etude du terme (**)

On continue l'étude dans le cadre semi-classique, i.e. avec le grand paramètre Λ. On peut alors écrire le terme (**) sous la forme

$$H(x_1)\varphi_\Lambda^w \tilde{b}_\nu^{\mathrm{Wick}} \Lambda^{1/2} x_1^- =$$
$$H(x_1)\varphi_\Lambda^w \Lambda^{1/2} x_1^- \tilde{b}_\nu^{\mathrm{Wick}} + H(x_1)\varphi_\Lambda^w \left[\tilde{b}_\nu^{\mathrm{Wick}}, \Lambda^{1/2} x_1^-\right].$$

Le premier terme de la somme est (12), c'est à dire le terme (*) après rescaling. Il est donc dans $\mathcal{L}(L^2)$ uniformément en Λ. Il reste donc à prouver un nouveau lemme de commutation, dont l'étude est plus fine.

Lemme 4.2 (de commutation) *Le terme* $\left[\tilde{b}_\nu^{\mathrm{Wick}}, \Lambda^{1/2} x_1^-\right]$ *est dans* $\mathcal{L}(L^2)$ *uniformément en* Λ.

Preuve. La preuve va se faire en plusieurs étapes. On va commencer par montrer que pour tout $\Omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, on a l'estimation de commutation suivante :

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left[(\tilde{b}_\nu * \Omega)(x, D_x), \Lambda^{1/2} x_1^-\right] \in \mathcal{L}(L^2), \tag{13}$$

où $*$ désigne la convolution pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{2n}$. On va s'inspirer de la preuve de la continuité L^2 des opérateurs de symbole dans la classe $S^0_{0,0}$ donnée par Hwang dans [6]. On rappelle que $S^0_{0,0}$ est la classe des symboles bornés uniformément ainsi que toutes leurs dérivées. Pour u et $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(Au, v) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y,\xi)} \Lambda^{1/2} \tilde{b}_\nu * \Omega(X)(y_1^- - x_1^-) u(y) \bar{v}(x) dy dX. \tag{14}$$

En utilisant l'opérateur $D_{\xi_1} = -i\partial_{\xi_1}$, on peut écrire

$$-\Lambda^{1/2} D_{\xi_1} e^{i(x-y,\xi)} = \Lambda^{1/2}(y_1 - x_1) e^{i(x-y,\xi)},$$

ce qui implique l'inégalité suivante :

$$\left(i + \Lambda^{1/2} D_{\xi_1}\right)\left(-\Lambda^{1/2} D_{\xi_1}\right) e^{i(x-y,\xi)} = \left(i + \Lambda^{1/2}(x_1 - y_1)\right)\left(\Lambda^{1/2}(y_1 - x_1)\right) e^{i(x-y,\xi)}.$$

On obtient ainsi en faisant porter les *deux* dérivées sur $\tilde{b}_\nu$,

$$(Au, v) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y,\xi)} b_{0\nu} * \Omega(X) \frac{f(x_1, y_1)}{i + \Lambda^{1/2}(x_1 - y_1)} u(y) \bar{v}(x) dy dX, \tag{15}$$

où on a posé $f(x_1, y_1) = \frac{y_1^- - x_1^-}{y_1 - x_1}$, et $b_{0\nu} = \left(i + \Lambda^{1/2} D_{\xi_1}\right)\left(-\Lambda^{1/2} D_{\xi_1}\right) \tilde{b}_\nu$. On a $f \in L^\infty$ et $b_{0\nu} \in L^\infty$, de norme indépendante de ν (donc de $\Lambda = 2^\nu$) et supporté en ξ dans la boule de rayon $16\Lambda^{1/2}$. On aura besoin dans la suite de l'estimation de confinement suivante :

Lemme 4.3 *Notons* B_Λ *la boule de rayon* $16\Lambda^{1/2}$ *pour la métrique* $|d\xi|^2$. *Alors pour tout* $k \in \mathbb{N}^{2n}$, $N \in \mathbb{N}$, *il existe une constante* $C_{k,N}$ *telle que pour tout* X, Λ,

$$\left|\partial^{(k)} \left(b_{0\nu} * \Omega\right)(X)\right| \leq C_{k,N} \left(1 + |\xi - B_\Lambda|\right)^{-N},$$

où pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, *on a posé* $|\xi - B_\Lambda| = \inf_{\eta \in B_\Lambda} |\xi - \eta|$.

Preuve du lemme 4.3. Pour $k \in \mathbb{N}^{2n}$ et $N \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$\partial^{(k)}\left(b_{0\nu} * \Omega\right)(X) = \left(b_{0\nu} * \partial^{(k)}\Omega\right)(X) = \int b_{0\nu}(Y) \frac{(1+|\xi-\eta|)^N}{(1+|\xi-\eta|)^N} \partial^{(k)}\Omega(X-Y)dY.$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in B_\Lambda$, on a par ailleurs $(1+|\xi-\eta|) \geq (1+|\xi - B_\Lambda|)$. Or le support de $b_{0\nu}$ en la seconde variable est inclus dans B_Λ. On peut donc écrire que pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n}$, on a

$$\left|\partial^{(k)}\left(b_{0\nu} * \Omega\right)(X)\right| \leq (1+|\xi - B_\Lambda|)^{-N} \int b_{0\nu}(Y)\,(1+|\xi-\eta|)^N \,\partial^{(k)}\Omega(X-Y)dY.$$

Par ailleurs $\Omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ donc $(1+|\xi|)^N \partial^{(k)}\Omega(X) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. En utilisant enfin que $b_{0\nu} \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on peut conclure la preuve du lemme. □

Preuve du lemme de commutation 4.2 (suite). On note pour la suite $\check{v}$ la transformée de Fourier partielle en x' de v, où $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n$,

$$v(x) = (2\pi)^{1-n} \int e^{ix'\eta'} \check{v}(x_1, \eta')\, d\eta'.$$

En utilisant cette formule dans l'expression (15) de (Au, v), on obtient

$$(Au, v) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i(x-y,\xi)} e^{-ix'\eta'} b_{0\nu} * \Omega(X) \frac{f(x_1, y_1)}{i + \Lambda^{1/2}(x_1 - y_1)} u(y) \bar{\check{v}}(x_1, \eta')\, dy_1 dY' dX'.$$

On va alors effectuer un certain nombre d'intégrations par parties en x' et ξ'. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&(Au, v) = \\
&\frac{1}{2\pi} \iiint \prod_{q=2}^{n} (i+(\xi_q-\eta_q))^{-1}(i+D_{x_q}) \prod_{p=2}^{n} (i+(x_p-y_p))^{-1}(i+D_{\xi_p}) e^{ix\xi - iy\xi - ix'\eta'} \\
&\qquad \left(i + \Lambda^{1/2}(x_1 - y_1)\right)^{-1} b_{0\nu} * \Omega(X) f(x_1, y_1) u(y) \bar{\check{v}}(x_1, \eta')\, dy_1 dY' dX.
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une suite finie de fonctions ψ_d et φ_d uniformément en Λ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, ainsi qu'une suite finie de fonctions $b_{d,\nu}$ uniformément en Λ dans la classe $S^0_{0,0}$ et satisfaisant les mêmes estimations de confinement dans B_Λ que $b_{0,\nu} * \Omega$ (voir le lemme 4.3), telles que

$$\begin{aligned}
\langle Au, v\rangle = \sum_d \iint & e^{ix\xi} b_{d\nu}(X) \\
& (2\pi)^{1-n} \int e^{-iy\xi} \varphi_d(x'-y') \left(i + \Lambda^{1/2}(x_1 - y_1)\right)^{-1} f(x_1, y_1) u(y) dy \\
& (2\pi)^{1-n} \int e^{-ix'\eta'} \psi_d(\xi' - \eta') \bar{\check{v}}(x_1, \eta') d\eta' \quad dX.
\end{aligned}$$

Considérons alors les deux fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^{2n} \ni X = (x_1, \xi_1, X')$ (resp. $\mathbb{R}^{2n-1} \ni X = (x_1, X')$) par

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1d}(X) &= (2\pi)^{1-n} \int e^{-iy\xi} \varphi_d(x'-y') \left(i + \Lambda^{1/2}(x_1-y_1)\right)^{-1} f(x_1, y_1) u(y) dy, \\
\mathcal{H}_{2d}(x_1, X') &= (2\pi)^{1-n} \int e^{-ix'\eta'} \psi_d(\xi'-\eta') \bar{\bar{v}}(x_1, \eta') d\eta'.
\end{aligned} \tag{16}$$

La première est une fonction de Wigner modifiée, précisément la transformée de Fourier partielle en y de

$$\varphi_d(x'-y') \left(i + \Lambda^{1/2}(x_1-y_1)\right)^{-1} f(x_1, y_1) u(y)$$

qui appartient à $L^2(dxdy)$. Comme la norme $L^2(dy_1)$ de $(i + \Lambda^{1/2}(x_1 - y_1))^{-1}$ est bornée par $\Lambda^{-1/4}$, on obtient qu'il existe C_d tel que

$$\|\mathcal{H}_{1d}\|_{L^2(dxd\xi)} \le \Lambda^{-1/4} C_d \|u\|_{L^2}. \tag{17}$$

La seconde fonction de (16) est du même type. C'est une transformée de Wigner partielle de φ_d et $\bar{\bar{v}}(x_1, \cdot)$. On obtient donc qu'il existe C'_d tel que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on ait $\left\|\mathcal{H}_{2d(x_1,\cdot)}\right\|_{L^2(dx'd\xi')} \le C'_d \left\|\bar{\bar{v}}(x_1, \cdot)\right\|_{L^2(dx')}$. On en déduit en utilisant les estimations du lemme 4.3 également satisfaites par $b_{d,\nu}$ qu'il existe une nouvelle constante $C''_d \ge 0$ telle que

$$\int b_{d\nu}^2(X) \left|\mathcal{H}_{2d}(x_1, X')\right|^2 dX \le \int (1 + |\xi - B_\Lambda|)^{-2} \left|\mathcal{H}_{2d}(x_1, X')\right|^2 dX$$

Si on note Π_Λ l'intervalle $[-16\Lambda^{1/2}, 16\Lambda^{1/2}]$ sur l'axe réel, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int b_{d\nu}^2(X) \left|\mathcal{H}_{2d}(x_1, X')\right|^2 dX &\le \int (1 + |\xi_1 - \Pi_\Lambda|)^{-2} \left|\mathcal{H}_{2d}(x_1, X')\right|^2 dx_1 d\xi_1 dX' \\
&\le \int (1 + |\xi_1 - \Pi_\Lambda|)^{-2} \left\|\mathcal{H}_{2d}(x_1, \cdot)\right\|^2_{L^2(dx'd\xi')} dx_1 d\xi_1 \\
&\le C'^2_d \int (1 + |\xi_1 - \Pi_\Lambda|)^{-2} \left\|\bar{\bar{v}}(x_1, \cdot)\right\|^2_{L^2(dx')} dx_1 d\xi_1 \\
&\le C''^2_d \Lambda^{1/2} \|v\|^2_{L^2}.
\end{aligned} \tag{18}$$

On obtient ainsi que $b_{d\nu}\mathcal{H}_{2d}$ appartient à $L^2(dxd\xi)$ de norme

$$\|b_{d\nu}\mathcal{H}_{2d}\|_{L^2(dX)} \le \Lambda^{1/4} C''_d \|v\|_{L^2(dx)}. \tag{19}$$

En appliquant Cauchy-Schwartz à chaque terme de la somme finie

$$(Au, v) = \sum_d \int e^{ix_1\xi} \mathcal{H}_{1d}(X) b_{d\nu}(X) \mathcal{H}_{2d}(X) dX, \tag{20}$$

et en utilisant les estimations (17-19), on obtient qu'il existe C tel que

$$|(Au, v)| \le C\Lambda^{1/4}\Lambda^{-1/4} \|u\| \|v\| \le C \|u\| \|v\|. \tag{21}$$

On en déduit que A défini en (13) est bien dans $\mathcal{L}(L^2)$ uniformément en Λ.

Fin de la preuve du lemme de commutation 4.2. Pour avoir le résultat sur $[\tilde{b}_\nu^{\text{Wick}}, \Lambda^{1/2}x_1^-] = [(\tilde{b}_\nu * (2\pi)^{-n} e^{-\Gamma/2})^w, \Lambda^{1/2}x_1^-]$, on utilise que si $(x,\xi) \longmapsto c(x,\xi)$ est le symbole tel que $c(x,D_x) = (\tilde{b}_\nu * (2\pi)^{-n} e^{-\Gamma/2})^w$, alors on peut écrire, en utilisant les formules de passage entre quantification de Weyl et quantification usuelle (voir [5, theo. 18.5.10]),

$$c(X) = (2\pi)^{-n} \int e^{-2iy\eta} (\tilde{b}_\nu * (2\pi)^{-n} e^{-\Gamma/2})(X-Y)dY = \tilde{b}_\nu * \Omega(X) \tag{22}$$

où on a posé

$$\Omega(X) = \left((2\pi)^{-n} \int e^{-2iy\eta} e^{-\Gamma(X-Y)/2} dY \right). \tag{23}$$

En remarquant alors que $\Omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et en utilisant le résultat (13), on obtient le lemme. $\square$

4.3. Etude du terme $(***)$ et fin de la preuve du théorème

On doit maintenant étudier $\sup_\mu \sum_\nu \varphi_\nu^w H(x_1) \varphi_\mu^w$. Cette étude est déjà faite dans [9], où les auteurs montrent qu'il appartient bien à $\mathcal{L}(L^2)$. Cela termine la preuve du théorème. $\square$

Références

[1] Bony, J.-M. et Lerner, N., *Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur. I,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **22**, (1989), pp. 377–433.

[2] Bony, J.-M. , *Sur l'inégalité de Fefferman-Phong* , Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1998–1999, Exp. No. III, , École Polytech., Palaiseau, 1998.

[3] Guan, P., *C^2 a priori estimates for degenerate Monge-Ampère equations,* Duke Math. J. (2), **86**, (1997), pp 323–346.

[4] Hérau F., *Opérateurs pseudo-différentiels semi-bornés,* Thèse de Doctorat, Rennes, (1999).

[5] Hörmander, L., *The analysis of linear partial differential operators I,III,* Springer-Verlag, Berlin, (1985).

[6] Hwang, I. L., *The L^2-boundedness of pseudodifferential operators,* Trans. Amer. Math. Soc. (1), **302**, (1987), pp 55–76.

[7] Lerner, N., *Coherent states and evolution equations,* General theory of partial differential equations and microlocal analysis (Trieste, 1995), (Longman), (1996), pp 123–154.

[8] Lerner, N., *The Wick calculus of pseudo-differential operators and energy estimates,* New trends in microlocal analysis, (Tokyo, 1995), Springer, (1997), pp. 23–37.

[9] Lerner, N. et Saint Raymond, X., *Une inégalité de Gårding sur une variété à bord,* J. Math. Pures Appl. (9), **77**, no. 9, (1998), pp. 949–963.

[10] Saint Raymond, X., *Remarks on Gårding inequalities for differential operators,* prépublication Université de nantes, (2000).

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES,
2, RUE DE LA HOUSSINIÈRE,
BP 92208 F-44322 NANTES CEDEX 3, FRANCE
fherau@math.univ-nantes.fr
www.math.sciences.univ-nantes.fr/~fherau/