Journées Équations aux dérivées partielles

Dragoş Iftimie

Évolution de tourbillon à support compact

Journées Équations aux dérivées partielles (1999), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1999____A4_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Saint-Jean-de-Monts, 31 mai–4 juin 1999
GDR 1151 (CNRS)

Évolution de tourbillon à support compact

Dragoş Iftimie

Résumé

On considère l'équation d'Euler incompressible dans le plan. Dans le cas où le tourbillon est positif et à support compact on montre que le support du tourbillon croît au plus comme $O[(t\log t)]^{1/4}$, améliorant la borne $O(t^{1/3})$ obtenue par C. Marchioro. Dans le cas où le tourbillon change de signe, on donne un exemple de tourbillon initial tel que la croissance du diamètre du support du tourbillon est exactement $O(t)$. Enfin, dans le cas du demi-plan et du tourbillon initial positif et à support compact, on montre que le centre de masse se déplace parallèlement à l'axe avec une vitesse minoré par une constante positive; de plus, la distance d'un point du support du tourbillon à l'axe est au plus en $O[(t\log t)^{1/3}]$.

Tous les résultats qui suivent ont été obtenus en collaboration avec Thomas C. Sideris. Le théorème 3 est aussi le résultat d'une collaboration avec Nicolas Depauw.

Un fluide parfait incompressible évoluant dans $\mathbb{R}^2$ obéit aux équations d'Euler suivantes:

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla P, \\ \operatorname{div} v(t,\cdot) = 0, \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$

Ici $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est le champ de vitesse du fluide et $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la pression. Une quantité importante pour l'étude de ces équations est le tourbillon

$$\omega = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1.$$

En prenant le rotationnel de l'équation de v on trouve

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla\omega = 0, \quad \omega(0,x) = \omega_0(x) \tag{1}$$

ce qui signifie que le tourbillon est transporté par le flot

$$\partial_t \Psi = v(t,\Psi), \quad \Psi(0,x) = x.$$

La condition d'incompressibilité permet de retrouver v à partir de ω par l'intermédiaire de la loi de Biot-Savart

$$v(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\,\omega(t,y)\,dy$$

où $x^\perp = (-x_2, x_1)$.

L'existence et l'unicité globale des solutions classiques a été montré pour la première fois par Wolibner [12]. Le cadre des solutions faibles a été abordé par Yudovich [13] ($\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty$), DiPerna et Majda [4] ($\omega_0 \in L^1 \cap L^p$), Delort [3] (nappes de tourbillon) et d'autres auteurs.

Malgré cette théorie d'existence et d'unicité globale assez complète, peu de choses sont connues sur le comportement à l'infini des solutions. Plusieurs lois de conservation sont à notre disposition pour étudier ce comportement: conservation des normes L^p de ω, de la masse $\int \omega(t,x)\,dx$, du centre de masse $\int x\,\omega(t,x)\,dx$ et du moment d'inertie $\int |x|^2\omega(t,x)\,dx$.

Comme le tourbillon est transporté par le flot de v, on voit tout de suite que si le tourbillon est à support compact au moment initial il reste à support compact pour tout temps. De plus, le fait que v soit borné en espace et temps montre que la taille du support du tourbillon est au plus en $O(t)$. Dans la suite, on se propose de voir comment et dans quelles conditions cette borne triviale peut être améliorée.

Il y a très peu de solutions explicites des équations d'Euler. Les solution stationnaires sont les premiers exemples. Ensuite, on peut aisément vérifier que si le tourbillon initial est la fonction caractéristique de l'intérieur d'une ellipse, son évolution est donné par une rotation. Enfin, le couple de Batchelor est un tourbillon antisymétrique par rapport à un axe qui se déplace parallèlement à cette axe à vitesse constante (voir [2], page 534). Ainsi, aucun exemple explicite ne montre une croissance du diamètre du support du tourbillon et le seul exemple qui montre une croissance de la distance à l'origine fait intervenir un tourbillon qui change de signe.

À défaut de solutions explicites, on peut se rabattre sur des solutions approchées qui consistent à prendre le tourbillon comme une somme de masses de Dirac avec certains poids. Il n'y a pas assez de régularité pour définir une solution du système d'Euler, l'équation est obtenue dans ce cas en ignorant les termes qui ne sont pas définis. Marchioro et Pulvirenti [10] montrent néanmoins que si le tourbillon initial est approché au sens des distributions d'une manière particulière mais pas trop restrictive, alors ceci reste vrai pour tout temps. Malheureusement, cette convergence n'est pas uniforme en temps, donc rien ne peut être déduit sur le comportement à l'infini des vraies solutions. Cependant, on peut voir que pour ce système approché le support du tourbillon reste borné si le tourbillon est positif. De plus et toujours pour ce système approché, il existe des tourbillons changeant de signe avec une croissance du diamètre du support qui est exactement en $O(t)$.

Venons-en aux résultats disponibles dans la littérature. Marchioro [8] montre que dans le cas d'un tourbillon positif appartenant à $L^1 \cap L^\infty$, la distance à l'origine du support du tourbillon est au plus en $O(t^{1/3})$. Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [7] étendent ce résultat au cas des tourbillons $L^1 \cap L^p$ et Hounie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [5] obtiennent des résultats partiels dans le cas des nappes de tourbillon. Enfin, dans le cas d'un domaine extérieur à un compact et du tourbillon positif, Marchioro [9] montre que la croissance du support du tourbillon est au plus en $O(t^\alpha)$ pour tout $\alpha > 1/2$.

Les trois théorèmes qui suivent sont les résultats nouveaux présentés dans ce travail.

Théorème 1 *Soit $\omega(t,x)$ la solution des équations d'Euler avec un tourbillon initial positif et à support compact $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Il existe une constante C_0 telle que, pour tout temps $t \geq 0$, le support de $\omega(t,\cdot)$ est contenu dans la boule $|x| < C_0[(1+t)\log(2+t)]^{1/4}$.*

Théorème 2 *On considère un tourbillon initial qui est obtenu en prenant une fonction positive appartenant à $L^1 \cap L^\infty$ à support dans le premier quadrant et en la prolongeant par antisymétrie par rapport aux axes de coordonnées. Il existe une constante C_0 telle que le diamètre du support du tourbillon à l'instant t soit minoré par $C_0 t$.*

Théorème 3 *Considérons les équations d'Euler dans le demi-plan $x_2 > 0$ avec des conditions au bord de glissement. Supposons que le tourbillon initial est positif et à support compact, $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Alors le centre de masse $P(t) = \int x\omega(t,x)\,dx$ se déplace parallèlement à l'axe avec une vitesse minorée par une constante positive. De plus, la distance d'un point du support du tourbillon à l'axe est au plus en $O\big[(t\log t)^{1/3}\big]$. En d'autres termes, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $P_2 = cst.$, $P_1(t) \geq C_0^{-1}t$ pour t suffisamment grand et $x_2 \leq C_0\big[(1+t)\log(2+t)\big]^{1/3}$ pour tout $x \in \operatorname{supp}\omega(t,\cdot)$.*

Remarque 1. L'exemple donnée dans le théorème 2 est inspiré d'une part par l'analogue discret qui montre une croissance en Ct et d'autre part par un exemple similaire de Bahouri et Chemin [1] qui est utilisé pour des problèmes de régularité minimale du flot.
Remarque 2. Dans le cadre du théorème 1, Serfati [11] montre indépendamment et simultanément la borne $[t\log\circ\cdots\circ\log(t)]^{1/4}$. Gamblin [6] donne une autre preuve du théorème 1 en utilisant des estimations sur les moments d'ordre supérieur.
Remarque 3. Les théorèmes 1 et 3 restent vrais pour des solutions faibles $\omega \in L^1 \cap L^p$, $p > 2$ car les constantes dans les preuves ne dépendent que des normes L^1 et L^p. Remarquons aussi que les bornes obtenues sont valables en fait pour toute ligne de flot.

Les preuves détaillées des théorèmes 1 et 2 se trouvent dans [6]. D'autre part, la preuve du théorème 3 reprend, dans un cas plus simple, les idées principales des preuves des théorèmes 1 et 2. Il n'y a donc pas lieu de répeter ces preuves ici. On va se contenter de montrer le théorème 3 dans la section suivante.

1. Preuve du théorème 3.

Dans la suite, $C, C_1, \ldots$ désignent des constantes qui dépendent de ω_0 et qui peuvent changer d'une inégalité à l'autre. L'ensemble D désigne le demi-plan $x_2 > 0$.

Remarquons d'emblée que les conservations du centre de masse et du moment d'inertie du tourbillon ne sont plus valables dans D. On ne pourra utiliser que la conservation des normes L^p.

Le lemme suivant nous sera fort utile dans la suite.

Lemme 1 *Soit $a \in (0,2)$, $S \subset \mathbb{R}^2$ et $h : S \to \mathbb{R}_+$ une fonction appartenant à $L^1(S) \cap L^p(S)$, $p > \frac{2}{2-a}$. Alors*

$$\int_S \frac{h(y)}{|x-y|^a}\,dy \leq C\|h\|_{L^1(S)}^{\frac{2-a-2/p}{2-2/p}} \|h\|_{L^p(S)}^{\frac{a}{2-2/p}}.$$

Preuve du lemme. Soit k un nombre positif quelconque. On peut estimer par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{h(y)}{|x-y|^a}\,dy &= 1 \int_{S\cap\{|x-y|>k\}} \frac{h(y)}{|x-y|^a}\,dy + \int_{S\cap\{|x-y|<k\}} \frac{h(y)}{|x-y|^a}\,dy \\
&\leq \frac{\|h\|_{L^1(S)}}{k^a} + \|h\|_{L^p(S)} \left\| \frac{1}{|x|^a} \right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(|x|\leq k)} \\
&= \frac{\|h\|_{L^1(S)}}{k^a} + C\|h\|_{L^p(S)} k^{2-a-2/p}.
\end{aligned}$$

Le choix $k = \left(\|h\|_{L^1(S)}\|h\|^{-1}_{L^p(S)}\right)^{\frac{1}{2-2/p}}$ termine la démonstration.

Revenons à la preuve du théorème 3. On suppose, pour simplifier, que $\int_D \omega(x)\,dx = 1$. On commence par montrer l'affirmation sur le centre de masse.

Il n'est pas difficile de vérifier que si l'on prolonge ω par antisymétrie par rapport à l'axe $x_2 = 0$, le tourbillon résultant obéit aux équations d'Euler posées dans $\mathbb{R}^2$. La loi de Biot-Savart dans $\mathbb{R}^2$ donne ainsi la loi de Biot-Savart dans $x_2 > 0$:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_D \left(\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} - \frac{(x-\overline{y})^\perp}{|x-\overline{y}|^2} \right) \omega(y)\,dy,$$

où $\overline{y} = (y_1, -y_2)$ désigne le complexe conjugué de y. Un calcul très simple montre alors que

$$v_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_D \left(-\frac{x_2-y_2}{|x-y|^2} + \frac{x_2+y_2}{|x-\overline{y}|^2} \right) \omega(y)\,dy \tag{1}$$

$$v_2(x) = \frac{2}{\pi}\int_D \frac{(x_1-y_1)x_2y_2}{|x-y|^2|x-\overline{y}|^2}\omega(y)\,dy. \tag{2}$$

Soit

$$P(t) = \int_D x\omega(t,x)\,dx,$$

le centre de masse du tourbillon. On a par (1) et après une integration par parties

$$P'(t) = \int_D x\partial_t\omega(t,x)\,dx = -\int_D xv(x)\cdot\nabla\omega(x)\,dx = \int_D v(x)\omega(x)\,dx. \tag{3}$$

La loi de Biot-Savart (1)–(2) implique maintenant

$$\begin{aligned}
P_1'(t) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{D^2} \frac{x_2+y_2}{|x-\overline{y}|^2}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy, \\
P_2'(t) &= 0,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'antisymétrie des expressions $\frac{x_2-y_2}{|x-y|^2}\omega(x)\omega(y)$ et $\frac{(x_1-y_1)x_2y_2}{|x-y|^2|x-\overline{y}|^2}\omega(x)\omega(y)$ par rapport au changement de variables $(x,y) \longleftrightarrow (y,x)$. On obtient tout de suite une nouvelle loi de conservation

$$\int_D x_2\omega(x)\,dx = cst.$$

Montrons maintenant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $P_1' \geq C$. Par abus de notation, on désigne par ω la prolongée du tourbillon par antisymétrie par rapport à l'axe $x_2 = 0$. On a déjà remarqué que le nouveau tourbillon vérifie les équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2$. Il est facile de voir que l'énergie de la vitesse dans tout l'espace est conservée et que cette quantité est égale à

$$\begin{aligned}
E_0 &= -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \log|x-y|\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{D^2} \log\frac{|x-\overline{y}|^2}{|x-y|^2}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{D^2} \log\left(1+\frac{4x_2y_2}{|x-y|^2}\right)\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Remarquons que le noyau obtenu ci-dessus est positif, contrairement au noyau qui correspond à un tourbillon positif dans $\mathbb{R}^2$. Une application de l'inégalité de Hölder donne

$$E_0 \leq C(P_1')^{1-1/q}\left[\iint_{D^2}\left(\frac{|x-\overline{y}|^2}{x_2+y_2}\right)^{q-1}\left[\log\left(1+\frac{4x_2y_2}{|x-y|^2}\right)\right]^q\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy\right]^{1/q},$$

avec $q > 1$ à choisir convenablement. On utilise maintenant l'inégalité $\log(1+t) \leq C\frac{t}{(1+t)^\alpha}$, $1-1/q \leq \alpha < 1$, avec $t = \frac{4x_2y_2}{|x-y|^2}$ ce qui implique $1+t = \frac{|x-\overline{y}|^2}{|x-y|^2}$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\iint_{D^2}\left(\frac{|x-\overline{y}|^2}{x_2+y_2}\right)^{q-1}\left[\log\left(1+\frac{4x_2y_2}{|x-y|^2}\right)\right]^q\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy \\
&\qquad\leq C\iint_{D^2}\frac{|x-\overline{y}|^{2q-2}x_2^qy_2^q}{(x_2+y_2)^{q-1}|x-y|^{2q-2\alpha q}|x-\overline{y}|^{2\alpha q}}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy \\
&\qquad\leq C\iint_{D^2}\frac{(x_2+y_2)^{3q-2\alpha q-1}}{|x-y|^{2q-2\alpha q}}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy \\
&\qquad= C\iint_{D^2}\frac{x_2+y_2}{|x-y|^{2-q}}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy \\
&\qquad= 2C\int_D x_2\omega(x)\Big(\int_D\frac{1}{|x-y|^{2-q}}\omega(y)\,dy\Big)\,dx
\end{aligned}$$

où on a choisi $\alpha = 3/2 - 1/q$ ce qui est loisible si $q < 2$. Le lemme permet donc de dire que

$$E_0 \leq C(P_1')^{1-1/q}P_2^{1/q} = CP_2(0)^{1/q}(P_1')^{1-1/q},$$

ce qui implique bien que P_1' est minoré par une constante. Remarquons par ailleurs que le fait que v soit borné en espace et temps et la relation (3) implique que P_1' est majoré par une autre constante.

On passe maintenant à la deuxième partie. On va montrer qu'il existe $C_1 > \sqrt{3}$ telle que $|v_2(x)| \leq C_1x_2^{-2}$ pour tout x tel que $x_2 \geq C_1(t\log t)^{1/3}$ et t assez grand.

Ceci impliquera qu'une particule fluide ne peut pas s'échapper de la zone $x_2 \leq C_1(t\log t)^{1/3}$.

Comme $|x-\overline{y}|^2 \geq \max(x_2^2, x_2y_2)$ on peut estimer à l'aide de (2) et du lemme

$$\begin{aligned}
|v_2(x)| &\leq \frac{2}{\pi}\left|\int_{y_2<x_2/2}\frac{(x_1-y_1)x_2y_2}{|x-y|^2|x-\overline{y}|^2}\omega(y)\,dy\right|+\frac{2}{\pi}\left|\int_{y_2>x_2/2}\frac{(x_1-y_1)x_2y_2}{|x-y|^2|x-\overline{y}|^2}\omega(y)\,dy\right| \\
&\leq \frac{C}{x_2}\int_{y_2<x_2/2}\frac{y_2}{|x-y|}\omega(y)\,dy + C\int_{y_2>x_2/2}\frac{1}{|x-y|}\omega(y)\,dy \\
&\leq \frac{C}{x_2}\int_{y_2<x_2/2}\frac{y_2}{|x_2-y_2|}\omega(y)\,dy + C\Big(\|\omega\|_{L^\infty}\int_{y_2>x_2/2}\omega(y)\,dy\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{x_2^2}\int_D y_2\omega(y)\,dy + C\Big(\|\omega\|_{L^\infty}\int_{y_2>x_2/2}\omega(y)\,dy\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

La preuve du théorème sera terminée une fois la proposition suivante démontré:

Proposition 1 *Pour tout $k>0$ il existe une constante C_0 telle que*

$$\int_{y_2>x_2/2}\omega(t,y)\,dy \leq \frac{C_0}{x_2^k},$$

pour tout $x_2 > C_0\big[(1+t)\log(2+t)\big]^{1/3}$.

Preuve de la proposition. Soit

$$f_r(t) = \int_D \eta\left(\frac{x_2-r}{\lambda r}\right)\omega(t,x)\,dx,$$

où $\lambda=\lambda(r)\in(0,1)$ est à choisir convenablement et

$$\eta(s) = \frac{e^s}{1+e^s}.$$

On voit facilement que

$$f_r(t) \geq \eta(0)\int_{x_2>r}\omega(t,x)\,dx.$$

Donc, pour montrer la proposition il suffit d'estimer

$$f_r(t) \leq \frac{C_0}{r^k},$$

pour tout $r > C_0[(1+t)\log(2+t)]^{1/3}$. Pour cela, on va déduire une inégalité différentielle vérifiée par f_r.

L'équation de ω ainsi que la loi de Biot-Savart (2) impliquent

$$\begin{aligned}
f_r'(t) &= \int_D \eta\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)\partial_t\omega(t,x)\,dx \\
&= -\int_D \eta\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)v(x)\cdot\nabla\omega(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda r}\int_D \eta'\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)v_2(x)\omega(x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi\lambda r}\iint_{D^2}\eta'\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)\frac{(x_1-y_1)x_2y_2}{|x-y|^2|x-\overline{y}|^2}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $(x,y) \longleftrightarrow (y,x)$ on obtient finalement

$$f_r'(t) = \frac{1}{\pi\lambda r}\iint_{D^2}\Big[\eta'\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)-\eta'\Big(\frac{y_2-r}{\lambda r}\Big)\Big]\,\frac{(x_1-y_1)x_2y_2}{|x-y|^2|x-\overline{y}|^2}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy. \quad (4)$$

Le théorème des accroissements finis implique

$$\eta'\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)-\eta'\Big(\frac{y_2-r}{\lambda r}\Big)= \frac{x_2-y_2}{\lambda r}\eta''(\xi),$$

où ξ est situé entre $\frac{x_2-r}{\lambda r}$ et $\frac{y_2-r}{\lambda r}$. Il est très facile de vérifier que $|\eta''(s)| \leq \eta(s)$ pour tout s et que la fonction η est positive croissante. On peut donc conclure que

$$\Big|\eta'\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)-\eta'\Big(\frac{y_2-r}{\lambda r}\Big)\Big|\leq \frac{|x_2-y_2|}{\lambda r}\Big(\eta\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)+\eta\Big(\frac{y_2-r}{\lambda r}\Big)\Big).$$

En insérant cette relation dans (4) on obtient

$$\begin{aligned} f_r'(t) &\leq \frac{1}{\pi\lambda^2r^2}\iint_{D^2}\Big[\eta\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)+\eta\Big(\frac{y_2-r}{\lambda r}\Big)\Big]\,\frac{x_2y_2}{(x_2+y_2)^2}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy \\ &= \frac{2}{\pi\lambda^2r^2}\iint_{D^2}\underbrace{\eta\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)\frac{x_2y_2}{(x_2+y_2)^2}}_{L(x,y)}\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Pour $x_2 < r/2$ on majore $L(x,y) \leq e^{-\frac{1}{2\lambda}}$ et pour $x_2 > r/2$ on majore

$$L(x,y) \leq \eta\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)\frac{y_2}{x_2} \leq \frac{2}{r}\eta\Big(\frac{x_2-r}{\lambda r}\Big)y_2.$$

En utilisant aussi la conservation de la masse et de $\int_D x_2\omega(x)\,dx$ on trouve la majoration suivante:

$$f_r'(t) \leq \frac{C}{\lambda^2r^2}e^{-\frac{1}{2\lambda}} + \frac{C}{\lambda^2r^3}f_r(t).$$

Le lemme de Gronwall donne maintenant

$$f_r(t) \leq f_r(0)e^{\frac{Ct}{\lambda^2r^3}} + re^{\frac{Ct}{\lambda^2r^3}-\frac{1}{2\lambda}}.$$

On a bien évidemment que $f_r(0) \leq Ce^{-\frac{1}{2\lambda}}$ pour r assez grand. On obtient donc

$$f_r(t) \leq Ce^{\frac{Ct}{\lambda^2r^3}-\frac{1}{2\lambda}}(1+r).$$

Si l'on suppose que $t < \frac{\lambda r^3}{4C}$ on trouve

$$f_r(t) \leq Ce^{-\frac{1}{4\lambda}}(1+r).$$

Le choix $\lambda = \big[4(k+1)\log r\big]^{-1}$, qui conduit à $r \geq C_3(t\log t)^{1/3}$, conclut la preuve de la proposition.

Références

[1] H. Bahouri et J.-Y. Chemin. *Équations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides.* Arch. Rational Mech. Anal., **127**, n° 2, 1994, pp. 159–181.

[2] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge University Press, 1967.

[3] J.-M. Delort. *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux.* J. Amer. Math. Soc., **4**, n° 3, 1991, pp. 553–586.

[4] R. J. DiPerna et A. J. Majda. *Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow.* Comm. Pure Appl. Math., **40**, n° 3, 1987, pp. 301–345.

[5] J. Hounie, M. C. Lopes Filho, et H. J. Nussenzveig Lopes. Bounds on the dispersion of vorticity in 2D incompressible, inviscid flows with a priori unbounded velocity. To appear in SIAM J. Math. Anal.

[6] D. Iftimie, T.C. Sideris et P. Gamblin. On the evolution of compactly supported planar vorticity. To appear in Comm. Part. Diff. Eqns.

[7] M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes. *An extension of Marchioro's bound on the growth of a vortex patch to flows with L^p vorticity.* SIAM J. Math. Anal., **29**, n° 3, 1998, pp. 596–599.

[8] C. Marchioro. *Bounds on the growth of the support of a vortex patch.* Comm. Math. Phys., **164**, n° 3, 1994, pp. 507–524.

[9] C. Marchioro. *On the growth of the vorticity support for an incompressible non-viscous fluid in a two-dimensional exterior domain.* Math. Methods Appl. Sci., **19**, n° 1, 1996, pp. 53–62.

[10] C. Marchioro et M. Pulvirenti. *Vortices and localization in Euler flows.* Comm. Math. Phys., **154**, n° 1, 1993, pp. 49–61.

[11] P. Serfati. Borne en temps des caractéristiques de l'équation d'Euler 2D à tourbillon positif et localisation pour le modèle point-vortex. Manuscrit.

[12] W. Wolibner. *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long.* Math. Z., **37**, 1933, pp. 698–726.

[13] V. I. Yudovich. *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid.* Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz., **3**, 1963, pp. 1032–1066.

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France)
`iftimie@maths.univ-rennes1.fr`