JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RICHARD BEALS

# Solutions fondamentales exactes

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1998), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1998____A1_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Saint-Jean-de-Monts, 2-5 juin 1998
GDR 1151 (CNRS)

# Solutions fondamentales exactes

Richard Beals

**Résumé**

Exact fundamental solutions are known for operators of various types. We indicate a general approach that gives various old and new fundamental solutions for operators with double characteristics. The solutions allow one to read off detailed behavior, such as the presence or absence of analytic hypoellipticity. Recent results for operators with multiple characteristics are also described.

## 1. Introduction.

L'inverse à gauche ou à droite $L^{-1}$ d'un opérateur linéaire aux dérivées partielles $L = P(x, D)$, si celui-là existe, prend la forme d'intégration contre un noyau de Schwartz (dit ici *noyau de Green*) $K$:

$$L^{-1}u(x) = \int K(x,y)\,u(y)\,dy.$$

Des noyaux de Green pour les opérateurs classiques

$$\Delta, \qquad \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^2 - \Delta,$$

et pour des problèmes aux limites standards associés à ces opérateurs, sont connus depuis les temps féodaux. Pendant notre siècle on a étudié plutôt l'extension des résultats aux opérateurs aux coefficients variables et aux équations non linéaires. On développe des techniques de l'analyse fonctionnelle, des estimations *a priori*, transformée de Fourier, transformée FBI, intégrales oscillantes, opérateurs pseudo-différentiels, opérateurs Fourier-intégraux, .... Typiquement on cherche des *parametrices* au lieu des solutions exactes.

Néanmoins on trouve des exceptions même dans notre siècle. Solutions fondamentales exactes pour les opérateurs modèles kinétiques

$$(1)\qquad \begin{gathered} x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2, \qquad x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\Big) \\ x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\Big). \end{gathered}$$

ont été déterminées par Kolmogorov [16], Chandrasekhar [7], Aarão [1]. Folland [8] a déterminé la solution fondamentale homogène du sous-laplacien de Kohn-Rossi sur le groupe de Heisenberg

$$\Delta_H = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \Big( \frac{\partial}{\partial x_j} - x_{n+j} \frac{\partial}{\partial x_0} \Big)^2 + \Big( \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} + x_j \frac{\partial}{\partial x_0} \Big)^2 \Big\}; \tag{2}$$

puis Folland et Stein [9] ont trouvé la solution fondamentale de l'opérateur associé

$$\Delta_H + \alpha \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Cet opérateur-çi, qui fournit le premier exemple du phénomène d'hypoellipticité sauf pour des valeurs discrètes, est devenu la base d'une industrie: étude des opérateurs hypoelliptiques aux caractéristiques doubles, transversalement elliptiques. Le *noyau de chaleur* associé, c'est-à-dire le noyau de la solution fondamentale de l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_H \tag{4}$$

a été déterminé par Gaveau [11], Hulanicki [14]; des dérivations de cette formule ne cessent pas d'être publiées [5].

Les opérateurs (2), (3) sont associés aux problèmes au domaine strictement pseudo-convexe

$$\Omega_{n,1} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > |z|^2\}.$$

Des solutions fondamentales des opérateurs associés aux domaines

$$\Omega_{n,k} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > |z|^{2k}\}. \tag{5}$$

ont étés trouvées par Greiner [12] au cas $n = 1$, $k = 2$, puis, récemment, au cas $n = 1$, $k$ quelconque [4] et au cas $n$, $k$ quelconques [5]. (On peut mentionner aussi des formules exacts pour les projecteurs Cauchy-Szegö associés à tels domaines [13], [17], [10].)

On esquisse dans §2 une méthode simple et directe pour trouver des solutions fondamentales exactes d'une classe d'opérateurs qui contient (1)-(4) ci-dessus et aussi des opérateurs elliptiques dégénérés comme

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2 + x_1^2 \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2, \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 + x_1^2 \Big(\frac{\partial}{\partial x_3}\Big)^2. \tag{6}$$

Ce dernier est l'exemple de Baouendi-Goulaouic, qui est hypoelliptique mais pas analytique-hypoelliptique. En effet, cet aspect peut être déchiffré directement de la solution fondamentale exacte.

À ce moment on ne dispose pas d'une méthode aussi générale pour des opérateurs qui ne sont pas transversalement elliptiques, comme ceux associés aux domaines (5), ou comme les opérateurs elliptiques dégénérés

$$\Delta_x + |x|^{2k-2} \Delta_y = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2 + |x|^{2k-2} \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^2, \quad k = 1,2,3,\ldots. \tag{7}$$

On esquisse dans §3 des travaux faits avec Gaveau et Greiner sur des opérateurs (7); voir aussi [4], [5]. On note en passant que, si la dimension $m$ est pair, le noyau de Green homogène pour (7) est une fonction algébrique explicite.

## 2. Généralités: dégénération d'ordre deux.

Comme exemple, on commence avec l'oscillateur harmonique dans $\mathbb{R}^n$

$$L_1 = \Delta - \lambda^2 |x|^2. \tag{8}$$

On cherche le noyau de chaleur associé; intégration par rapport au variable de temps donne le noyau de Green. L'opérateur $L_1$ est la somme de deux opérateurs négatifs, et on cherche le semigroupe associé. Des calculs basés sur la formule de produit Trotter

$$\exp\left[t(A+B)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\exp\left(\tfrac{t}{n}A\right)\exp\left(\tfrac{t}{n}B\right)\right]^n$$

suggèrent comme *Ansatz* pour la forme du noyau de chaleur

$$P(x,y,t) = \varphi(t)\exp(-Q_t(x,y)), \quad t > 0, \tag{9}$$

où $Q_t$ est une forme quadratique aux variables $(x,y)$. Tenant compte de symétrie, on attend que

$$Q_t(x,y) = \tfrac{1}{2}\alpha(t)\,|x|^2 + \beta(t)\,x\cdot y + \tfrac{1}{2}\alpha(t)\,|y|^2. \tag{10}$$

La condition $-Q_t + L_1 Q = 0$ hors de la diagonale est équivalente aux conditions

$$-\tfrac{1}{2}\,\dot\alpha = \alpha^2 - \lambda^2 = \beta^2\,; \qquad -\dot\beta = 2\alpha\beta\,; \qquad \varphi^{-1}\dot\varphi = -\alpha\,. \tag{11}$$

Le noyau $P$ doit être une identité approximative, $t \to 0$, donc il faut que la coefficient $\alpha$ explose et que $\beta \sim -\alpha$, $t \to 0$. La solution désirée est alors

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{\lambda\,\cosh(2\lambda t)}{\sinh(2\lambda t)}\,; \\ \beta(t) &= -\frac{\lambda}{\sinh(2\lambda t)}\,; \\ \varphi(t) &= \frac{\lambda^{n/2}}{[2\pi\sinh(2\lambda t)]^{n/2}}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Intégration par rapport à $t$ sur $\mathbb{R}_+$ donne le noyau de Green pour $L_1$.

Considérons maintenant le premier des deux opérateurs elliptiques dégénérés (6):

$$L_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + x_1^2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2. \tag{13}$$

Pour calculer le noyau de Green on commence encore avec le noyau de chaleur $P(x,y,t)$ associé. On peut utiliser la transformé de Fourier par rapport à $x_2$. Alors l'opérateur transformé a la forme (8) où $\lambda$ est la variable duale à $x_2$. La transformée de Fourier inverse de la solution donnée par (9), (12) devient, après un changement d'échelle dans l'intégration,

$$P(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}}\int_{\mathbf{R}} e^{-f(x,y,\tau)/t}\,\frac{\tau^{1/2}}{(\sinh 2\tau)^{1/2}}\,d\tau, \tag{14}$$

$$f(x,y,\tau) = -i(x_2 - y_2)\tau + \tfrac{1}{2}\tau\coth 2\tau(x_1^2 + y_1^2) - \tau(\sinh 2\tau)^{-1}x_1y_1.$$

Intégration par rapport à $t$ donne le noyau de Green pour $L_2$ avec pôle à $y$:

$$K_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{f(x,y,\tau)^{1/2}} \frac{(2\tau)^{1/2}}{(\sinh 2\tau)^{1/2}}\, d\tau. \tag{15}$$

Remarquons que, malgré l'utilisation de la transformée de Fourier pour obtenir (15), cette intégrale converge absolument si $x_1 \neq y_1$, et un changement de chemin d'intégration la rend convergente aussi si $x_1 = y_1$, $x_2 \neq y_2$.

On peut jouer le même jeu avec l'opérateur de Baouendi-Goulaouic

$$L_3 = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 + x_1^2\Big(\frac{\partial}{\partial x_3}\Big)^2. \tag{16}$$

Ce qui en résulte est le noyau de Green

$$K_3(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{f(x,y,\tau)} \frac{(2\tau)^{1/2}}{(\sinh 2\tau)^{1/2}}\, d\tau, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} f(x,y,\tau) \; &= -i(x_3 - y_3)\tau + \tfrac{1}{2}\tau\coth 2\tau(x_1^2 + y_1^2) \\ &\qquad -\tau(\sinh 2\tau)^{-1}x_1y_1 + \tfrac{1}{4}(x_2 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile d'établir avec l'aide de cette formule que $K_3$ appartient à la classe Gevrey 2 où $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, et $K_3$ est analytique si $x_1 \neq y_1$. Un changement de chemin d'intégration permet de démontrer que $K_3$ est analytique aussi où $x_3 \neq y_3$. De l'autre côté, on peut estimer de dessous les dérivées de

$$g(s^2) = K_3((s, x_2, 0), (0,0,0)), \qquad x_2 \neq 0$$

et démontrer que $K_3$ n'est pas plus lisse que Gevrey 2 à $(0, x_2, 0), (0,0,0)$. Pour les détails, voir [6].

Les opérateurs kinétiques (1) peuvent être traités de la même façon comme $L_1$ ci-dessus: on calcule le noyau de chaleur associé en utilisant l'*Ansatz* (9), ... . En effet, Chandrasekhar [7] note en passant que le noyau de chaleur d'un opérateur comme (1) doit avoir la forme (9), mais il se sert des calculs stochastiques afin de l'obtenir.

Les noyaux de Green des opérateurs du type Heisenberg (2), (3) peuvent être obtenus de la même façon que $L_2$ ci-dessus [3]: on prend la transformée de Fourier par rapport aux directions invariantes, on calcule le noyau de chaleur en se servant de l'*Ansatz* (9), et enfin on calcule la transformée de Fourier inverse. Grace à l'invariance par rapport aux translations dans le groupe, il suffit de fixer le pôle à l'origine. Comme résultat on obtient la formule de Gaveau-Hulanicki

$$\begin{aligned} P(x_0, x; 0, 0; t) &= \frac{1}{(2\pi t)^{n+1}}\int_{\mathbf{R}} e^{-f(x,\tau)/t} \frac{(2\tau)^n}{(\sinh 2\tau)^n}\, d\tau\,, \\ f(x,\tau) &= -ix_0\tau + \tfrac{1}{2}\tau\coth 2\tau \sum_{j=1}^{2n} x_j^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Encore, une intégration par rapport à $t$ donne le noyau de Green pour $\Delta_H$.

## 3. Des spécificités: dégénération d'ordre quelconque.

Avec quelques manipulations (laissées comme exercice), on peut déduire de la formule (15) une autre forme pour le noyau de Green de l'opérateur elliptique dégénéré $L_2$:

$$K_2(x,y) = \frac{F(p)}{2R^{1/4}}; \tag{19}$$

ici

$$R = \tfrac{1}{4}\left[(x_1^2+y_1^2)^2 + (x_2-y_2)^2\right], \qquad p = \frac{xy}{R^{1/2}}, \tag{20}$$

et

$$F(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{ds}{s^{1/2}(1-s)^{1/2}(1-sp)^{1/2}} = F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;2p-1). \tag{21}$$

Cette dernière est la fonction hypergéométrique de Gauss.

La formule (19) évoque quelques commentaires. D'abord, elle exhibite l'homogénéité de degré $-1$ qu'on attend par rapport aux dilatations

$$(x,y) \;\to\; (\lambda x_1, \lambda^2 x_2, \lambda y_1, \lambda^2 y_2). \tag{22}$$

En effet, le dénominateur porte cette homogénéité; la fonction $p$ qui apparaît au numérateur est homogène de degré 0. Deuxièmement, la singularité la plus grande de l'opérateur $L_2$ se trouve à $x_1 = 0$, où le numérateur est $\equiv 1$ et le dénominateur porte toute l'information. En dehors de $x_1 = 0$, l'opérateur est elliptique, la dénominateur est positif, et

$$-1 \le p \le 1; \qquad p = 1 \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

La fonction hypergéométrique (21) possède une singularité logarithmique à $p = 1$, ce qui donne précisément la singularité requise du noyau $K_2$.

Ces remarques, et des formules analogues dans [4], [5], donnent l'espoir de trouver des formules de ce type pour des opérateurs plus dégénérés, comme (7). Cet espoir peut être réalisé. On esquisse ici une méthode pour déterminer de telles formules, dans le cas le plus simple $n = 2$, $m = 2$. Le noyau de Green dans ce cas-ci est une fonction algébrique pour $k$ quelconque: on peut s'amuser par des conjectures *a priori* sur la forme précise de cette fonction.

Ici la notation $(x,y)$ indique un point de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, est $(x^{(0)}, y^{(0)})$ indique la position du pôle pour le noyau de Green

$$K(x,y;x^{(0)},y^{(0)}).$$

On cherche d'abord une fonction qui porte l'homogénéité par rapport aux dilatations analogues à (22). Une choix convenable est

$$R(x,y;x^{(0)},y^{(0)}) = \tfrac{1}{2}\left(|x|^{2k} + |x^{(0)}|^{2k} + k^2|y-y^{(0)}|^2\right). \tag{23}$$

Le degré correct d'homogénéité de $K$ étant $2-n-mk$, on cherche $K$ de la forme

$$K = \frac{cF}{R^{(n+mk-2)/2k}}, \tag{24}$$

où $c = c(n,m,k)$ est constante et les arguments de la fonction $F$ sont eux-mêmes des fonctions de $(x, y, x^{(0)}, y^{(0)})$ qui soient homogène de degré 0. Un bonne choix est la paire de fonctions définies pour $x \neq 0$, $y \neq 0$ par

$$\rho = \frac{|x|^k\,|x^{(0)}|^k}{R}, \qquad v = \frac{x \cdot x^{(0)}}{|x|\,|x^{(0)}|}. \tag{25}$$

Alors

$$0 \leq \rho \leq 1; \qquad -1 \leq v \leq 1; \qquad (x,y) = (x^{(0)}, y^{(0)}) \;\Leftrightarrow\; (\rho, v) = (1,1).$$

Un calcul assez ennuyeux démontre que l'opérateur (7) annule un noyau $K$ de la forme (24) en dehors de la diagonale si et seulement si le numérateur $F$ satisfait à

$$\begin{aligned}
&(1-v^2)F_{vv} + (1-n)F_v + k^2(1-\rho^2)\rho^2 F_{\rho\rho} \\
&+ \left[k(n+k-2) - \tfrac{1}{2}k(2n+mk+2k-2)\rho^2\right]\rho F_\rho \\
&- \tfrac{1}{4}(n+mk-2)(n+mk+2k-2)\rho F = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

L'opérateur qui agit sur $F$ dans cette équation d'aspect compliqué se sépare effectivement en somme de deux opérateurs du type hypergéométrique d'une variable chacun. On peut alors chercher des solutions par séparation de variables. En effet on peut écrire cet opérateur comme $M + 4k^2 N$, où

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\partial^2}{\partial v^2} - D_v(D_v + n - 2); \\
4N &= D_\rho(D_\rho + \tfrac{n-2}{k}) - \rho^2(D_\rho + \tfrac{n-2+mk}{2k})(D_\rho + \tfrac{n-2+mk}{2k} + 1).
\end{aligned} \tag{27}$$

Ici $D_v$, $D_\rho$ indiquent les dérivées d' Euler

$$D_v = v\,\frac{\partial}{\partial v}, \qquad D_\rho = \rho\,\frac{\partial}{\partial \rho}.$$

À ce moment les variables convenables sont $v$, $\sigma$,

$$\sigma = \rho^2.$$

Alors $D_\rho = 2D_\sigma$ et

$$N = D_\sigma(D_\sigma + \tfrac{n-2}{2k}) - \sigma(D_\sigma + \tfrac{n-2+mk}{4k})(D_\sigma + \tfrac{n-2+mk}{4k} + \tfrac{1}{2}). \tag{28}$$

Pour simplifier on suppose maintenant $n = 2$. Alors les fonctions propres de l'opérateur $M$ sur l'intervale $(-1,1)$ sont les polynômes de Tchebycheff. On prend la normalisation

$$P_\nu(v) = \omega^\nu + \omega^{-\nu}, \qquad \omega + \omega^{-1} = 2v, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

avec valeurs propres $-\nu^2$. Écrivons

(29)
$$\begin{aligned} M + 4k^2 N &= (M+\nu^2) + 4k^2(N - \nu^2/4k^2) \\ &= (M+\nu^2) + k^2\big[(D_\sigma - \tfrac{\nu}{2k})(D_\sigma + \tfrac{\nu}{2k}) - \sigma(D_\sigma + \tfrac{m}{4})(D_\sigma + \tfrac{m}{4} + \tfrac{1}{2})\big]. \end{aligned}$$

Après conjugaison par $\sigma^{\nu/2k}$, l'opérateur dans crochets carrés devient

(30) $$D_\sigma(D_\sigma + \tfrac{\nu}{k}) - \sigma(D_\sigma + \tfrac{m}{4} + \tfrac{\nu}{2k})(D_\sigma + \tfrac{m}{4} + \tfrac{\nu}{2k} + \tfrac{1}{2}).$$

Les fonctions régulières a l'origine qui sont annulées par (30) sont des multiples de la fonction hypergéométrique

(31). $$F_\nu(\sigma) = F(\tfrac{m}{4} + \tfrac{\nu}{2k}, \tfrac{m}{4} + \tfrac{\nu}{2k} + \tfrac{1}{2}; 1 + \tfrac{\nu}{k}; \sigma)$$

Tenant compte des remarques ci-dessus, on attend une représentation du numérateur $F$ du noyau de Green $K$ comme série

(32) $$\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu \sigma^{|\nu|/2k} \omega^\nu F_{|\nu|}(\sigma), \qquad c_{-\nu} = c_\nu,$$

pour quelque choix des coefficients $c_\nu$. Pour simplifier encore on suppose maintenant $m = 2$. Dans ce cas (31) est la fonction algébrique

(33) $$F_\nu(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} \Big(\frac{2}{1+\sqrt{1-\sigma}}\Big)^{\nu/k}.$$

Tenant compte du comportement désiré du noyau à $\sigma = 1$, on fait la choix

$$c_\nu = 2^{-|\nu|/k}.$$

Après des calculs, (32) devient

(34) $$F = F(p,\rho) = \frac{\varphi_-(\rho^2)}{\varphi_+(\rho^2) - 2p},$$

où les fonctions $\varphi_\pm$ sont

$$\begin{aligned} \varphi_+(\sigma) &= (1+\sqrt{1-\sigma})^{1/k} + (1-\sqrt{1-\sigma})^{1/k}, \\ \varphi_-(\sigma) &= \tfrac{(1+\sqrt{1-\sigma})^{1/k} - (1-\sqrt{1-\sigma})^{1/k}}{\sqrt{1-\sigma}}, \end{aligned}$$

et la variable $p$ est l'analogue dans ce cas de la variable (20):

$$p = \rho^{1/k} v = \frac{x \cdot x^{(0)}}{R^{1/k}}$$

Donc

$$-1 \le p \le 1; \qquad p = 1 \ \Leftrightarrow\ (x,y) = (x^{(0)}, y^{(0)}).$$

Notons que l'expression finale du noyau de Green (24) est une fonction algébrique des variables $(x, y, x^{(0)}, y^{(0)})$. Une expression analogue se trouve dans [5], mais dans une intégrale fractionnelle.

La formule pour $m = 2$, $n$ quelconque ressemble à (34):

$$F = F(p, \rho) = \frac{\varphi_-(\rho^2)}{\left[\varphi_+(\rho^2) - 2p\right]^{n/2}}. \tag{35}$$

Pour $m$ pair quelconque on considère la partie droite de (35) comme fonction des variables $v$, $\rho$ et l'on obtient $F$ par multiplication et dérivation:

$$F = \rho^{-(n-2)/k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{(m-2)/2}\left\{\frac{\rho^{(m-2)/2}\rho^{(n-2)/k}\varphi_-(\rho^2)}{\left[\varphi_+(\rho^2) - 2p\right]^{n/2}}\right\}. \tag{36}$$

Si $m$ est impair, la numérateur $F$ est une intégrale fractionnelle d'une expression semblable à (36).

# Références


[1] J. Aarão, *A transport equation of mixed type*, Dissertation, Yale University 1997.

[2] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Non-analytic hypoellipticity for some degenerate elliptic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 483-486.

[3] R. Beals, *A note on fundamental solutions*, submitted.

[4] R. Beals, B. Gaveau, and P. C. Greiner, *On a geometric formula for the fundamental solutions of subelliptic laplacians*, Math. Nachrichten 181 (1996), 81-163.

[5] R. Beals, B. Gaveau, and P. C. Greiner, *Uniform hypoelliptic Green's functions*, J. Math. Pures Appl., to appear.

[6] R. Beals, B. Gaveau, P. C. Greiner, and Y. Kannai, *Exact fundamental solutions for a class of degenerate elliptic operators*, in preparation.

[7] S. Chandrasekhar, *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Mod. Phys. 15 (1943), 1-89.

[8] G. Folland, *A fundamental solution for a subelliptic operator*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 373-376.

[9] G. Folland and E. M. Stein, *Estimates for the $\bar{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 429–522.

[10] G. Francsics and N. Hanges, *Explicit formulas for the Szegö kernel on certain weakly pseudoconvex domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3161-3168.

[11] B. GAVEAU, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math. 139 (1977), 95–153.

[12] P. C. GREINER, *A fundamental solution for a nonelliptic partial differential operator*, Can. J. Math. 31 (1979), 1107-1120.

[13] P. C. GREINER AND E. M. STEIN, *On the solvability of some differential operators of type* $\Box_b$, Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. 4 (1978), 106-165.

[14] A. HULANICKI, *The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group*, Studia Math. 56 (1976), 165-173.

[15] A. KLINGLER, *New derivation of the Heisenberg kernel*, Comm. PDE 22 (1997), 2051-2060.

[16] A. N. KOLMOGOROV, *Zufällige Bewegungen*, Acta Math. 35 (1934), 116-117.

[17] A. NAGEL, *Vector fields and nonisotropic metrics.* in "Beijing Lectures in Harmonic Analysis," Annals of Math. Studies 112, Princeton Univ. Press, Princeton 1986, pp. 241-306.

DEPARTMENT OF MATHS, YALE UNIVERSITY, BOX 208 283, 10 HILHOUSE, NEW HAVEN, CT-06520-2820, USA
beals@math.yale.edu