JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

THIERRY COLIN

Un problème aux limites pour l'équation de Korteweg-de Vries sur un intervalle borné

Journées Équations aux dérivées partielles (1997), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1997____A3_0>

Un problème aux limites pour l'équation de Korteweg-de Vries sur un intervalle borné.

T.Colin[(1)], J.-M. Ghidaglia[(2)]

[(1)] Mathématiques Appliquées de Bordeaux, CNRS et Université Bordeaux 1, 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex, France. colin@math.u-bordeaux.fr
[(2)] CMLA, ENS de Cachan et CNRS, 61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan cedex, France. jmg@cmla.ens-cachan.fr

Résumé:
La propagation unidirectionnelle d'ondes de faible amplitude et de grande longueur d'onde est décrite, dans de nombreux systèmes physiques, par l'équation de Korteweg-de Vries. L'objet de ce travail est de proposer un problème mixte bien posé lorsque le domaine spacial est borné. Plus précisément nous établissons l'existence de solutions locales en temps pour des données initiales dans l'espace de Sobolev H^1 ainsi que l'existence de solutions globales pour données initiales petites dans cet espace. Nous prouvons de plus un effet régularisant et obtenons l'existence et l'unicité dans L^2. Une généralisation au problème du quart de plan est donnée.

1 Introduction.

L'équation de Korteweg-de Vries (KdV) décrit la propagation d'ondes de surface dans un canal dans le régime où la longueur d'onde est grande devant la profondeur du canal. Si $u(x,t)$ décrit la variation de hauteur par rapport à la hauteur d'équilibre, u vérifie alors

$$\text{(KdV)} \quad u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Le problème de Cauchy pour KdV (*i.e.* trouver une solution $u(x,t)$ de KdV définie pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $u(x,0) = u_0(x)$, la fonction u_0 étant donnée) a été très étudié. Pour l'existence de solution régulière, on pourra consulter [1]. Récemment, Bourgain [4] a montré que ce problème de Cauchy était bien posé pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Ce résultat a été amélioré par Kenig, Ponce et Vega [8] qui obtiennent l'existence et l'unicité pour $u_0(x) \in H^{-3/4}(\mathbb{R})$. Ces deux résultats reposent sur l'utilisation d'effets régularisants locaux du groupe unitaire engendré par la partie linéaire de KdV:

$$u_t + u_{xxx} = 0.$$

Néanmoins les expériences de laboratoire se font dans un canal de longueur finie muni d'un générateur d'ondes à une de ses extrémités. A l'autre extrémité, on dispose un plan incliné rugueux qui limite la réflexion. Un des problèmes mathématiques correspondant à cette situation est le problème du quart de plan:

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \ x \geq 0, \ t \geq 0, \\ u(0,t) = g(t), \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où g et u_0 sont des fonctions données. On trouvera dans [2] et [3] l'étude de (1.1), en particulier la construction de solutions dans $\mathcal{C}_t(\mathbb{R}^+; H^2_x(\mathbb{R}^+))$.

Notre but dans ce travail est de proposer un ensemble de conditions aux limites pour KdV sur un interval borné $[0, L]$ et de montrer que ce problème possède les propriétés "minimales" espérées d'existence. On trouvera dans [5] et [6] des estimations *a priori* de solutions régulières de KdV à données initiale nulle pour des conditions aux limites différentes de celles étudiées ici, mais pas de construction de solutions pour le problème aux limites.

Le problème aux limites que nous considérons ici est le suivant:

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0,\ 0 < x < L,\ t \geq 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 < x < L, \tag{1.3}$$

$$u(0,t) = g(t),\ t \geq 0, \tag{1.4}$$

$$u_x(L,t) = h(t),\ t \geq 0, \tag{1.5}$$

$$u_{xx}(L,t) = h(t),\ t \geq 0. \tag{1.6}$$

Dans la partie 2, nous allons construire des solutions locales en temps pour $u_0 \in H^1(0,L)$ qui seront globales lorsque les données u_0, g, h, k seront suffisament petites.

Dans la partie 3, on montrera que le problème

$$u_t + u_{xxx} = 0,\ 0 < x < L,\ t \geq 0, \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 < x < L, \tag{1.8}$$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0,\ u_{xx}(L,t) = 0 \tag{1.9}$$

possède un effet régularisant, ce qui nous permettra de traiter le problème de Cauchy pour (1.2), (1.9) dans $L^2(0,L)$. On étendra alors cette méthode au quart de plan.

Nous n'indiquerons ici que des éléments de preuve et nous renvoyons à [7] pour les détails.

2 Solutions H^1 par méthode de compacité.

Définissons tout d'abord ce qu'est une solution faible de (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6). Soit $\varphi(x,t) \in L^2(0,T,H^2)$ telle que $\varphi_t \in L^2(0,T,L^2)$ et $\forall t \in [0,T]$ $\varphi(0,t) = \varphi_x(0,t) = 0$.

Si u est une solution suffisament régulière de ce problème, alors u vérifie

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^L u\varphi_t dxdt - \int_0^L u(x,0)\varphi(x,0)dx + \int_0^L u(x,T)\varphi(x,T)dx \\
&\quad + \int_0^T\int_0^L (u_x + uu_x)\varphi dxdt + \int_0^T\int_0^L u_x\varphi_{xx} dxdt \qquad (2.1)\\
&\quad - \int_0^T h(t)\varphi_x(L,t)dt + \int_0^T k(t)\varphi(L,t)dt = 0.
\end{aligned}$$

Définition 2.1 *Une solution faible de* (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) *est une fonction* $u(x,t) \in L^\infty(0,T,L^2) \cap L^2(0,T,H^1)$ *vérifiant* (2.1) *pour tout* $\varphi(x,t) \in L^2(0,T,H^2)$ *telle que* $\varphi_t \in L^2(0,T,L^2)$ *et* $\forall t \in [0,T]$ $\varphi(0,t) = \varphi_x(0,t) = 0$.

Nous allons démontrer les résultats suivants:

Théorème 2.1 *Soit* $u_0 \in H^1(0,L)$ *et* $(g,h,k) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+))^3$ *tels que* $u_0(0) = g(0)$. *Alors il existe un temps* $T > 0$ *et une solution* $u \in L^\infty(0,T;H^1) \cap \mathcal{C}([0,T];L^2)$ *solution faible de* (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6).

On définit la fonction $f(x,t)$ sur $[0,L] \times \mathbb{R}^+$ par

$$f(x,t) = g(t) + (h(t) - k(t)L)x + \frac{1}{2}k(t)x^2$$

et on note (H_δ) l'ensemble de conditions suivantes:

$$(H_\delta)\begin{cases} \left|f_t + (\frac{f^2}{2})_x\right|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^2(0,L))} \le \delta, & \left|f_t + (\frac{f^2}{2})_x(0,t)\right|_{L^2(\mathbf{R}^+)} \le \delta, \\ \left|f_{txx} + (\frac{f^2}{2})_{xxx}\right|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^2(0,L))} \le \delta, & \left|(\frac{f^2}{2})_x\right|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^\infty(0,L))} \le \delta. \end{cases}$$

Théorème 2.2 *Soit* $u_0 \in H^1(0,L)$ *et* $(g,h,k) \in (\mathcal{C}^1 \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+))^3$ *tels que* $u_0(0) = g(0)$, $\inf_{t\ge 0}(1 + f(L,t)) = \alpha_0 > 0$ *et* $[h(t) - k(t)(L-x)]_+ \in L^1(\mathbb{R}^+)$. *Alors il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $|u_0(x) - f(x,0)|_{H^1(0,L)} \le \delta$ *et si* (H_δ) *est vérifiée, alors on peut prendre* $T = +\infty$ *dans le théorème 2.1.*

Nous allons présenter la preuve de ces résultats dans le cas où $h(t) = k(t) \equiv 0$.

2.1 Identités d'énergie et estimations *a priori.*

On pose $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$. La fonction v vérifie

$$v_t + (1+g)v_x + vv_x + v_{xxx} = -g_t, \qquad (2.2)$$

$$v(0,t) = v_x(L,t) = v_{xx}(L,t) = 0, \qquad (2.3)$$

$$v(x,0) = v_0(x) \equiv u_0(x) - g(0), \; 0 < x < L. \tag{2.4}$$

En multipliant (2.2) successivement par v et $(1+g)v + \frac{1}{2}v^2 + v_{xx}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_0^L v^2(x,t)dx + (1+g(t))v^2(L,T) + \frac{2}{3}v^3(L,t) + v_x^2(0,t) = -2g_t\int_0^L v(x,t)dx, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_0^L (v_x^2 - (1+g)v^2 - \frac{1}{3}v^3/3)dx + v_{xx}^2(0,t) \\ &= ((1+g)v(L,t) + \frac{1}{2}v^2)^2 - 2g_t v_x(0,t) + 2g_t(1+g)\int_0^L v(x,t)dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

On pose alors

$$X(t) = \int_0^t |v(.,s)|^4_{L^\infty} ds \text{ et } Y(t) = \int_0^L (v_x^2 - (1+g)v^2 - \frac{1}{3}v^3)dx.$$

En intégrant (2.5) et (2.6) entre 0 et t, on obtient:

$$|v|^2_{L^2}(t) + \int_0^t v_x^2(0,s)ds \leq \gamma_1(t)X^{1/2} + \frac{2}{3}t^{1/4}X^{3/4} + 2L\gamma_2(t)X^{1/4} + |v_0|_{L^2}, \tag{2.7}$$

$$Y(t) \leq (\gamma_4 X^{1/4} + \frac{1}{2}X^{1/2})^2 + \int_0^t v_x^2(0,s)ds + \gamma_3^2(t) + 2L\gamma_5(t)X^{1/4} + Y(0), \tag{2.8}$$

et

$$|v_x|^2_{L^2} \leq \frac{4}{3}Y + \frac{4}{3}(1+g)|v|^2_{L^2} + (\frac{2^{1/2}}{3})^{4/3}|v|^{10/3}_{L^2}, \tag{2.9}$$

où les $\gamma_i(t)$ dépendent de $g(t)$. Si on contrôle X, alors $|v|_{L^2}$ et $\int_0^t v_x^2(0,s)ds$ sont contrôlés par (2.7), et (2.8) donne le contrôle de Y, ce qui par (2.9) permet de contrôler $|v_x|_{L^2}$.

On calcule alors $\frac{d}{dt}X$ et on trouve

$$\frac{dX}{dt} \leq \alpha(t) + C(1+t^{2/3})X^2,$$

où $\alpha(t)$ dépend des donnés à travers les γ_i.

En conclusion, si on construit des solutions approchées vérifiant (2.5) et (2.6), alors ces solutions seront bornées dans $L^\infty(0,T;H^1(0,L))$ et par passage à la limite, on obtiendra l'existence locale dans H^1.

Des estimations identiques montrent que si les données sont suffisament petites, alors les bornes obtenues sont globales en temps.

2.2 Une équation régularisée.

Pour construire des solutions approchées, nous allons adapter la technique utilisée dans [2]. Nous allons construire une solution de

$$u_t^\varepsilon + u_x^\varepsilon + u^\varepsilon u_x^\varepsilon + u_{xxx}^\varepsilon - \varepsilon u_{xxt}^\varepsilon = 0, \; 0 < x < L, \; t \geq 0. \tag{2.10}$$

vérifiant les conditions aux limites $u^\varepsilon(0,t) = g(t)$, $u^\varepsilon_x(L,t) = u^\varepsilon_{xx}(L,t) = 0$. On effectue alors le changement de fonction

$$w(x,t) = \varepsilon u^\varepsilon(\varepsilon^{1/2}(x-t), \varepsilon^{3/2}t).$$

La fonction $w(x,t)$ est alors solution de

$$w_t + (1+\varepsilon)w_x + ww_x - w_{xxt} = 0,\ t \geq 0,\ t < x < t + \varepsilon^{-1/2}L, \tag{2.11}$$

$$w(t,t) = \varepsilon g(\varepsilon^{3/2}t),\ w_x(t+\varepsilon^{-1/2}L, t) = 0,\ w_{xx}(t+\varepsilon^{-1/2}L,t) = 0,\ t \geq 0, \tag{2.12}$$

$$w(x,0) = u_0(x) \equiv \varepsilon u_0(\varepsilon^{1/2}x),\ 0 < x < \varepsilon^{-1/2}L. \tag{2.13}$$

Remarquons que (2.11) est posé sur un domaine incliné.

Nous allons tout d'abord donner une formulation intégrale de ce problème. On fixe L et ε et on étudie

$$\left\{\begin{array}{c} w_t + cw_x + ww_x - w_{xxt} = 0,\ t < x < t+\lambda,\ t > 0, \\ w(t,t) = \gamma(t),\ t \geq 0, \\ w_x(t+\lambda,t) = 0,\ w_{xx}(t+\lambda,t) = 0,\ t \geq 0, \\ w(x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < \lambda. \end{array}\right. \tag{2.14}$$

On pose

$$v(x,t) = w(x,t) - \gamma(t),$$

la fonction $v(x,t)$ vérifie alors

$$v_t - v_{xxt} = -\gamma_t - V_x,\ t < x < t+\lambda,\ t \geq 0, \tag{2.15}$$

$$v(t,t) = 0,\ v_x(t+\lambda,t) = 0,\ t \geq 0, \tag{2.16}$$

$$v_{xx}(t+\lambda,t) = 0,\ t \geq 0, \tag{2.17}$$

et

$$v(x,0) = \varphi(x) - \gamma(0),\ 0 < x < L,$$

où

$$V(x,t) = (c+\gamma(t))v(x,t) + \frac{1}{2}v^2(x,t).$$

On inverse alors $1 - \partial_x^2$ sur $[t, t+\lambda]$:

Lemme 2.1 *Soient $t \geq 0$, $\lambda > 0$ donnés. Pour tout $h \in L^2(t,t+\lambda)$, il existe une unique fonction ψ dans $H^2(t,t+\lambda)$ solution de*

$$\psi - \psi_{xx} = h,\ t < x < t+\lambda,\ \psi(t) = 0,\ \psi_x(t+\lambda) = 0.$$

De plus,

$$\psi(x) = \int_t^x h(z)\sinh(z-x)dz + \frac{\sinh(x-t)}{\cosh(\lambda)}\int_t^{t+\lambda} h(z)\cosh(t+\lambda-z)dz. \tag{2.18}$$

La démonstration de ce lemme est un calcul simple.
On intègre alors (2.15) par rapport à t. Deux cas sont à distinguer suivant que i) $x \leq \lambda$, ii) $x > \lambda$:
Dans le cas i), on intègre entre 0 et t et on obtient:

$$(1-\partial_x^2)v = (1-\partial_x^2)(\varphi(x) - \gamma(0)) - \int_0^t [\gamma_t(s) + V_x(x,s)]\, ds,$$

Dans le deuxième cas, on intègre entre $x-\lambda$ et t:

$$(1-\partial_x^2)v = ((1-\partial_x^2)v)(x, x-\lambda) - \int_{x-\lambda}^t [\gamma_t(s) + V_x(x,s)]\, ds.$$

En utilisant la condition aux limites (2.17), on voit que si

$$W(x,t) = \begin{cases} (1-\partial_x^2)\varphi(x) - \gamma(t) - \displaystyle\int_0^t V_x(x,s)ds, \ x \leq \lambda, \\ \\ v(x, x-\lambda) - \gamma(t) + \gamma(x-\lambda) - \displaystyle\int_{x-\lambda}^t V_x(x,s)ds \ x > \lambda, \end{cases}$$

alors $v(x,t)$ vérifie

$$(1-\partial_x^2)v = W(x,t), \ \ t < x < t+\lambda.$$

On utilise alors le lemme, et aprés de multiples intégrations par partie, on obtient en se restreignant à $t \leq \lambda$:

$$(INT) \quad v(x,t) = (\mathcal{T}v)(x,t),$$

où $\mathcal{T}$ est donnée par:

$$\mathcal{T}(v) = \frac{\sinh(x-t)}{\cosh(\lambda)} \left[\varphi(t)\sinh(\lambda) - \varphi(\lambda)\sinh(t) - \gamma(t)\sinh(\lambda)\right.$$

$$+ \int_\lambda^{t+\lambda} [v(z, z-\lambda) + \gamma(z-\lambda)] \cosh(t+\lambda-z)dz - \int_0^t V(s+\lambda, s)\cosh(t-s)ds$$

$$\left. - \int_0^t \int_t^{s+\lambda} V(z,s) sinh(t+\lambda-z)dzds \right] - \varphi(t)\cosh(t-x) + \gamma(t)(\cosh(t-x) - 1)$$

$$+ \chi_\lambda(x) \left[\varphi(x) + \int_t^x \int_0^t V(z,s)ds \cosh(z-x)dz\right]$$

$$(1-\chi_\lambda(x)) \left[\varphi(\lambda)\cosh(\lambda-x) + \int_\lambda^x \int_{z-\lambda}^t V(z,s)ds\cosh(z-x)dz + \int_0^t \int_t^\lambda V(z,s)\cosh(z-x)dzds\right.$$

$$\left. - \int_0^{x-\lambda} V(s+\lambda, s)\sinh(s+\lambda-x)ds + \int_\lambda^x (v(z,z-\lambda) + \gamma(z-\lambda))\sinh(z-x)dz \right],$$

où $\chi_\lambda(x)$ est la fonction indicatrice de $x \leq \lambda$.

On pose

$$\mathcal{E}_T = \left\{ w(x,t) \text{ tel que } \forall t \in [0,T], \ w(\cdot, t) \in H^1(t, t+\lambda) \right\}$$

que l'on norme par

$$||w||_{\mathcal{E}_T} = supess_{t\in[0,T]} |w(\cdot,t)|_{H^1(t,t+\lambda)}.$$

Il est alors clair que l'on peut appliquer le théorème du point fixe à (INT) dans cet espace.
On obtient

Théorème 2.3 *Soient $\gamma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ et $\varphi \in H^1(0,\lambda)$ données. Alors il existe $T_0 > 0$ tel que (INT) ait une unique solution maximale $v \in \mathcal{E}_T$ pour tout $T < T_0$. De plus v est continue sur $S_\lambda^T \equiv \{(x,t),\ 0 \le t \le T,\ t \le x \le t+\lambda\}$ pour tout $T < T_0$ et si $T_0 < \infty$ alors $\lim_{t\to T_0} ||v||_{\mathcal{E}_t} = +\infty$.*

On dispose également d'un résultat de régularité:

Théorème 2.4 *Soient $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et $\varphi \in H^3(0,\lambda)$ vérifiant $\varphi_x(\lambda) = \varphi_{xx}(\lambda) = 0$. Alors la solution maximale obtenue au théorème 2.3 vérifie*

$$\forall t < T_0,\ \sup_{0\le t\le T} |v(\cdot,t)|_{H^3(t,t+\lambda)} < \infty.$$

De plus, pour tout $T < T_0$ on a $v_{xx} \in \mathcal{C}(S_\lambda^T)$, $v_x(t+\lambda,t) = v_{xx}(t+\lambda,t) = 0$, $\sup_{0\le t\le T} |v_t|_{H^4(t,t+\lambda)} < \infty$ et v est solution de (2.15)-(2.17).

Le théorème (2.3) se démontre en prouvant que l'application $v \mapsto w = \mathcal{T}(v)$ est une contraction sur une boule de $\mathcal{E}_T$ pour T suffisament petit. Le résultat de régularité se déduit de de façon classique. ■

On obtient ainsi une solution u^ε de (2.10) sur un intervale de temps $[0, T_\varepsilon[$. On pose alors $v^\varepsilon = u^\varepsilon - g(t)$. Pout montrer que T^ε est minoré indépendemment de ε par un temps $T_1 > 0$, il suffit de montrer, grâce au théorème 2.3, que $|v^\varepsilon|_{H^1(0,L)}$ est borné. La fonction v^ε vérifie les deux identités d'énergie:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L (v^\varepsilon)^2(x,t) + \varepsilon(v_x^\varepsilon)^2(x,t)dx + (1+g(t))(v^\varepsilon)^2(L,T)\\ +\frac{2}{3}(v^\varepsilon)^3(L,t) + (v_x^\varepsilon)^2(0,t) = -2g_t\int_0^L v^\varepsilon(x,t)dx,\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_0^L ((v_x^\varepsilon)^2 - (1+g)(v^\varepsilon)^2 - \frac{1}{3}(v^\varepsilon)^3/3)dx + \varepsilon(v_t^\varepsilon)^2(L,t) + (v_{xx}^\varepsilon - \varepsilon v_{xt}^\varepsilon)^2(0,t)\\ &= ((1+g)v^\varepsilon(L,t) + \frac{1}{2}(v^\varepsilon)^2)^2 - 2g_t v_x(0,t) + 2g_t(1+g)\int_0^L v^\varepsilon(x,t)dx - 2\varepsilon v_t^\varepsilon(L,t)g_t.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Avec ces deux identités, on peut reproduire les estimations de la section 2.1. On obtient alors qu'il existe $T1 > 0$ tel que $T^\varepsilon \ge T_1$. De plus, v^ε est bornée indépendament de ε dans $L^\infty(0,T_1;H^1)$ et donc $\partial_t v^\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(0,T_1;H^{-2})$. On en déduit que, quitte à extraire des sous-suites, $v^\varepsilon \to v$ dans $L^\infty(0,T_1;L^2)$ fortement et dans $L^\infty(0,T_1;H^1)$ faiblement, ce qui suffit pour passer à la limite. Cela termine la démonstration du théorème 2.1. ■

Pour le théorème 2.2, il suffit de voir qu'à données petites, la borne de v^ε est globale en temps, voir[7]. ■

3 Existence dans L^2 et effet régularisant.

On étudie ici le problème de Cauchy pour $g = h = k \equiv 0$ pour KdV (pour le cas général voir [7]). On va montrer:

Théorème 3.1 *Soit* $u_0 \in L^2(0,L)$. *Il existe* $T_2 > 0$ *et une unique solution faible maximale* $u(x,t) \in \mathcal{C}([0,T_2[;L^2) \cap L^2_{loc}([0,T_2[;H^1)$ *de (1.2). De plus* $u(x,t)$ *dépend continûment de* u_0.

On commence par construuire le semi-groupe linéaire et on prouve un effet régularisant.

Théorème 3.2 *i) Soit* $u_0 \in H^3$. *Il existe une unique solution notée* $S(t)u_0$ *de*

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0, \ t \geq 0, \ 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = u_x(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

telle que $S(t)u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3(0,L))$.

ii) L'application $u_0 \mapsto S(t)u_0$ *se prolonge de façon unique de* L^2 *à valeur dans* $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;L^2) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;H^1)$ *avec*

$$|S(t)u_0|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2)} + |\partial_x S(t)u_0|_{L^2(\mathbf{R}^+;L^2)} \leq (1 + L^{1/2})|u_0|_{L^2}.$$

Preuve: on commence par construire comme dans la partie précédente une solution d'une équation régularisée:

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t + u^\varepsilon_{xxx} - \varepsilon u^\varepsilon_{xxt} = 0, \ t \geq 0, \ 0 < x < L, \\ u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon_x(L,t) = u^\varepsilon_{xx}(L,t) = 0, \ t \geq 0, \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

On obtient ainsi $u^\varepsilon \in L^\infty(0,T^\varepsilon,H^3)$, puis on montre les estimations suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^L (|u^\varepsilon|^2 + \varepsilon|u^\varepsilon_x|^2) + (u^\varepsilon_x)^2(0,t) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^L (|u^\varepsilon_t|^2 + \varepsilon|u^\varepsilon_{xt}|^2) + (u^\varepsilon_{xt})^2(0,t) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

On passant à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient le i) du théorème.

On multiplie alors (3.1) successivement par $u(x,t)$ et $xu(x,t)$ et on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u^2 + (u_x)^2(0,t) = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^L xu^2(x,t) + 3\int_0^L u_x^2 = 0. \tag{3.5}$$

Les deux identitées (3.4) et (3.5) prouvent le ii) du thérème 3.2. ∎

On pose alors

$$\Lambda f(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

On dispose de deux estimations sur Λ qui sont duales de (3.4) et (3.5):

$$|\Lambda f(t)|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C\,|f|_{L^1(0,T;L^2)} \tag{3.6}$$

et

$$|\partial_x \Lambda f(t)|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C\,|f|_{L^1(0,T;L^2)}\,. \tag{3.7}$$

On cherche alors à trouver une solution de

$$u = S(t)u_0 - \Lambda(u_x + uu_x).$$

Grâce à (3.4)-(3.7), la démonstration du théorème 3.1 est immédiate. ∎

Remarque 3.1 *De tels effets régularisants sont bien sûr faux lorsque l'on considère KdV sur l'espace en entier.*

4 Application au quart de plan.

Nous allons généraliser les effets régularisants de la partie précédente au quart de plan puis démontrer:

Théorème 4.1 *Soit* $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ *telle que* $xu_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$. *Alors il existe une solution unique de*

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0,\ t \geq 0, x \geq 0, \tag{4.1}$$
$$u(0,t) = 0,\ t \geq 0, u(x,0) = u_0(x),\ x \geq 0$$

vérifiant $u \in \mathcal{C}_t(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^+, (1+x)dx))$ *et* $\partial_x u \in L^2_{loc,t}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^+, (1+\sqrt{x})dx))$. *De plus, u dépend continûment de* u_0 *dans ces espaces et pour tout* $t_0 > 0$,

$$u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; H^2(\mathbb{R}^+))$$

i.e. c'est la solution de [2]

Commençons par étudier l'équation linéaire:

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} = 0,\ t \geq 0, \mathrm{x} \geq 0, \\ u(0,t) = 0,\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

En multipliant (4.2) par u, xu et x^2u, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty u^2 dx + u_x^2(0,t) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty xu^2 dx + 3\int_0^\infty u_x^2 = 0, \tag{4.4}$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty x^2u^2 dx + 6\int_0^\infty xu_x^2 = 0. \tag{4.5}$$

On note alors $u(x,t) = S(t)u_0(x)$ et $\Lambda f(t) = \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s)ds$. On obtient alors des estimations duales de (4.3)-(4.4):

$$|\Lambda f|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}^+,(1+x^2)dx))} \leq C(T)\,|f|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}^+,(1+x^2)dx))} \tag{4.6}$$

et

$$|\partial_x \Lambda f|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}^+,(1+x)dx))} \leq C(T)\,|f|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}^+,(1+x^2)dx))} \tag{4.7}$$

On écrit (4.1) sous la forme

$$u = S(t)u_0 - \Lambda(u_x + uu_x),$$

et une technique de point fixe permet de conclure. Pour la régularité de la solution (H^2 dès que $t_0 > 0$), on montre des effets régularisant supplémentaires sur (4.2):

$$\frac{d}{dt}\int u_x^2 + u_{xx}^2(0,t) = 0,$$

et

$$\frac{d}{dt}\int xu_x^2 - 2u_{xx}(0,t)u_x(0,t) + 3\int_0^\infty u_{xx}^2 = 0,$$

il est alors facile de conclure.

Références

[1] Bona J. and Smith R., *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 278, p. 555-601, (1975).

[2] Bona J. and Winther R. *The Korteweg-de Vries equation posed in a quarter-plane*, SIAM J. Math. Anal, 14, p. 1056-1106, (1983).

[3] Bona J. and Winther R., *The Korteweg-de Vries equation in a quarter plane, continuous dependence results*, Differential and Integral Equations, 2, p. 228-250, (1989).

[4] Bourgain, J. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II: The KdV-equation*,Geom. Funct. Anal. 3, No.3, 209-262 (1993).

[5] Bubnov B., *Generalized boundary-value problems for the Korteweg-de Vries equation in bounded regions*, Sov. Math., Dokl. 20, p.685-688 (1979).

[6] Bubnov B., *Solvability in the large of nonlinear boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation in bounded regions*, Differ. Equations 16, p. 24-30 (1980).

[7] Colin T. and Ghidaglia J.-M., *An initial-bounary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite interval*, en préparation.

[8] Kenig C.E., Ponce G. and Vega L., *A bilinear estimate with application to the KdV equation*, J. Am. Math. Soc. 9, No.2, 573-603 (1996).