

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GUY DAVID

STEPHEN SEMMES

Surfaces quasiminimales de codimension 1 : un morceau de démonstration

Journées Équations aux dérivées partielles (1996), p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1996___A9_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURFACES QUASIMINIMALES DE CODIMENSION 1 : UN MORCEAU DE DEMONSTRATION

Guy DAVID et Stephen SEMMES

I. Introduction

Le but principal de ce texte est de présenter une démonstration un peu plus directe d'un résultat qui se trouve dans [DS3]. Il s'agit de décrire les surfaces quasiminimales de codimension 1 dans \mathbb{R}^n , c'est-à-dire les ensembles compacts E qui "quasiminimisent" la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$, $H^{n-1}(E)$, sous une contrainte topologique que nous allons expliquer.

On se donne deux boules ouvertes D_0 et D_1 dans \mathbb{R}^n , avec $\bar{D}_0 \subset D_1$, et on suppose pour simplifier que D_0 est centrée en 0. Notre classe de compétiteurs est

$$(1.1) \quad \mathcal{F} = \{E \subset \bar{D}_1 \setminus D_0 : E \text{ est compact, sépare } 0 \text{ de } \infty, \text{ et } H^{n-1}(E) < +\infty\}.$$

(Rappelons que $H^{n-1}(E)$ est la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$ de E ; E sépare 0 de ∞ signifie que 0 n'est pas dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n \setminus E$.)

DEFINITION 1.2. Soit E une partie compacte de \mathbb{R}^n . On dira que E est un quasiminimum pour H^{n-1} si $E \in \mathcal{F}$ et s'il existe $M \geq 1$ tel que

$$(1.3) \quad H^{n-1}(E \setminus F) \leq M H^{n-1}(F \setminus E) \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}.$$

Si E vérifie (1.3) avec $M = 1$, alors E minimise vraiment la mesure de surface H^{n-1} , et il est assez facile de voir que $E = \partial D_0$ à un ensemble de mesure nulle près. Quand M est grand, (1.3) signifie seulement qu'on ne peut pas remplacer un morceau de E par un ensemble beaucoup plus petit sans détruire la propriété de séparation $E \in \mathcal{F}$. Notons au passage que cette propriété de séparation implique que $H^{n-1}(E) \geq H^{n-1}(\partial D_0) > 0$ et empêche E d'être trop petit ou vide. Bien sûr, d'autres contraintes topologiques sont possibles, et certaines devraient donner des résultats semblables à ceux que nous allons décrire.

Notons que si E est un quasiminimum pour H^{n-1} et $Z \subset \bar{D}_1 \setminus D_0$ est n'importe quel compact tel que $H^{n-1}(Z) = 0$, alors $E \cup Z$ est encore un quasiminimum. Il faut donc nous attendre à devoir éliminer la partie superflue des quasiminima avant d'énoncer leurs propriétés de régularité. Donnons d'abord l'énoncé principal, puis les définitions nécessaires.

Le travail présenté dans cet article a été fait lors de visites du second auteur à l'IHES, que nous remercions. Le second auteur remercie également la NSF pour son support.

THEOREME 1.4 [DS3]. Soit E un quasiminimum pour H^{n-1} . Alors il existe $E_0 \in \mathcal{F}$ tel que $E_0 \subset E$,

(1.5) E_0 est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$ qui satisfait à la condition B ,

(1.6) $\mathbb{R}^n \setminus E_0$ a exactement deux composantes connexes : la composante de 0 , que nous noterons W_0 , et la composante connexe de ∞ , qui sera notée W_1 ,

(1.7) W_0 et W_1 sont des domaines de John, et

(1.8) $E_0 = \partial W_0 = \partial W_1$.

Les constantes qui interviennent dans les propriétés (1.5) et (1.7) ne dépendent que de n , D_0 , D_1 et M .

DEFINITION 1.9. Un ensemble Ahlfors-régulier de dimension d est une partie fermée E de \mathbb{R}^n telle qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$(1.10) \quad C_0^{-1}r^d \leq H^d(E \cap B(x, r)) \leq C_0r^d$$

pour tout $x \in E$ et tout $r \in]0, \text{diam } E[$.

DEFINITION 1.11. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$. On dit que E satisfait à la condition B s'il existe $C_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $r \in]0, \text{diam } E[$, il existe deux boules B_1, B_2 de rayon $C_1^{-1}r$, contenues dans $B(x, r) \setminus E$, et qui sont contenues dans deux composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus E$.

La notion d'Ahlfors-régularité n'est qu'une notion de taille ; par contre, les ensembles Ahlfors-réguliers qui satisfont à la condition B ont de bonnes propriétés de régularité, et en particulier sont "uniformément rectifiables". Voir [Se] pour la première apparition de cette condition, et [DS1] et les références qui s'y trouvent pour la rectifiabilité uniforme.

DEFINITION 1.12. Soit W un ouvert connexe borné dans \mathbb{R}^n . On dira que W est un domaine de John de centre $z_0 \in W$ s'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que, pour tout $z \in W$, l'on puisse trouver un chemin $t \rightarrow \alpha(t)$ ayant les propriétés suivantes :

$$(1.13) \quad \alpha : [0, |z - z_0|] \rightarrow W \text{ est } C_2 - \text{lipschitzien,}$$

$$(1.14) \quad \alpha(0) = z \text{ et } \alpha(|z - z_0|) = z_0,$$

et

$$(1.15) \quad \text{dist}(\alpha(t), \mathbb{R}^n \setminus W) \geq C_2^{-1}t \text{ pour tout } t \in [0, |z - z_0|].$$

Ainsi, chaque point de W peut être joint au centre z_0 par une sorte de région d'accès conique. Nous aurons aussi besoin du cas où W n'est pas borné, mais au contraire contient le complémentaire d'une boule fermée \bar{D}_1 . Dans ce cas, on choisit n'importe quel centre z_0 sur la sphère $2(\partial D_1)$, et on dit que W est un domaine de John s'il existe $C_2 > 0$ tel qu'on puisse trouver, pour tout $z \in W \cap 2D_1$, un chemin $t \rightarrow \alpha(t)$ ayant les propriétés (1.13), (1.14) et (1.15).

Voir la figure 1 pour un dessin de quasiminimum typique.

L'énoncé du théorème 1.4 appelle un certain nombre de commentaires, pour lesquels nous renvoyons le lecteur à [DS3] ou [DS4]. Nous nous contenterons ici de quelques brèves remarques. L'ensemble E_0 est, lui aussi, un quasiminimum (car il est contenu dans E et appartient à \mathcal{F}). Il est assez facile de voir, en utilisant (1.6) et la condition B , que E_0 est unique, et aussi qu'il est minimal au sens où aucun compact E_1 strictement contenu dans E_0 ne peut séparer 0 de ∞ . Signalons aussi que la réciproque du théorème est vraie: si E_0 vérifie les conclusions du théorème, alors E_0 est un quasiminimum pour H^{n-1} . En dimension $n = 2$, l'énoncé et la démonstration se simplifient, et on trouve que les quasiminima pour H^1 sont (à des ensembles de mesure nulle près) les courbes corde-arc. [Voir [DS4].]

Le théorème 1.4 est démontré dans [DS3], mais dans ce texte l'accent était surtout mis sur un problème minimal légèrement différent, où la mesure $H^{n-1}(E)$ était remplacée par la norme, dans l'espace des fonctions à variations bornées, de la fonction caractéristique de la composante connexe de 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus E$. Le but du présent texte est de donner une démonstration directe de l'essentiel du théorème 1.4. On n'hésitera pas, cependant, à renvoyer le lecteur à [DS3] pour certains arguments techniques ou plus ou moins orthogonaux à notre propos principal.

Rappelons que [DS4] contient une présentation générale du théorème 1.4 et sa démonstration en dimension 2, qui devraient être faciles à lire.



Figure 1 : Un quasiminimum typique

II. Ahlfors-régularité et condition B

Donnons-nous, une fois pour toutes, un quasiminimum E pour H^{n-1} . Notre première tâche, qui fait l'objet de ce paragraphe, sera de trouver un ensemble Ahlfors-régulier E_0 qui vérifie la condition B et coïncide avec E sauf pour un ensemble de mesure nulle.

Notons W la composante connexe de 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus E$. Toutes les informations que nous allons obtenir dans ce paragraphe viendront de la comparaison entre E et des compétiteurs $F \in \mathcal{F}$ de la forme $F = \partial(W \cup B)$ ou $F = \partial(W \setminus B)$, où B sera une boule.

Considérons d'abord une boule ouverte B contenue dans D_1 , et posons $F = \partial(W \cup B)$. Notons que $F \setminus E \subset F \setminus \partial W \subset \partial B \setminus W$. En particulier, $F \subset \bar{D}_1 \setminus D_0$ (car W contient D_0) et $H^{n-1}(F) < +\infty$. Comme F sépare 0 $\in W$ de ∞ , F est dans \mathcal{F} et on peut lui appliquer la condition (1.3). On obtient que $H^{n-1}(E \setminus F) \leq MH^{n-1}(F \setminus E) \leq MH^{n-1}(\partial B \setminus W)$. Comme $B \cap E \subset E \setminus F$, on en déduit aussitôt que

$$(2.1) \quad H^{n-1}(B \cap E) \leq MH^{n-1}(\partial B \setminus W) \text{ pour toute boule ouverte } B \subset D_1.$$

Soit maintenant B une boule (ouverte) qui ne rencontre pas D_0 , et posons $F = \partial(W \setminus B)$. Il est à nouveau clair que F sépare 0 de ∞ , est contenu dans $\bar{D}_1 \setminus D_0$, et cette fois $F \setminus E \subset F \setminus \partial W \subset \partial B \cap W$. Comme on a toujours $E \cap B \subset E \setminus F$, (1.3) donne

$$(2.2) \quad H^{n-1}(B \cap E) \leq MH^{n-1}(\partial B \cap W) \text{ pour toute boule ouverte } B \text{ qui ne rencontre pas } D_0.$$

Notons, pour tout $x \in D_1$ et tout $r > 0$,

$$(2.3) \quad h(x, r) = r^{-n} \text{Min}(|W \cap B(x, r)|, |B(x, r) \setminus W|),$$

où l'on a noté $|W \cap B(x, r)|$ la mesure de Lebesgue de $W \cap B(x, r)$, et pareillement pour $|B(x, r) \setminus W|$.

LEMME 2.4. Si $B(x, 2r) \subset D_1$ ou $B(x, 2r) \cap D_0 = \emptyset$, on a

$$(2.5) \quad r^{-n-1} H^{n-1}(E \cap \bar{B}(x, r)) \leq C h(x, 2r).$$

Grâce à (2.1) et (2.2), on a de toute façon que

$$H^{n-1}(E \cap B(x, 2r)) \leq MH^{n-1}(\partial B(x, 2r)) \leq Cr^{n-1}$$

dans les conditions du lemme. On peut donc se contenter de prouver (2.5) lorsque $h(x, 2r) < \delta$, où δ est une constante > 0 qui sera choisie dans un instant.

Commençons par le cas où $h(x, 2r) = (2r)^{-n} |W \cap B(x, 2r)| < \delta$. Si $B(x, \frac{3r}{2})$ rencontrait D_0 , alors $B(x, 2r)$ serait contenu dans D_1 (à cause de notre hypothèse sur r et puisque $B(x, 2r) \cap D_0 \neq \emptyset$). Alors $|D_0 \cap B(x, 2r)|$ serait du même ordre de grandeur que r^n , ce qui est impossible si δ est choisi assez petit, puisque $|W \cap B(x, 2r)| < (2r)^n \delta$. Donc $B(x, \frac{3r}{2}) \cap D_0 = \emptyset$, et l'on peut appliquer (2.2) avec $B = B(x, t)$ pour tout $t \in]r, \frac{3r}{2}[$.

Par Fubini et Tchebychev, on peut choisir $t \in]r, \frac{3r}{2}[$ tel que

$$(2.6) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(W \cap \partial B(x, t)) &\leq Cr^{-1} |W \cap B(x, 2r)| \\ &= 2^n C r^{n-1} h(x, 2r). \end{aligned}$$

Alors (2.2) nous dit que

$$(2.7) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(E \cap \bar{B}(x, r)) &\leq H^{n-1}(E \cap B(x, t)) \\ &\leq M H^{n-1}(W \cap \partial B(x, t)) \leq Cr^{n-1} h(x, 2r), \end{aligned}$$

ce qui est bien (2.5).

Il reste le cas où $h(x, 2r) = (2r)^{-n} |B(x, 2r) \setminus W| < \delta$. Si δ est choisi assez petit, ceci implique que $B(x, \frac{3r}{2}) \subset D_1$ (parce que $B(x, 2r) \setminus D_1 \subset B(x, 2r) \setminus W$ de toute façon). On peut donc appliquer (2.1) à $B = B(x, t)$ pour tout $t < \frac{3r}{2}$. Choisissons (toujours par Fubini et Tchebychev) $t \in]r, \frac{3r}{2}[$ tel que

$$(2.8) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial B(x, t) \setminus W) &\leq Cr^{-1} |B(x, 2r) \setminus W| \\ &= 2^n C r^{n-1} h(x, 2r). \end{aligned}$$

Alors (2.1) nous dit que

$$(2.9) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(E \cap \bar{B}(x, r)) &\leq H^{n-1}(E \cap B(x, t)) \\ &\leq M H^{n-1}(\partial B(x, t) \setminus W) \leq Cr^{n-1} h(x, 2r). \end{aligned}$$

Ceci termine notre démonstration du lemme 2.4.

LEMME 2.10. On a

$$(2.11) \quad h(x, r) \leq C (r^{-n+1} H^{n-1}(E \cap \bar{B}(x, r)))^{\frac{n}{n-1}}$$

pour tout $x \in \bar{D}_1$ et tout $r > 0$.

Ce lemme est une conséquence facile de l'inégalité isopérimétrique sur une sphère. On construit un objet S qui est bilipschitziennement équivalent à une sphère de dimension n en partant de l'union $B \cup \tilde{B}$, où $B = \bar{B}(x, r)$ et \tilde{B} est une copie identique de B , et en recollant B et \tilde{B} le long de leurs frontières ∂B et $\partial \tilde{B}$ (c'est-à-dire en identifiant chaque point de $\partial B(x, r)$ avec le point correspondant de $\partial \tilde{B}$). Notons \hat{W} l'union dans S de $W \cap B$ et de la partie correspondante de \tilde{B} , et $\partial_S \hat{W}$ sa frontière dans S . L'inégalité isopérimétrique dans S donne

$$(2.12) \quad r^{-n} \text{Min} \left(\text{volume}(\hat{W}), \text{volume}(S \setminus \hat{W}) \right) \leq C \left[r^{1-n} H^{n-1}(\partial_S \hat{W}) \right]^{\frac{n}{n-1}}.$$

Par ailleurs, $\text{volume}(\hat{W}) = 2 |W \cap B(x, r)|$ et $\text{volume}(S \setminus \hat{W}) = 2 |B(x, r) \setminus W|$, de sorte que le membre de gauche de (2.12) est $2h(x, r)$. Comme d'autre part $\partial_S \hat{W}$ est contenu dans l'union (dans S) de $\partial W \cap B$ et de sa copie dans \tilde{B} , on voit que

$$(2.13) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial_S \hat{W}) &\leq 2H^{n-1}(\partial W \cap \bar{B}(x, r)) \\ &\leq 2H^{n-1}(E \cap \bar{B}(x, r)). \end{aligned}$$

On déduit aussitôt le lemme 2.10 de (2.12) et (2.13).

En comparant les lemmes 2.4 et 2.10, on trouve que

$$(2.14) \quad h(x, r) \leq C h(x, 3r)^{\frac{n}{n-1}}$$

dès que

$$(2.15) \quad x \in \bar{D}_1 \text{ et } r \text{ est assez petit pour que } B(x, 3r) \subset D_1 \text{ ou } B(x, 3r) \cap D_0 = \emptyset.$$

LEMME 2.16. *Il existe une constante $\epsilon_0 > 0$, qui ne dépend que de n, D_0, D_1 et M , telle que si (2.15) a lieu et $h(x, 3r) \leq \epsilon_0$, alors $|W \cap B(x, 2r)| = 0$ ou $|B(x, 2r) \setminus W| = 0$.*

Ce lemme est une conséquence mécanique de (2.14). Supposons que (2.15) a lieu et que $h(x, 3r) \leq \epsilon_0$, et soit y n'importe quel point de $B(x, 2r)$. Notons $d_m = h(y, 3^{-m}r)$ pour tout entier $m \geq 0$. A cause de (2.15), on peut appliquer (2.14) à toutes les boules $B(y, 3^{-m-1}r)$, et on trouve que

$$(2.17) \quad d_{m+1} \leq C d_m^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{pour tout } m \geq 0.$$

Par ailleurs, $d_0 = h(y, r) \leq 3^n h(x, 3r) \leq 3^n \epsilon_0$ (par définition de h et parce que $B(y, r) \subset B(x, 3r)$). On va choisir ϵ_0 assez petit pour que $C (3^n \epsilon_0)^{\frac{1}{n-1}} < \frac{1}{2}$, où C est la constante qui intervient dans (2.17). Alors (2.17) implique que $d_{m+1} \leq \frac{1}{2} d_m$ dès que $d_m \leq 3^n \epsilon_0$. On en déduit aussitôt que $d_m \leq 3^{-m} d_0$ pour tout $m \geq 0$.

Supposons maintenant que $h(x, 3r) = (3r)^{-n} |W \cap B(x, 3r)|$. Si ϵ_0 est assez petit, ceci implique que $|W \cap B(y, r)|$ est plus petit que $|B(y, r) \setminus W|$, donc que

$$d_0 = r^{-n} |W \cap B(y, r)|.$$

En itérant cet argument, on obtient que

$$d_m = (3^{-m}r)^{-n} |W \cap B(y, 3^{-m}r)|$$

pour tout m . Comme d_m tend vers 0, on en déduit que y ne peut être un point de densité de Lebesgue de l'ensemble W . Comme ceci est vrai pour tout $y \in B(x, 2r)$, on voit que $|W \cap B(x, 2r)| = 0$ (car presque tout point de $W \cap B(x, 2r)$ est un point de densité de W).

De la même manière, si $h(x, 3r) = (3r)^{-n} |B(x, 3r) \setminus W|$, on peut montrer de proche en proche que $d_m = (3^{-m}r)^{-n} |B(y, 3^{-m}r) \setminus W|$ pour tout m . Cette fois on en déduit que y n'est pas un point de densité de $B(x, 2r) \setminus W$. Comme ceci est vrai pour tout $y \in B(x, 2r)$, il vient que $|B(x, 2r) \setminus W| = 0$. Ceci termine notre démonstration du lemme 2.16.

LEMME 2.18. *Les ensembles*

$$(2.19) \quad W_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{il existe } r > 0 \text{ tel que } |B(x, r) \setminus W| = 0\},$$

$$(2.20) \quad W_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{il existe } r > 0 \text{ tel que } |W \cap B(x, r)| = 0\}$$

et

$$(2.21) \quad E_0 = \{x \in \bar{D}_1 : h(x, r) > \epsilon_0 \text{ pour tout } r \in]0, \frac{1}{2} \text{dist}(D_0, \partial D_1)]\}$$

forment une partition de \mathbb{R}^n .

C'est une conséquence facile du lemme 2.16. Il est clair que W_0 , W_1 et E_0 sont disjoints ; il suffit donc de montrer que $\mathbb{R}^n = W_0 \cup W_1 \cup E_0$. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_1$, alors $x \in W_0$. Si $x \in \bar{D}_1 \setminus E_0$, il existe $r < \frac{1}{2} \text{dist}(D_0, \partial D_1)$ tel que $h(x, r) \leq \epsilon_0$. On peut appliquer le lemme 2.16 avec le rayon $\frac{r}{3}$, parce que $B(x, r)$ ne peut à la fois rencontrer D_0 et le complémentaire de D_1 . On trouve que $x \in W_1$ ou $x \in W_0$, ce qui termine la démonstration du lemme.

Il est clair que

$$(2.22) \quad E_0 \subset \partial W \subset E,$$

et donc E_0 est de mesure de Lebesgue nulle. Il est aussi clair (à partir de (2.19)) que tout point de W_0 est un point de densité de Lebesgue de W . La réciproque est également vraie à cause du lemme 2.18 : si x est un point de densité de W , alors $x \notin W_1$, et $h(x, r)$ tend vers 0 quand $r \rightarrow 0$, de sorte que $x \in W_0$. De même, W_1 est l'ensemble des points de densité de $\mathbb{R}^n \setminus W$. On en déduit aussitôt que

$$(2.23) \quad \begin{aligned} |W_0 \setminus W| &= |W \setminus W_0| = |W_1 \setminus (\mathbb{R}^n \setminus W)| \\ &= |(\mathbb{R}^n \setminus W) \setminus W_1| = 0. \end{aligned}$$

Si $x \in E_0$, (2.21) et (2.23) nous disent que toute boule centrée en x rencontre à la fois W_0 et W_1 . On en déduit que $x \in \partial W_0 \cap \partial W_1$. Réciproquement, si $x \in \partial W_0$ (ou ∂W_1), x ne peut être ni dans W_0 , ni dans W_1 car ils sont ouverts, donc $x \in E_0$. Par conséquent,

$$(2.24) \quad E_0 = \partial W_0 = \partial W_1.$$

Notons que E_0 sépare 0 de ∞ et est contenu dans $\bar{D}_1 \setminus D_0$, car W_0 contient D_0 et W_1 contient $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_1$. Donc $E_0 \in \mathcal{F}$ (puisque $H^{n-1}(E_0) \leq H^{n-1}(E) < +\infty$ par (2.22)), et E_0 est un quasiminimum pour H^{n-1} puisque E en est un. Nous allons maintenant vérifier que E_0 est Ahlfors-régulier et satisfait à la condition B.

LEMME 2.25. E_0 est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$.

Il est clair que E_0 est fermé, car c'est le complémentaire de $W_0 \cup W_1$. Il suffit donc de vérifier que

$$(2.26) \quad C^{-1}r^{n-1} \leq H^{n-1}(E_0 \cap B(x, r)) \leq Cr^{n-1}$$

pour tout $x \in E_0$ et tout $r > 0$ tel que $r < \frac{1}{2} \text{dist}(D_0, \partial D_1)$, car le cas où $\frac{1}{2} \text{dist}(D_0, \partial D_1) \leq r \leq \text{diam } E_0$ s'en déduit aussitôt (en augmentant un peu C).

La première inégalité de (2.26) est une conséquence immédiate de la définition (2.21), du lemme 2.10 (appliqué à $\frac{r}{2}$, par exemple), et du fait que $H^{n-1}(E \setminus E_0) = 0$ (parce que

$E_0 \subset E$ et E est un quasiminimum). [On pourrait aussi démontrer directement l'analogie du lemme 2.10 pour E_0 .]

La seconde inégalité de (2.26) se démontre aisément à partir de (2.1) et (2.2). Si $r < \frac{1}{2} \text{dist}(D_0, \partial D_1)$, alors $B(x, r)$ est contenue dans D_1 ou ne rencontre pas D_0 . On applique (2.1) dans le premier cas, et (2.2) dans le second, et on trouve que

$$H^{n-1}(E_0 \cap B(x, r)) \leq H^{n-1}(E \cap B(x, r)) \leq MH^{n-1}(\partial B(x, r)).$$

On en déduit (2.26) et le lemme 2.25.

Occupons-nous maintenant de la condition B . Nous allons non seulement vérifier que E_0 satisfait à cette condition, mais que chacun des deux ouverts W_0 et W_1 "satisfait à la condition B ".

DEFINITION 2.27. Soit W_0 un ouvert de \mathbb{R}^n . On dira que W_0 satisfait à la condition B s'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $x \in \partial W_0$ et tout $r \in]0, \text{diam}(\partial W_0)[$, on peut trouver deux boules B_0, B_1 de rayon $\frac{r}{C_1}$ et contenues dans $B(x, r)$ telles que $B_0 \subset W_0$ et $B_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{W}_0$.

Noter la similitude avec la définition 1.11. On ne demande pas encore, dans la définition 2.27, que W_0 ou $\mathbb{R}^n \setminus \bar{W}_0$ soit connexe ; en ce qui concerne nos ensembles W_0 et W_1 , nous ne saurons qu'au prochain paragraphe. Noter qu'il se pourrait a priori que E_0 satisfasse à la condition B sans que ce soit le cas pour W_0 et W_1 . La condition B pour E_0 nous donne seulement des boules B_0 et B_1 contenues dans des composantes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus E_0$, mais il se pourrait que B_0 et B_1 soient toutes les deux dans W_0 , par exemple, si W_0 n'est pas connexe. Le lemme suivant est donc un peu plus précis que (1.5).

LEMME 2.28. *Les ouverts W_0 et W_1 satisfont à la condition B .*

Pour démontrer ce lemme, donnons-nous $x \in E_0$ et $0 < r < \text{diam } E_0$. Grâce à (2.23) et aux définitions (2.21) et (2.3), plus le fait que $\text{diam } D_0 \leq \text{diam } E_0 \leq \text{diam } D_1$, on a

$$(2.29) \quad |W_0 \cap B(x, r)| \geq C^{-1}r \quad \text{et} \quad |W_1 \cap B(x, r)| \geq C^{-1}r.$$

Vérifions que par ailleurs

$$(2.30) \quad |\{y \in B(x, r) : \text{dist}(y, E_0) \leq tr\}| \leq Ctr^n$$

pour tout $t \in]0, 1[$. Soit \mathcal{A} un ensemble maximal de points de $E_0 \cap B(x, 2r)$ qui soient à distances mutuelles $\geq tr$. Comme les boules $B(a, \frac{tr}{2})$, $a \in \mathcal{A}$, sont disjointes et E_0 est Ahlfors-régulier, le nombre d'éléments de \mathcal{A} est tel que

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &\leq C \sum_{a \in \mathcal{A}} (tr)^{-n+1} H^{n-1}(E_0 \cap B(a, \frac{tr}{2})) \\ &\leq C(tr)^{-n+1} H^{n-1}(E_0 \cap B(x, 3r)) \\ &\leq Ct^{-n+1}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\{y \in B(x, r) : \text{dist}(y, E_0) \leq tr\}$ est contenu dans l'union des $B(a, 2tr)$, $a \in A$. On en déduit (2.30).

Si l'on compare (2.29) et (2.30), on constate que si l'on choisit la constante t assez petite, on peut trouver des points $y_0 \in W_0 \cap B(x, r)$ et $y_1 \in W_1 \cap B(x, r)$ qui soient à distance $> tr$ de E_0 . Les boules $B_0 = B(y_0, tr)$ et $B_1 = B(y_1, tr)$ vérifient bien les conditions de la définition 2.27, sauf qu'elles sont seulement contenues dans $B(x, 2r)$. On en déduit quand même le lemme 2.28.

Faisons rapidement le point. A chaque quasiminimum E pour H^{n-1} , nous avons associé un ensemble Ahlfors-régulier $E_0 \subset E$ et deux ouverts W_0 et W_1 vérifiant la condition B tels que \mathbb{R}^n est l'union disjointe de W_0, W_1 et E_0 , W_0 contient D_0 , W_1 contient $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_1$, et (1.8). Il ne reste donc plus, pour compléter la démonstration du théorème 1.4, qu'à montrer que W_0 et W_1 sont connexes et sont des domaines de John.

3. Domaines d'isopérimétrie

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les ouverts W_0 et W_1 sont connexes, et sont des "domaines d'isopérimétrie". Nous verrons ensuite comment en déduire que ce sont des domaines de John.

DEFINITION 3.1. Soit W un ouvert de \mathbb{R}^n . On dira que W est un domaine d'isopérimétrie s'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$(3.2) \quad \min(|\Omega|, |W \setminus \Omega|) \leq C_3 H^{n-1}(W \cap \partial\Omega)^{\frac{n}{n-1}}$$

pour tout ouvert $\Omega \subset W$.

Comme $W \cap \partial\Omega$ est la frontière relative de Ω dans W , il s'agit bien de tester si une inégalité isopérimétrique du type usuel est vraie dans Ω . Les boules, les cubes, les demi-espaces (et leurs images bilipschitziennes) sont des domaines d'isopérimétrie. Notons également que tout domaine d'isopérimétrie est connexe par définition.

PROPOSITION 3.3. Si E est un quasiminimum pour H^{n-1} et les ouverts W_0, W_1 sont associés à E comme au paragraphe précédent, W_0 et W_1 sont des domaines d'isopérimétrie (avec une constante C_3 qui ne dépend que de n, D_0, D_1 et M).

Commençons par démontrer que W_0 est un domaine d'isopérimétrie. Comme W_0 est un ouvert borné qui contient D_0 , on va pouvoir se contenter de considérer des ouverts Ω qui contiennent D_0 .

LEMME 3.4. Pour prouver que W_0 est un domaine d'isopérimétrie, il suffit de démontrer que

$$(3.5) \quad |W_0 \setminus \Omega| \leq C H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega)^{\frac{n}{n-1}}$$

pour tout ouvert Ω tel que $D_0 \subset \Omega \subset W_0$.

Ce lemme ne devrait pas trop surprendre le lecteur. Il n'utilise rien de plus que la définition d'un domaine d'isopérimétrie et le fait que $D_0 \subset W_0 \subset D_1$. Sa démonstration n'est pas spécialement passionnante, et est faite en détails dans [DS3] (Voir le lemme 5.5); nous l'omettrons donc dans regrets.

Donnons-nous maintenant un ouvert Ω tel que $D_0 \subset \Omega \subset W_0$, et essayons de prouver (3.5). Nous noterons $Z = W_0 \setminus \Omega$ le complémentaire de Ω dans W_0 . Pour donner une idée de la démonstration, commençons par le cas particulier très simple où les ensembles Ω et Z sont bien séparés, au sens où $E_0 = \partial W_0$ est l'union essentiellement disjointe de $\partial\Omega \cap E_0$ et de $\partial Z \cap E_0$. [Voir la figure 2.]

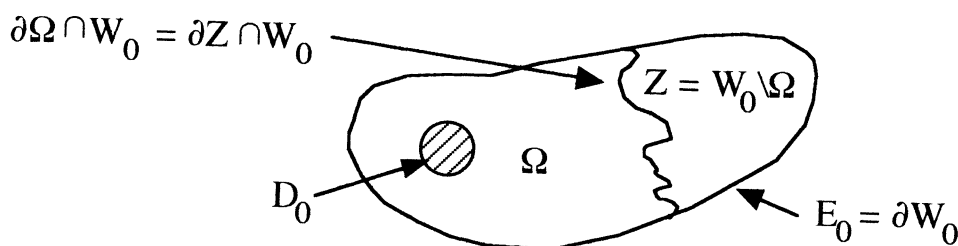


Figure 2

Posons $F = \partial\Omega$. Si $H^{n-1}(F) = +\infty$, alors $H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) = +\infty$ et il n'y a rien à démontrer. Sinon, F est dans notre classe \mathcal{F} de compétiteurs, et on peut appliquer (1.3) à F et au quasiminimum E_0 . Donc $H^{n-1}(E_0 \setminus F) \leq MH^{n-1}(F \setminus E_0)$. Or $H^{n-1}(E_0 \setminus F) = H^{n-1}(E_0 \cap \partial Z)$ grâce à notre hypothèse de séparation, et $F \setminus E_0 = \partial\Omega \cap W_0 = \partial Z \cap W_0$. Donc $H^{n-1}(\partial Z \cap E_0) \leq MH^{n-1}(\partial Z \cap W_0)$, de sorte que $H^{n-1}(\partial Z) \leq (M+1)H^{n-1}(\partial Z \cap W_0) = (M+1)H^{n-1}(\partial\Omega \cap W_0)$. Il ne reste plus qu'à appliquer à Z l'inégalité isopérimétrique (dans \mathbb{R}^n) pour obtenir (3.5).

Dans le cas général, la situation n'est pas aussi simple que celle de la figure 2. Il est tout à fait possible, par exemple, que $\partial\Omega \cap E_0 = \partial Z \cap E_0 = E_0$, parce que Ω et Z peuvent contenir de nombreuses petites bulles qui s'accumulent à la frontière. Nous devons donc commencer par remplacer Ω par un ouvert plus simple avant d'essayer d'appliquer (1.3) à $F = \partial\Omega$. Un certain contrôle de la régularité de $E_0 = \partial W_0$ nous sera utile.

Posons, pour tout $x \in E_0$ et tout $r > 0$,

$$(3.6) \quad \beta(x, r) = \inf_P \left[\sup \{ r^{-1} \text{dist}(y, P) : y \in E_0 \cap B(x, r) \} \right],$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des hyperplans affines P . Les nombres $\beta(x, r)$, qui mesurent la bonne approximation de E_0 par des plans affines, sont très utiles pour étudier les propriétés de rectifiabilité de E_0 . Nous aurons seulement besoin de l'estimation suivante :

$$(3.7) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \beta(x, r) = 0 \text{ pour } H^{n-1}\text{-presque tout } x \in E_0.$$

La propriété (3.7) est un peu plus faible que l'existence d'un plan tangent à E_0 en presque-tout point. Cette dernière propriété est également vraie parce que E_0 est rectifiable, et E_0 est rectifiable parce que c'est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$ qui satisfait à la condition B . En fait, E_0 est même "uniformément rectifiable" (une condition plus forte, mais que nous ne décrivons pas ici) parce que E_0 "contient des morceaux de graphes lipschitziens". [Voir par exemple [DS1] ou [DJ].] La démonstration la plus courte de (3.7) consiste à utiliser [DS1], qui dit que tout ensemble Ahlfors-régulier qui satisfait à la condition B vérifie un "lemme géométrique faible". [Voir la définition 1.16, le théorème 1.20 et la proposition 1.18 de [DS1]]. Le fait que le lemme géométrique faible implique (3.7) est une conséquence immédiate des définitions.

L'estimation (3.7) va nous aider à découper E_0 en deux morceaux E_+ et E_- , plus un ensemble de mesure nulle. Posons

$$(3.8) \quad E_+ = \left\{ x \in E_0 : \lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} |Z \cap B(x, r)| = 0 \right\}$$

et

$$(3.9) \quad E_- = \left\{ x \in E_0 : \lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} |\Omega \cap B(x, r)| = 0 \right\}.$$

A cause de la condition B sur W_0 , $\liminf_{r \rightarrow 0} r^{-n} |W_0 \cap B(x, r)| \geq C^{-1}$ pour tout $x \in E_0$, et donc $E_+ \cap E_- = \emptyset$.

LEMME 3.10. $H^{n-1}(E_0 \setminus (E_+ \cup E_-)) = 0$.

Pour démontrer ce lemme, nous allons avoir besoin de savoir que l'influence de la frontière $\partial\Omega \cap W_0$ au voisinage de presque-tout point $x \in E_0$ est négligeable. Plus précisément, notons μ la restriction à $\partial\Omega \cap W_0$ de la mesure de Hausdorff H^{n-1} . Vérifions que

$$(3.11) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-n} \mu(B(x, r)) = 0 \quad \text{pour } H^{n-1}\text{-presque tout } x \in E_0.$$

Commençons par noter que, puisque μ est une mesure borélienne finie telle que $\mu(E_0) = 0$, on peut trouver, pour tout $\epsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que

$$(3.12) \quad \mu(\{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(y, E_0) \leq \delta\}) < \epsilon.$$

Définissons maintenant une fonction maximale μ^* par

$$(3.13) \quad \mu^*(z) = \sup \{ r^{1-n} \mu(B(z, r)) : 0 < r < \delta \}.$$

Nous pouvons appliquer la démonstration standard du théorème maximal de Hardy et Littlewood pour montrer que

$$(3.14) \quad H^{n-1}(\{z \in E_0 : \mu^*(z) > \lambda\}) \leq \frac{C\epsilon}{\lambda}.$$

Rappelons brièvement comment on prouve (3.14). On fixe λ et on note

$$\theta_\lambda = \{z \in E_0 : \mu^*(z) > \lambda\}.$$

A chaque $z \in \theta_\lambda$ on associe une boule $B_z = B(z, r(z))$ telle que $0 < r(z) < \delta$ et $\mu(B_z) > \lambda r(z)^{n-1}$. Grâce à un lemme de recouvrement "de type Vitali" (voir les premières pages de [St]), on peut trouver une partie I de θ_λ telle que les boules $B(z, 5r(z))$, $z \in I$, recouvrent θ_λ , mais que les B_z , $z \in I$, soient disjointes. L'Ahlfors-régularité de E_0 fait le reste :

$$\begin{aligned} (3.15) \quad H^{n-1}(\theta_\lambda) &\leq \sum_{z \in I} H^{n-1}(E_0 \cap B(z, 5r(z))) \\ &\leq C \sum_{z \in I} r(z)^{n-1} \leq \frac{C}{\lambda} \sum_{z \in I} \mu(B_z) \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \mu \left(\bigcup_{z \in I} B_z \right) \leq \frac{C\epsilon}{\lambda} \end{aligned}$$

(par (3.12)).

Donc on a bien (3.14). On en déduit aussitôt que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\lambda > 0$,

$$(3.16) \quad H^{n-1} \left(\left\{ z \in E_0 : \limsup_{r \rightarrow 0} r^{1-n} \mu(B(x, r)) > \lambda \right\} \right) \leq \frac{C\epsilon}{\lambda},$$

ce dont on déduit bien (3.11) parce que le premier membre de (3.16) ne dépend pas de ϵ .

Revenons à la démonstration du lemme 3.10. Grâce à (3.7) et (3.11), il nous suffira de montrer que si $x \in E_0$ vérifie

$$(3.17) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \beta(x, r) = 0$$

et

$$(3.18) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-n} H^{n-1}(\partial\Omega \cap W_0 \cap B(x, r)) = 0$$

alors $x \in E_+ \cup E_-$.

Soit donc $x \in E_0$ tel que (3.17) et (3.18) ont lieu, et donnons nous aussi un rayon $r > 0$ assez petit.

Choisissons un hyperplan affine P_r tel que $\text{dist}(y, P_r) \leq r\beta(x, r)$ pour tout $y \in E_0 \cap B(x, r)$. Notons U_r^+ et U_r^- les deux composantes connexes de $\{y \in B(x, r) : \text{dist}(y, P_r) > r\beta(x, r)\}$ (voir la figure 3). Comme W_0 et W_1 vérifient la condition B (voir le lemme 2.28), il existe deux boules B_0 et B_1 de rayon $\frac{r}{C_1}$, et qui sont telles que $B_i \subset W_i \cap B(x, r)$ pour $i = 0, 1$. Chacune de ces boules rencontre $U_r^+ \cup U_r^-$ si $\beta(x, r)$ est assez petit ; quitte à échanger les noms de U_r^+ et U_r^- , on peut supposer que B_0 rencontre U_r^+ . Alors $U_r^+ \subset W_0$

(car \mathcal{U}_r^+ est connexe et ne rencontre pas E_0), donc B_1 ne peut rencontrer que \mathcal{U}_r^- et $\mathcal{U}_r^- \subset W_1$.

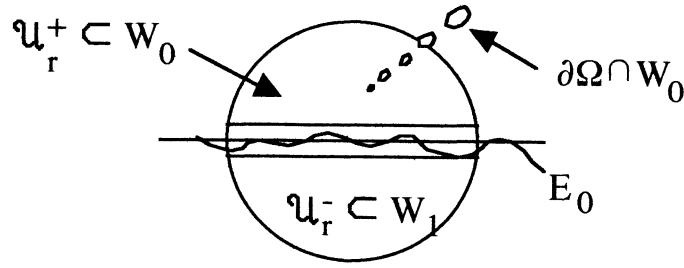


Figure 3

A cause de l'inégalité isopérimétrique dans \mathcal{U}_r^+ , on déduit de (3.18) que

$$(3.19) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \{r^{-n} \text{Min}(|\Omega \cap \mathcal{U}_r^+|, |Z \cap \mathcal{U}_r^+|)\} = 0.$$

Par ailleurs, $r^{-n} |W_0 \cap B(x, r) \setminus \mathcal{U}_r^+|$ tend vers 0 à cause de (3.17) (et du fait que W_0 ne rencontre pas \mathcal{U}_r^-), il vient

$$(3.20) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \text{Min}(d_\Omega(r), d_Z(r)) = 0,$$

où $d_\Omega(r) = r^{-n} |\Omega \cap B(x, r)|$ et $d_Z(r) = r^{-n} |Z \cap B(x, r)|$.

Les deux fonctions $d_\Omega(r)$ et $d_Z(r)$ sont des fonctions continues de r , dont la somme reste $\geq C^{-1}$ (parce que $\mathcal{U}_r^+ \subset W_0$ pour tout r), mais dont le minimum tend vers 0. Il est clair que l'une d'entre elles tend vers 0. On en déduit aussitôt que $x \in E_+$ (si $d_Z(r)$ tend vers 0) ou $x \in E_-$ (si $d_\Omega(r)$ tend vers 0). Ceci termine la démonstration du lemme 3.10.

Notons encore E_+^* l'ensemble des $x \in E_+$ où la densité de E_- est nulle, c'est-à-dire pour lesquels $\lim_{r \rightarrow 0} r^{1-n} H^{n-1}(E_- \cap B(x, r)) = 0$. Il est classique que $H^{n-1}(E_+ \setminus E_+^*) = 0$ (dans notre cas, on peut par exemple le montrer en utilisant le fait que E_0 est régulier, et le même genre de théorème maximal que ci-dessus). Donc

$$(3.21) \quad H^{n-1}(E_0 \setminus (E_+^* \cup E_-)) = 0.$$

Nous sommes maintenant prêts à modifier notre ensemble Ω pour obtenir un ensemble plus "propre". L'idée générale sera de retirer un petit bout de Ω près de E_- et de le compléter près de E_+^* , pour obtenir un nouveau domaine dont les frontières soient mieux séparées. On se donne un très petit nombre $\epsilon > 0$, qui sera autorisé à dépendre de W_0 et de Ω . Pour chaque $x \in E_+^*$, on choisit un rayon $r(x) \in]0, 1[$ tel que

$$(3.22) \quad |Z \cap B(x, r(x))| \leq \epsilon r(x)^n,$$

$$(3.23) \quad H^{n-1}(Z \cap \partial B(x, r(x))) \leq \epsilon r(x)^{n-1},$$

et

$$(3.24) \quad H^{n-1}(E_- \cap B(x, 2r(x))) \leq \epsilon r(x)^{n-1}.$$

Un tel rayon existe à cause de la définition (3.8) de E_+ , de Tchebychev, et parce que la densité de E_- en x est nulle. Par Vitali, on peut recouvrir E_+^* par des boules $B\left(x, \frac{r(x)}{2}\right)$, $x \in I_1 \subset E_+^*$, où I_1 est tel que les boules $B\left(x, \frac{r(x)}{10}\right)$, $x \in I_1$, soient disjointes. [Voir par exemple les premières pages de [St].] Choisissons une partie finie I de I_1 telle que

$$(3.25) \quad H^{n-1}\left(E_+^* \setminus \bigcup_{x \in I} B\left(x, \frac{r(x)}{2}\right)\right) < \epsilon.$$

Notons maintenant $E_-^* = E_- \setminus \bigcup_{x \in I} B(x, 2r(x))$. Pour chaque $y \in E_-^*$, choisissons un rayon $r(y) > 0$ tel que

$$(3.26) \quad r(y) < \frac{1}{10} \inf_{x \in I} r(x),$$

$$(3.27) \quad r(y) < \text{dist}(y, D_0),$$

et

$$(3.28) \quad H^{n-1}(\Omega \cap \partial B(y, r(y))) < \epsilon r(y)^{n-1}.$$

[La seconde condition est facile à obtenir, car $y \notin \partial D_0$ quand $y \in E_-$; La dernière condition est aussi réalisable aisément par Tchebychev et la définition (3.9) de E_- .]

Recouvrons maintenant E_-^* par des boules $B\left(y, \frac{r(y)}{2}\right)$, $y \in J_1$, avec la propriété que les $B\left(y, \frac{r(y)}{10}\right)$, $y \in J_1$, sont disjointes. Choisissons une partie finie J de J_1 telle que

$$(3.29) \quad H^{n-1}\left(E_-^* \setminus \bigcup_{y \in J} B\left(y, \frac{r(y)}{2}\right)\right) < \epsilon,$$

puis posons $A_1 = \bigcup_{x \in I} B(x, r(x))$ et $A_2 = \bigcup_{y \in J} B(y, r(y))$. Notons au passage que $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$ grâce à notre précaution (3.26) et à la définition de E_-^* . Posons enfin

$$(3.30) \quad V = [\Omega \cup (W_0 \cap A_1)] \setminus A_2.$$

Il est clair que $V \subset D_1$; on a aussi $D_0 \subset V$ à cause de (3.27). Donc $\partial V \in \mathcal{F}$ et on pourra lui appliquer (1.3). En attendant, commençons à estimer $|W_0 \setminus \Omega|$. Notons que $W_0 \setminus \Omega = Z = (Z \cap V) \cup (Z \setminus V) = (V \setminus \Omega) \cup (Z \setminus V) \subset (Z \cap A_1) \cup (W_0 \setminus V)$. Or

$$|Z \cap A_1| \leq \sum_{x \in I} |Z \cap B(x, r(x))| \leq \epsilon \sum_{x \in I} r(x)^n$$

par (3.22), et

$$\sum_{x \in I} r(x)^n \leq C \sum_{x \in I} |B(x, \frac{r(x)}{10})| \leq C |\bigcup_{x \in I} B(x, \frac{r(x)}{10})| \leq C(1 + |D_1|)$$

parce que les boules $B(x, \frac{r(x)}{10})$, $x \in I$, sont disjointes. Par conséquent,

$$(3.31) \quad |W_0 \setminus \Omega| \leq |W_0 \setminus V| + C\epsilon.$$

L'inégalité isopérimétrique (usuelle) nous dit que

$$(3.32) \quad |W_0 \setminus V| \leq C H^{n-1} (\partial(W_0 \setminus V))^{\frac{n}{n-1}},$$

de sorte que nous devons maintenant chercher à contrôler $\partial(W_0 \setminus V)$. Commençons par la frontière intérieure $\partial_i = W_0 \cap \partial(W_0 \setminus V)$. Notons que $\partial_i = W_0 \cap \partial V$. Si $z \in \partial_i \setminus \partial\Omega$, alors z doit être sur l'une des sphères $\partial B(x, r(x))$ ou $\partial B(y, r(y))$. Dans le premier cas, z doit être dans Z parce qu'autrement tout un voisinage de z serait dans V . [On utilise ici le fait que $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$, de sorte que z est loin de A_2]. Dans le second cas, z ne peut pas être dans l'intérieur de Z , parce que si c'était le cas tout un voisinage de z serait disjoint de $\Omega \cup (W_0 \cap A_1)$ (toujours parce que $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$). Comme z n'est pas dans $\partial\Omega$ par hypothèse, il doit être dans Ω . En rassemblant nos deux cas, on trouve que

$$(3.33) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial_i) &\leq H^{n-1}(\partial_i \cap \partial\Omega) + H^{n-1}(\partial_i \setminus \partial\Omega) \\ &\leq H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) + \sum_{x \in I} H^{n-1}(Z \cap \partial B(x, r(x))) \\ &\quad + \sum_{y \in J} H^{n-1}(\Omega \cap \partial B(y, r(y))) \\ &\leq H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) + \epsilon \sum_{x \in I} r(x)^{n-1} + \epsilon \sum_{y \in J} r(y)^{n-1} \\ &\leq H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) + C\epsilon H^{n-1}(E_0) \end{aligned}$$

grâce à (3.23), (3.28), le fait que les boules $B(x, \frac{r(x)}{10})$ et les boules $B(y, \frac{r(y)}{10})$ sont disjointes, et l'Ahlfors-régularité de E_0 .

Il reste la partie extérieure $\partial_e = E_0 \cap \partial(W_0 \setminus V)$ de la frontière de $W_0 \setminus V$. Comme V contient $W_0 \cap B(x, r(x))$ pour tout $x \in I$, ∂_e ne rencontre aucune des boules $B(x, \frac{r(x)}{2})$, $x \in I$. Donc

$$(3.34) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial_e) &= H^{n-1}(\partial_e \cap E_+^*) + H^{n-1}(\partial_e \cap E_-) \\ &\leq \epsilon + H^{n-1}(E_-) \end{aligned}$$

à cause de (3.21) et (3.25).

Il nous faut encore contrôler E_- . Commençons par $\partial V \cap E_-$. Comme V ne rencontre pas A_2 , ∂V ne peut rencontrer aucune des boules $B\left(y, \frac{r(y)}{2}\right)$, $y \in J$. Donc

$$(3.35) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial V \cap E_-) &\leq H^{n-1}(E_- \setminus E_-^*) + H^{n-1}\left(E_-^* \setminus \bigcup_{y \in J} B\left(y, \frac{r(y)}{2}\right)\right) \\ &\leq H^{n-1}(E_- \setminus E_-^*) + \epsilon \end{aligned}$$

à cause de (3.29). Comme par définition $E_- \setminus E_-^* \subset \bigcup_{x \in I} B(x, 2r(x))$, on obtient

$$(3.36) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(E_- \setminus E_-^*) &\leq \sum_{x \in I} H^{n-1}(E_- \cap B(x, 2r(x))) \\ &\leq \epsilon \sum_{x \in I} r(x)^{n-1} \leq C \epsilon \end{aligned}$$

à cause de (3.24), du fait que les boules $B\left(x, \frac{r(x)}{2}\right)$ sont disjointes, et de l'Ahlfors-régularité de E_0 . Alors

$$(3.37) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(E_-) &= H^{n-1}(E_- \setminus \partial V) + H^{n-1}(\partial V \cap E_-) \\ &\leq H^{n-1}(E_0 \setminus \partial V) + H^{n-1}(E_- \setminus E_-^*) + \epsilon \\ &\leq H^{n-1}(E_0 \setminus \partial V) + C \epsilon \end{aligned}$$

par (3.35) et (3.36). En fin de compte,

$$(3.38) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial(W_0 \setminus V)) &= H^{n-1}(\partial_i) + H^{n-1}(\partial_e) \\ &\leq H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) + C \epsilon + H^{n-1}(\partial_e) \\ &\leq H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) + H^{n-1}(E_-) + C \epsilon \\ &\leq H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) + H^{n-1}(E_0 \setminus \partial V) + C \epsilon \end{aligned}$$

par (3.33), (3.34) et (3.37).

Il est temps d'utiliser (1.3) avec $F = \partial V$. On obtient

$$(3.39) \quad H^{n-1}(E_0 \setminus \partial V) \leq M H^{n-1}(\partial V \setminus E_0).$$

Or $\partial V \setminus E_0 = \partial V \cap W_0 = \partial_i$. On peut donc remettre (3.39) et (3.33) dans (3.38), et on trouve que

$$(3.40) \quad H^{n-1}(\partial(W_0 \setminus V)) \leq C H^{n-1}(W_0 \cap \partial\Omega) + C \epsilon.$$

Il ne nous reste plus qu'à combiner (3.31), (3.32) et (3.40), et à faire tendre ϵ vers 0, pour obtenir le résultat désiré, à savoir (3.5).

Ceci termine notre démonstration de la propriété d'isopérimétrie pour l'ouvert W_0 . Il nous faudrait encore, pour finir la preuve de la proposition 3.3, vérifier que W_1 est

également un domaine d'isopérimétrie. Le lecteur ne sera pas surpris d'apprendre que la vérification est pratiquement identique à ce qui vient d'être fait pour W_0 , et sera sans doute soulagé de voir que nous omettons cette vérification. Un moyen d'éviter de se poser la question des domaines non bornés (mais contenant le complémentaire de \bar{D}_1) est d'observer que le théorème 1.4 est équivalent à un problème semblable formulé sur la sphère S^n (au lieu de \mathbb{R}^n).

4. Isopérimétrie, régularité, condition B et domaines de John

Nous savons maintenant que W_0 et W_1 sont des domaines d'isopérimétrie ; il ne nous reste plus qu'à montrer que ce sont des domaines de John. Il se trouve que c'est une conséquence des résultats que nous avons déjà démontrés et du théorème suivant.

THEOREME 4.1. *Soit W un domaine borné qui contient la boule unité. Si W est un domaine d'isopérimétrie, satisfait à la condition B, et a une frontière ∂W qui est Ahlfors-régulière de dimension $n - 1$, alors W est un domaine de John (centré en 0).*

Voir les définitions 3.1, 2.27, 1.9 et 1.12 pour le vocabulaire.

La démonstration de ce théorème est donnée dans [DS3]. Comme elle est relativement longue et assez indépendante des techniques et motivations de ce papier, nous l'omettons et nous contentons de quelques remarques.

Bien entendu, la constante de John du domaine W dans le théorème peut être majorée en fonction de n , du diamètre de W , et des constantes de condition B pour W et d'Ahlfors-régularité pour ∂W .

L'analogie du théorème 4.1 pour les domaines non bornés, mais qui contiennent le complémentaire d'une boule, est vrai aussi (et la démonstration est la même). On en déduit le théorème 1.4.

Le théorème 1.4 a une réciproque : si W est un domaine de John borné dans \mathbb{R}^n , alors W est un domaine d'isopérimétrie. Voir [Bo] ou [HK]. Dans le cas où de plus ∂W est Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$, on a également que toute fonction à variation bornée sur W a une extension à \mathbb{R}^n tout entier qui est à variation bornée [DS3].

On trouvera quelques commentaires supplémentaires sur le théorème 4.1 (par exemple, sur la nécessité des hypothèses) dans [DS4] et les démonstrations dans [DS3].

Bibliographie

- [Bo] B. BOJARSKI : Remarks on Sobolev imbedding inequalities. Proceedings, *Complex analysis in Joensuu 1987*, 52-68, L.N. in Math. 1351 (1988), Springer-Verlag.
- [DJ] G. DAVID and D. JERISON : Lipschitz approximations to hypersurfaces, harmonic measure, and singular integrals. *Indiana Univ. Math. J.* 39 (1990), 831-845.
- [DS1] G. DAVID and S. SEMMES : Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.* 337 (1993), 855-889.

- [DS2] G. DAVID and S. SEMMES : *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*. A.M.S. Series of Mathematical Surveys and Monographs, 38 (1993).
- [DS3] G. DAVID and S. SEMMES : Quasiminimal surfaces of codimension 1 and John domains. Preprint IHES, 1996.
- [DS4] G. DAVID et S. SEMMES : Surfaces quasiminimales de codimension 1 et domaines de John. Exposé au Sémin. E.D.P. de l'École Polytechnique, Février 1996.
- [HK] P. HAJLASZ and P. KOSKELA : Isoperimetric inequalities and embedding theorems in irregular domains. *J. London Math. Soc.*, à paraître.
- [Ma] P. MATTILA : *Geometry of sets and measures in Euclidean space*. Cambridge Univ. Press 1995.
- [Se] S. SEMMES : A criterion for the boundedness of singular integrals on hypersurfaces. *Trans. A.M.S.* 311 (1989), 501-513.
- [St] E. M. STEIN : *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Univ. Press, 1970.

Guy DAVID
 Université de Paris-Sud
 CNRS - URA 757
 Analyse Harmonique
 Mathématiques - Bâtiment 425
 91405 ORSAY Cedex (France)

et

Stephen SEMMES
 Mathematics
 Rice University
 P.O. Box 1892
 Houston, Texas 77005 (USA)