JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

THIERRY HARGÉ

Diffraction pour l'équation de la chaleur

Journées Équations aux dérivées partielles (1993), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1993____A2_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIFFRACTION POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR

T. HARGÉ

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

PÔLE SCIENCES ET TECHNIQUES

8, LE CAMPUS

95033 CERGY-PONTOISE

I. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ euclidien à bord C^∞. On note $\vec{n}$ la normale orientée vers l'intérieur de Ω. Soient y_0 et x_0 deux points de Ω. Soit d la fonction distance de la variété à bord $\overline{\Omega}$. Soit $d_0 = d(y_0, x_0)$. On suppose que :

H.1 : Il existe une unique géodésique minimisante γ_0 reliant y_0 et x_0.

H.2 : Il existe $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ éléments de $]0, d_0[$, $\bar{s}_1 < \bar{s}_2$, tel que $\gamma_0|_{[0,\bar{s}_1[\cup]\bar{s}_2,d_0]} \in \Omega$, $\gamma_0|_{[\bar{s}_1,\bar{s}_2]} \in \partial\Omega$ (γ_0 est paramétrée par longueur d'arc).

Pour $s \in [\bar{s}_1, \bar{s}_2]$, $\dfrac{d^2\gamma_0}{ds^2} = \dfrac{1}{\rho(s)}\vec{n}_{\gamma_0(s)}$, avec $\rho(s) > 0$ (rayon de courbure géodésique).

H.3 : y_0 et x_0 ne sont pas conjugués : tout champ de Jacobi défini le long de γ_0, nul en y_0 et x_0 est identiquement nul.

La définition d'un champ de Jacobi est donnée dans IV.

Soit $p_t(x, y)$ le noyau de la chaleur sur Ω avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$:

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) p_t = 0 \\ p_t|_{\partial\Omega_x} = 0 \\ p_{t=0} = \delta_{x=y} \ . \end{cases}$$

Alors :

Théorème 1.1. *Soit $-w_0$ le premier zéro de la fonction d'Airy. Il existe $t_0 > 0$, $C \in \mathbb{R}$, tel que :*

$$t \in]0, t_0[\Rightarrow p_t(x_0, y_0) \leq \exp\left[-\frac{d_0^2}{4t} - w_0 \frac{d_0^{1/3}}{(4t)^{1/3}} \int_{\gamma_0 \cap \partial\Omega} \frac{ds}{\rho(s)^{2/3}} + C \log t\right].$$

Le problème de la diffraction par un obstacle a été étudié par de nombreux auteurs, le cadre géométrique le plus usuel étant celui où Ω est le complémentaire d'un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Le comportement en temps petit du noyau de la chaleur pour une condition limite de Neumann a été étudié de manière heuristique par BUSLAEV (cf. [**Bu**]) puis à l'aide de méthodes probabilistes.

Ainsi, IKEDA et KUSUOKA (cf. [**IK**]) prouvent l'estimation suivante pour des points x_0, y_0 de Ω, sous une hypothèse de non dégénérescence du hessien de la fonctionnelle énergie d'un chemin :

$$\operatorname{Log} p_t^{\text{Neum}}(x_0, y_0) = -\frac{d_0^2}{4t} - \widetilde{w}_0 \frac{d_0^{1/3}}{(4t)^{1/3}} \int_{\gamma_0 \cap \partial\Omega} \frac{ds}{\rho(s)^{2/3}} + o\left(\frac{1}{t^{1/3}}\right).$$

Hsu donne un équivalent de la trace du noyau sur $\partial\Omega \times \partial\Omega$ dans le cas où $\partial\Omega$ est convexe, en supposant que x_0 et y_0 ne sont pas conjugués :

$$p_t^{\text{Neum}}(x_0, y_0) \underset{t \to 0}{\sim} C(x_0, y_0) t^{-\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right)} \exp\left(-\frac{d_0^2}{4t} - \widetilde{w}_0 \frac{d_0^{1/3}}{(4t)^{1/3}} \int_{\gamma_0 \cap \partial\Omega} \frac{ds}{\rho(s)^{2/3}}\right),$$

$C(x_0, y_0)$ étant connu de façon explicite.

Dans les deux cas, $-\widetilde{w}_0$ désigne le plus grand zéro de la dérivée de la fonction d'Airy (on a évidemment $\widetilde{w}_0 < w_0$). Dans le cas d'une condition limite de Dirichlet, LEBEAU (cf. [**Le**]) construit une paramétrixe pour l'équation des ondes qui permet d'obtenir, à l'aide de la formule de Kanaï, le développement asymptotique du noyau de la chaleur, dans une géométrie locale et en supposant que le bord est analytique. En particulier, ce travail montre que le terme en $\frac{1}{t^{1/3}}$ du théorème que l'on démontre est optimal.

Enfin, VAN DEN BERG (cf. [**vdB**]), toujours dans le cas d'une condition limite de Dirichlet, prouve :

$$\liminf_{t \to 0} t^{1/3} \left[\log p_{\text{Dir}}(x_0, y_0, t) + \frac{d_0^2}{4t}\right] \geq -3 \left[\lambda_1 \alpha^2(\gamma_0) \frac{d_0^2}{16}\right]^{1/3},$$

λ_1 étant la première valeur propre de $-\Delta_{\text{Dir}}$ sur la boule unité, $\alpha(\gamma_0) = \int_{\{s : \gamma_0(s) \in \partial\Omega\}} \left|\frac{d^2 \gamma_0}{ds^2}(s)\right| ds$, γ_0 étant une géodésique minimale reliant y_0 et x_0, les seules hypothèses géométriques sur Ω, x_0, y_0 étant $\partial\Omega$ C^2 et $d_0 > |x_0 - y_0|$ (en particulier, on ne suppose pas H.1, 2, 3).

Faisons quelques remarques sur notre théorème.

On peut choisir une géométrie où il y a plusieurs obstacles (convexes ou non), quitte à alourdir les hypothèses H.2 et H.3, ceci de façon automatique.

La méthode que l'on propose s'adapte au cas où l'on remplace $\bar{\Omega}$ par une variété C^∞ à bord complète. En effet, tout le travail géométrique est fait dans ce cadre (cf. IV), et l'inégalité d'énergie que l'on utilise existe dans le cas riemannien (en particulier, l'analyticité de la métrique ambiante n'est pas indispensable).

Il s'agit d'un problème en temps petit (ce qui permet de localiser le problème près de la géodésique minimisante). On a choisi d'étudier la géométrie du problème en décrivant la fonctionnelle énergie d'un chemin près de γ_0. Ce point de vue permet de travailler de façon naturelle dans une géométrie assez générale. Par contre, on ne s'est pas intéressé à l'uniformité de t_0 et même de C en fonction de (x_0, y_0).

De toute façon, il semble clair que la méthode d'inégalité d'énergie ne donne pas de manière directe :

1) la bonne constante C (qui ne devrait dépendre, sous H.1, 2, 3, que de la dimension de Ω), ceci même en optimisant le travail géométrique (ce qui techniquement serait beaucoup plus lourd),

2) de minoration du noyau de la chaleur (on procède par inégalités, et toujours dans le même sens).

Mais, on pourrait espérer que l'étape suivante consiste à obtenir le développement asymptotique en temps petit. En ce cas là, la méthode permettrait de comprendre la majoration du reste.

Enfin, remarquons que l'hypothèse H.3 est automatiquement vérifiée pour les géométries à courbure négative. C'est le cas, par exemple, où $\gamma_0 \cap \partial\Omega$ est formé des points selle d'un paraboloïde hyperbolique de $\mathbb{R}^3$. En fait, ce cas est plus simple que le cas convexe dans la méthode que l'on va proposer.

II. INEGALITE D'ENERGIE, INEGALITE D'AIRY

Pour obtenir l'estimation L^∞ du théorème 1.1, on va utiliser l'estimation L^2 à poids suivante :

— Soit h_0 réel positif, h élément de $]0, h_0[$.

— Soit $\Phi_h(t,x)$ définie sur $]0,2[\times\Omega$, Lipschitz, tel que Φ_h, $\nabla\Phi_h$, $\dfrac{\partial\Phi_h}{\partial t} \in L^\infty(]t_1, 2[\times\Omega)$ pour $t_1 \in]0,2[$. Φ_h sera appelée fonction poids.

— Soit $t_0 \in]0,1[$. Soit $u_h(t,x)$ une solution de $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)u = 0$, $x \in \Omega$, $t > t_0$, avec $u|_{t=t_0} \in L^2$, $u\dfrac{\partial u}{\partial n}$ intégrable sur $\partial\Omega \times]t_0, 1[$.

— Soit $v = e^{\frac{1}{h}\Phi_h}\; u(h(t-t_0)+t_0, x)$. On a le résultat suivant :

Proposition 2.1 (Inégalité d'énergie).

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\{1\}} v^2 - \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\{t_0\}} v^2 = \int_{\Omega\times]t_0,1[} \left[-h\nabla^2 v + \frac{1}{h}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla^2\Phi\Big) v^2\right] + h\int_{\partial\Omega\times]t_0,1[} e^{\frac{2}{h}\Phi}\, u\frac{\partial u}{\partial n}\,.$$

Faisons quelques remarques :

2.1. L'introduction d'un petit paramètre est indispensable. Il faut dissocier le caractère "variable d'espace" de t et son caractère asymptotique.

2.2. $\Phi = \frac{d^2}{4t}$, où d est une fonction distance, rend négatif $\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla^2\Phi$ (car $\nabla^2 d \leq 1$). Cela explique le premier terme du théorème 1.1.

3.3. Pour avoir une meilleure estimation, il faut utiliser le terme $-\nabla^2 v$. Dans le cas d'une condition limite de Dirichlet, on peut penser utiliser l'inégalité de Hardy :

$$\int \frac{v^2}{d^2(x,\partial\Omega)}\,dx \leq \mathrm{Cste}\int \nabla^2 v\,.$$

On est alors amené à résoudre :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla^2\Phi \leq \frac{\mathrm{Cste}}{d^2(x,\partial\Omega)}\,h^2\,.$$

L'étude des solutions de cette inéquation explique la présence de $\frac{1}{t^{1/3}}$ dans le théorème 1.1, mais ne permet pas de comprendre le coefficient intervenant devant $\frac{1}{t^{1/3}}$. Pour être plus précis, il faut utiliser ce qu'on appellera l'inégalité d'Airy.

Soit $-w_0$ le premier zéro de la fonction d'Airy. Soit $\widetilde{w}_0 < w_0$ assez proche de w_0 de telle manière que, pour tout $w \in]\widetilde{w}_0, w_0[$, le problème suivant ait une solution non triviale pour un $\nu > 0$:

$$\Big(\frac{d^2}{dz^2} - z\Big)A = 0;\ A(-w) = 0,\ A'(\nu - w) = 0\,.$$

Alors :

Proposition 2.2 (Inégalité d'Airy).

Pour tout $w \in]\widetilde{w}_0, w_0[$, *pour tout* $\overline{\mu} > 0$, *pour tout* f *élément de* $H^1([0,+\infty[)$ *nul en* 0, *on a :*

$$\int_0^{\overline{\mu}\nu} \frac{1}{\overline{\mu}^2}\Big(w - \frac{z}{\overline{\mu}}\Big) f^2(z)\,dz \leq \int_0^{\overline{\mu}\nu} \Big(\frac{df}{dz}\Big)^2 dz\,.$$

Cettte inégalité va être utilisée de la manière suivante :

On note $x^1 = d(x, \partial\Omega)$, x' la projection de x sur $\partial\Omega$, qui sont des variables régulières pour x près de $\gamma_0 \cap \partial\Omega$ dans $\bar{\Omega}$. On a $\nabla^2 v \geq (\frac{\partial v}{\partial x^1})^2$. On prend donc $z = x^1$.

On choisit $w_h = w_0 + h$ (alors $\nu \underset{h \to 0}{\simeq}$ Cste $|\mathrm{Log}\, h|^{2/3}$), $\bar{\mu} = h^{2/3}\mu(x')$ avec $\mu(x')$ C^∞ tel que $\frac{d_0^2}{4}\mu^3|_{\gamma_0\cap\partial\Omega} = \frac{1}{2}\rho_s$.

Enfin, on choisit des troncatures, $\varphi(\theta)$, $\psi_n(x')$ C^∞ de $\mathbb{R}$ (respectivement $\partial\Omega$) dans $[0,1]$ localisant le problème de façon convenable près de $\gamma_0 \cap \partial\Omega$.

Le théorème 1.1 sera conséquence du théorème suivant et des propositions 2.1 et 2.2.

Théorème 2.1. *Il existe* $h_0 > 0$, $\Phi(x,t,h,r,M)$ *défini pour* $x \in \bar{\Omega}$, $t \in]0,2[$, $0 < h < h_0$, $0 < r \leq h$, $M > 0$, *tel que :*

1) $\Phi(x,t)$ *est Lipschitz et* $\forall t_1 \in]0,2[$, Φ, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$, $\nabla\Phi \in L^\infty([t_1, 2[\times \Omega)$.

2) $\Phi \leq 0$ *pour* $x \in B(y_0, r)$.

3) $$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla^2\Phi \leq \frac{1}{\mu^2}\Big(w_h h^{2/3} - \frac{x^1}{\mu}\Big)\psi_h(x')\varphi\Big(\frac{x^1}{h^{2/3}\nu}\Big) - M(h^{2/3}\nu)^2,$$ *presque partout en* $(x,t) \in \Omega \times]0,2[$.

4) $\forall x \in B(x_0, r)$,
$$\Phi(x)|_{t=1} = \frac{d_0^2}{4} + w_0 d_0^{1/3} h^{2/3} \int_{\gamma_0\cap\partial\Omega} (2\rho(s))^{-2/3}\, ds + O(h\,\mathrm{Log}\, h),$$
γ_0 *étant paramétrée par la longueur d'arc,* $d_0 = d(y_0, x_0)$.

En interprétant la transformation $\Phi = \frac{d^2}{4t}$ comme un changement d'inconnue qui permet de transformer une équation parabolique en une équation elliptique, on voit que ce théorème est conséquence du lemme suivant ($\widetilde{\mu}(x'), A(x')$ étant des fonctions C^∞, $\widetilde{\mu}(x')|_{\gamma_0\cap\partial\Omega} = \frac{1}{2}\rho_s$) :

Lemme 2.1. *Soit* $d_h(x)$ *la distance sur la variété à bord* $\bar{\Omega}$, *nulle en* $x = y_0$, *associée à :*
$$g_h = \Big[1 + \Big(A(x')h^{2/3} - \frac{x^1}{\widetilde{\mu}(x')}\Big)\psi_h(x')\varphi\Big(\frac{x^1}{h^{2/3}\nu}\Big)\Big] d^2x,$$
∇_h *le gradient associé à* g_h.

Alors, *il existe* $h_0 > 0$, *tel que, si* $h \in]0, h_0[$:

0) g_h *est définie positive,* d_h *et* ∇_h *sont bien définis.*

1) d_h *est Lipschitz et* $\nabla_h^2 d_h \leq 1$ p.p , *c'est-à-dire :*
$$\nabla^2 d_h \leq 1 + \Big(A(x')h^{2/3} - \frac{x^1}{\widetilde{\mu}(x')}\Big)\psi_h(x')\varphi\Big(\frac{x^1}{h^{2/3}\nu}\Big) \quad \text{p.p.}$$

2) $d_h(x_0) = d(y_0, x_0) + \frac{1}{2} h^{2/3} \int_{\gamma_0 \cap \partial\Omega} A(\gamma_0(s))\, ds + O(h \nu^{3/2})$,

ds désignant le paramétrage par longueur d'arc sur $\gamma_0 \cap \partial\Omega$.

La preuve de ce lemme s'effectue de la manière suivante. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins de classe H^1 allant de y_0 à x_0 paramétré sur $[0,1]$. Pour $\gamma \in \mathcal{C}$, soit $\mathcal{E}_h(\gamma)$ (resp. $\mathcal{E}(\gamma)$) son énergie pour la métrique g_h (resp. g). Alors :

$$d_h(y_0, x_0) = \left[\inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \mathcal{E}_h(\gamma)\right]^{1/2}, \quad d(y_0, x_0) = \left[\inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \mathcal{E}(\gamma)\right]^{1/2}.$$

Pour obtenir le développement en h de $\inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \mathcal{E}_h(\gamma)$, il faut décrire la fonctionnelle $\mathcal{E}(\gamma)$ près de son minimum (c'est-à-dire γ_0). C'est l'objet de la partie suivante.

III. ETUDE DE LA FONCTIONNELLE ENERGIE D'UN CHEMIN

— On considère une variété riemanienne connexe, à bord, C^∞, de dimension n, $\mathcal{V}$. On note g la métrique de $\mathcal{V}$, g' et $\widetilde{g}'$ respectivement la première et la deuxième forme fondamentale (définies au dessus de $\partial\mathcal{V}$). On note $\vec{n}$ le champ des normales au dessus de $\partial\mathcal{V}$, rentrant dans $\mathcal{V}$. On note ∇ (respectivement ∇') la connexion associée à g (respectivement g'), R (respectivement R') le tenseur de courbure associé à ∇ (respectivement ∇').

Soient y_0 et x_0 deux points de $\mathrm{int}(\mathcal{V})$. On note $d_0 = d(y_0, x_0)$. Soit γ_0 un chemin reliant y_0 à x_0 paramétré par $s \in [0,1]$ à vitesse constante ($|\dot\gamma(s)| = d_0$). On suppose que :

(I) γ_0 est une géodésique minimisante reliant y_0 à x_0.

(II) Il existe $0 < s_1 < s_2 < 1$, tel que $\gamma_0(s) \in \mathrm{int}(\mathcal{V})$ si $s \in [0, s_1[\cup]s_2, 1]$, $\gamma_0(s) \in \partial\mathcal{V}$ si $s \in [s_1, s_2]$.

On suppose que $\widetilde{g}'(\dot\gamma_0(s), \dot\gamma_0(s)) > 0$ si $s \in [s_1, s_2]$. On appellera rayon de courbure géodésique (ρ_s) le réel positif tel que $\widetilde{g}'(\dot\gamma_0(s), \dot\gamma_0(s)) = \dfrac{d_0^2}{\rho_s}$.

(III) On suppose que y_0 et x_0 ne sont pas conjugués le long de γ_0 : il n'existe pas de champ de Jacobi non trivial le long de γ_0 s'annulant en 0 et 1.

On dira que $w(s)$ ($s \in [0,1]$) est un champ de Jacobi le long de γ_0 si :

— $\forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[$, $\dfrac{D^2}{ds^2} w(s) + R(\dot\gamma_0(s), w(s))\dot\gamma_0(s) = 0$

— $\forall s \in]s_1, s_2[$, $w(s) \in T_{\gamma_0(s)} \partial V$ et $\dfrac{D'^2}{ds^2} w + R'(\dot\gamma_0(s), w(s))\dot\gamma_0(s) = 0$

— w est continue en s_1 et s_2

— $p\Big(\dfrac{Dw}{ds}\Big)(s_1^-) = \dfrac{D'w}{ds}(s_1^+)$ (de même en s_2).

p désignant la projection de $T\mathcal{V}|_{\partial\mathcal{V}}$ sur $T\partial\mathcal{V}$, $\frac{D}{ds} = \nabla_{\dot{\gamma}_0(s)}$.

Enfin, si γ est chemin de $[0,1]$ dans $\mathcal{V}$, soit $\mathcal{E}(\gamma) = \displaystyle\int_0^1 g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))\,ds$.

Redressement du bord.

Soit $\mathcal{V}_0$ un voisinage ouvert de $\gamma_0[0,1]$ dans $\mathcal{V}$, assez petit, tel qu'il existe ψ difféomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $[0,+\infty[\,\times \mathbb{R}^{n-1}$, défini sur $\mathcal{V}_0$, de telle manière que, sur $\mathcal{V}_0$:

— $\partial\mathcal{V} =$ "$x^1 = 0$"

— $\mathrm{int}(\mathcal{V}) =$ "$x^1 > 0$"

— $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\partial\mathcal{V}}$ normé et orthogonal à $T\partial V$, avec $(x^1, x') \in [0,+\infty[\,\times \mathbb{R}^{n-1}$, $x' = (x^2, \ldots, x^n)$.

On prendra évidemment la liberté de passer de l'autre côté du bord.

L'espace fonctionnel "tangent" sur lequel on va travailler est le suivant :

$$H = \Big\{ w \in H^1([0,1], \mathbb{R}^n) / w(0) = w(1) = 0 \Big\}$$

$$|w|_H^2 = \int_0^1 |\dot{w}(s)|^2\, ds \ ,$$

$|\ |$ désignant la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Dans toute la suite, on travaillera dans une telle carte et il faudra donc choisir $|w|_{L^\infty}$ assez petit pour que $\psi(\gamma_0(s)) + w(s) \in \psi(\mathcal{V}_0)$ (énoncés des théorèmes compris).

On prouve que :

Théorème 3.1. *Il existe une décomposition de H topologique, $H = A \oplus B$, B étant de dimension finie, tel que, pour tout élément de H, w $(w = w_A + w_B)$:*

1) $$\mathcal{E}(\gamma_0 + w) = \mathcal{E}(\gamma_0) + \int_{s_1}^{s_2} 2\frac{d_0^2}{\rho_s} w^1(s)\,ds + q(w_A) + O(|w_B|^2) + O(|w_A|_H\ |w_B|) + O(|w|_{L^\infty}\ |w|_H^2),$$

q étant une forme quadratique continue, définie positive par rapport à $|\ |_H$.

2) *Il existe $C > 0$, tel que,*

$$\forall w \in H,\ w^1(s) \geq 0 \text{ si } s \in [s_1, s_2] \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} 2\frac{d_0^2}{\rho_s} w^1(s)\,ds \geq C\,|w_B|.$$

3) *Il existe $C > 0$, tel que $|w_B| \leq C\,|w|_{L^\infty}$.*

Théorème 3.2. *Il existe* $C > 0$, *tel que, si* w *appartient à* $H^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ *et vérifie :*

$$(\gamma_0 + w)^1(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0,1], \quad w(0) = w(1) = 0 \ .$$

Alors :

$$1) \qquad |w|_{L^\infty} \leq C \Rightarrow \mathcal{E}(\gamma_0 + w) \geq \mathcal{E}(\gamma_0) + C\,|w|^2_{H^1}$$

$$2) \qquad |w|_{L^\infty} \leq C \Rightarrow \mathcal{E}(\gamma_0 + w) \geq \mathcal{E}(\gamma_0) + \int_{s_1}^{s_2} 2\frac{d_0^2}{\rho_s} w^1(s)\,ds + O\Big(\Big[\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho_s} w^1(s)\,ds\Big]^2\Big).$$

Le théorème 3.2 est une conséquence du théorème 3.1 et permet de démontrer le lemme 2.1.

La difficulté essentielle par rapport à une situation analogue en dimension finie est que toutes les normes ne sont pas équivalentes.

La preuve du théorème 3.2 s'effectue de la manière suivante. On pose $H = F \oplus G$ ou $F = \Big\{ w \in H, \forall s \in [s_1, s_2],\, w(s) \in T_{\gamma_0(s)}\partial\mathcal{V} \Big\}$.

L'hypothèse (III) entraînera que le hessien de l'énergie restreint à F est défini positif par rapport à $|\ |_H$. On décompose alors G en un espace de basses fréquences (de dimension finie) et un espace de hautes fréquences, puis on utilise que, pour les hautes fréquences, la métrique est toujours plate.

Bibliographie

[Ag] S. AGMON : *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations,* Mathematical Notes 29, Princeton University Press.

[Bu] V.S. BUSLAEV : *Continuum integrals and the asymptotic behavior of the solutions of parabolic equations as* $t \to 0$, Applications to Diffraction, 67-86 Topics in Mathematical Physics, Vol 2, Plenum, New-York, 1968.

[Ha] T. HARGÉ : *Thèse Orsay.*

[Ha] T. HARGÉ : *Diffraction pour l'équation de la chaleur,* A paraître au Duke Math. Journal.

[Hs] P. HSU : *Short time asymptotics of the heat kernel on concave boundary,* Siam J. Math. Anal 20 (1989), 1109-1127.

[IK] IKEDA et KUSUOKA : *Short time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations,* Springer Lecture Notes in Mathematics 1322 (1988), 37-49.

[Le] G. LEBEAU : *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction,* Communication in Partial Differential Equations, 9 (15), 1437-1494 (1984).

[Mi] MILNOR : *Morse Theory,* 67-76.

[NS] J.R. NORRIS et D.W. STROOCK : *Estimate on the fundamental solution to heat flows with uniformly elliptic coefficients,* Proc. Lond. Math. Soc. 62 (1991), 375-402.

[VdB] M. VAN DEN BERG : *A Gaussian lower bound for the Dirichlet heat kernel,* Bull. Lond. Math. Soc. 24 (1992), 475-477.