JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FABRICE BÉTHUEL
JEAN-MICHEL GHIDAGLIA

Régularité des solutions de certaines équations elliptiques en dimension deux et formule de la co-aire

Journées Équations aux dérivées partielles (1993), p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1993____A1_0>

Régularité des solutions de certaines équations elliptiques en dimension deux et formule de la co-aire

Fabrice BETHUEL[(1)(2)] et Jean-Michel GHIDAGLIA[(1)]

(1) Ecole Normale Supérieure de Cachan
Centre de Mathématiques et de Leurs Applications
Unité associée au CNRS URA-1611
61 Avenue du Président Wilson
94235 CACHAN Cedex, France

(2) CERMA - ENPC
La Courtine
93167 NOISY LE GRAND Cedex, France.

Table des matières

1 Introduction

Etant donnés $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$, la formule de la co-aire de Federer et Fleming (voir par exemple [18]) sur $\mathbb{R}^2$ muni de la mesure de Lebesgue affirme que pour tout ensemble mesurable $X \subset \mathbb{R}^2$,

$$\int_X g|\nabla f|dx = \int_{\mathbb{R}} (\int_{X_\lambda} g\ ds)\ d\lambda \tag{1.1}$$

où $X_\lambda = f^{-1}(\lambda) \cap X$ et s désigne l'abscisse curviligne sur X_λ (qui est l'intersection avec X d'une réunion finie de courbes régulières pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

Notre objet ici est de donner plusieurs applications de la formule (1.1) dans le contexte des équations aux dérivées partielles. Nous rassemblons dans ce texte certains résultats de [3], [4], [5], et [6] qui font appel à cette formule.

Ainsi au chapitre 2 nous étudions l'équation linéaire sur un ouvert Ω du plan

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= g(u,v)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \text{ dans } \Omega, \\ \varphi &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

et nous montrons que la norme L^∞ de φ peut se majorer par $2|g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$. Autant le résultat que la démonstration se trouvent être utiles dans des questions liées à la régularité des solutions de problèmes non linéaires, comme celui qui fait l'objet du chapitre 4.

Au chapitre 3 nous donnons diverses généralisations et compléments aux résultats du chapitre 2, notamment nous montrons le lien de ces questions avec l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ et son dual BMO $(\mathbb{R}^2)$.

Comme nous l'avons mentionné, le chapitre 4 est l'occasion d'appliquer les résultats et les techniques des chapitres 2 et 3 au problème de l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite

$$\Delta u = 2H(u)\frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

où $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, paramètre une surface de $\mathbb{R}^3$.

Le chapitre 5 est d'une toute autre nature, son objet est de montrer comment la formule de la co-aire (1.1) permet de tirer partie de bornes L^1 sur la vorticité de solutions des équations d'Euler stationnaires incompressibles.

2 Une équation linéaire modèle

Soient u et v dans $H^1(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné et régulier dans le plan $\mathbb{R}^2$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère le problème

$$-\Delta\varphi = g(u,v)\{u,v\} \text{ dans } \Omega, \tag{2.1}$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.2}$$

où on a noté

$$\{u, v\} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}. \tag{2.3}$$

Théorème 2.1 *On suppose que $g \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est bornée. Le problème (2.1) - (2.2) possède une solution unique $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. De plus*

$$|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 2|g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.4}$$

$$|\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}|g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Remarque 2.2 L'inégalité (2.5) découle immédiatement de (2.4). Pour cela il suffit de prendre le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ des deux membres de (2.1) avec φ.

Donnons un corollaire du Théorème 2.1 :

Corollaire 2.3 *La solution $\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$ de*

$$-\Delta\varphi = \{u, v\} \textit{ dans } \Omega, \tag{2.6}$$

$$\varphi = 0 \textit{ sur } \partial\Omega, \tag{2.7}$$

appartient à $H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et ($C_0 = 2$)

$$|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_0|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.8}$$

$$|\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{C_0}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Ce résultat avait été montré par Wente [27] (voir aussi Brezis-Coron [9]) dans une version plus faible : la constante C_0 pouvait dépendre de Ω. Au paragraphe 4.1 nous donnons une application du Corollaire 2.3 qui utilise de manière essentielle que C_0 est une constante universelle.

Remarquons que (2.9) a pour conséquence une inégalité remarquable (voir Brezis-Coron [9] pour son application), voir aussi le Corollaire 3.10.

Corollaire 2.4 *Etant donnés u, v dans $H^1(\Omega; I\!R^3)$ et $w \in H_0^1(\Omega; I\!R^3)$,*

$$\int_\Omega w.\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\ dx \leqslant 2\ |\nabla w|_{L^2(\Omega)} |\nabla u|_{L^2(\Omega)} |\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Preuve du Corollaire 2.4. On note φ_i la solution de (2.1) - (2.2) pour $u = u_{i+1}$ et $v = v_{i+2}$. On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega w.\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \tfrac{\partial v}{\partial x_2}\right)\ dx &= -\Sigma_{i=1}^3 \int_\Omega w_i \Delta\varphi_i dx = \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \nabla w_i \nabla \varphi_i dx \\ &\leqslant 2\ \Sigma_{i=1}^3 |\nabla w_i|_{L^2(\Omega)} |\nabla \varphi_i|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où (2.10). ■

Démonstration du Théorème 2.1 On commence par faire une remarque sur la fonction de Green du problème de Dirichlet pour le laplacien sur Ω. On note $G(x, m)$ la solution de

$$-\ \Delta_x G(x, m) = \delta_m(x) \text{ pour } x \in \Omega, \tag{2.11}$$

$$G(x, m) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega, \tag{2.12}$$

où δ_m désigne la masse de Dirac en $m \in \Omega$. Puisque la fonction $x \mapsto G(x, m) + \frac{1}{2\pi}\log|x - m|$ est régulière sur $\bar{\Omega}$, il résulte que

$$G(., m) \text{ est régulière sauf en } x = m, \tag{2.13}$$

$$G(., m) \text{ est régulière sur ses ensembles de niveau}$$

$$W(\gamma_1, \gamma_2) = \{x \in \Omega,\ \gamma_1 \leqslant G(x, m) \leqslant \gamma_2\},\ \gamma_i \in I\!R. \tag{2.14}$$

De plus $G(., m)$ est positive dans $\Omega \backslash \{m\}$ (une conséquence du principe du maximum).

La fonction $\nabla_x G(., m)$ n'appartient pas à $L^2(\Omega)$ (puisque $\delta_m \notin H^{-1}(\Omega)$) mais $\nabla_x G(., m) \in L^2_{loc}(\bar{\Omega} \backslash \{m\})$ et on a l'identité remarquable suivante ([8], p.241).

Proposition 2.5 *Avec les notations qui précèdent, pour tout γ_1 et γ_2 avec $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 < \infty$,*

$$\int_{W(\gamma_1, \gamma_2)} |\nabla_x G(x, m)|^2\ dx = \gamma_2 - \gamma_1. \tag{2.15}$$

Preuve. Il est clair qu'il suffit de montrer (2.15) pour presque tout γ_i. D'après le lemme de Sard, pour presque tout γ_i, l'ensemble $W(\gamma_1,\gamma_2)$ est régulier et (on omet le paramètre m)

$$\int_{W(\gamma_1,\gamma_2)} |\nabla G|^2\, dx = -\int_{W(\gamma_1,\gamma_2)} (G-\gamma_1)\, \Delta G\, dx + \int_{\partial W(\gamma_1,\gamma_2)} (G-\gamma_1)\frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Puisque $m \notin W(\gamma_1,\gamma_2)$, $\Delta G = 0$ sur $W(\gamma_1,\gamma_2)$ et donc

$$\int_{W(\gamma_1,\gamma_2)} |\nabla G|^2\, dx = (\gamma_2-\gamma_1)\int_{V(\gamma_2)} \frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma \tag{2.16}$$

où

$$V(\gamma) = \{x \in \Omega; G(x,m) = \gamma\}. \tag{2.17}$$

D'autre part

$$1 = \int_{G(x)\geqslant\gamma_2} -\Delta\, G\, dx = \int_{V(\gamma_2)} \frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

et donc (2.16) conduit à (2.15). ∎

La solution de (2.1) - (2.2) est donnée par la formule (voir la Remarque 2.7) :

$$\varphi(m) = \int_\Omega g(u,v)\{u,v\}G(.,m)\, dx, \tag{2.18}$$

et nous voulons borner $\varphi(m)$. La première idée consiste à décomposer Ω suivant les ensembles de niveau de $G(.,m)$. Pour celà donnons nous $\gamma > 0$ et $\gamma_n \in]n\gamma,(n+1)\gamma[$ (γ est arbitraire et γ_n sera choisi par un argument du type formule de la moyenne, voir (2.21) ci-dessous). On remarque que

$$\Omega\backslash\{m\} = \cup_{n=-1}^{\infty}\tilde W_n,\ \tilde W_n = W(\gamma_n,\gamma_{n+1}),\ \gamma_{-1} = 0,$$

de sorte que (2.18) s'écrive

$$\varphi(m) = \sum_{n=-1}^{\infty}\int_{\tilde W_n} g(u,v)\{u,v\}\, G(.,m)\, dx. \tag{2.19}$$

Choix de γ_n. Appliquons la formule de la co-aire (1.1) avec $g = (|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{1/2}$, $f = G(.,m)$ et $X = W(\gamma n,\gamma(n+1))$:

$$\int_{\gamma n}^{\gamma(n+1)}\int_{V(\lambda)} (|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{1/2}\, ds\, d\lambda = \int_{W(\gamma n,\gamma(n+1))} (|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{1/2}|\nabla G|\, dx \tag{2.20}$$

D'après la formule de la moyenne, $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\gamma_n \in]\gamma n,\gamma(n+1)[$ tel que $V(\gamma_n)$ soit un ensemble régulier et

$$\int_{V(\gamma_n)} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)^{1/2} \, ds \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\gamma} \int_{W_n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)^{1/2} |\nabla G| \, dx, \tag{2.21}$$

où $W_n = W(\gamma n, \gamma(n+1))$.

Revenons alors à (2.19) avec ce choix de γ_n et notons que sur $\tilde{W}_n, G(.,m)$ est de l'ordre de $\bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_n + \gamma_{n+1}}{2}$. Ceci nous conduit à récrire (2.19) :

$$\varphi(m) = I_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} J_n + \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\gamma}_n K_n) \tag{2.22}$$

où

$$I_{-1} = \int_{\tilde{W}_{-1}} g(u,v)\{u,v\} G(.,m) \, dx, \tag{2.23}$$

$$J_n = \int_{\tilde{W}_n} g(u,v)\{u,v\}(G(.,m) - \bar{\gamma}_n) \, dx, \tag{2.24}$$

$$K_n = \int_{\tilde{W}_n} g(u,v)\{u,v\} \, dx. \tag{2.25}$$

L'estimation de I_{-1} est immédiate puisque $0 \leqslant G(.,m) \leqslant \gamma$ sur $\tilde{W}_1$:

$$|I_{-1}| \leqslant \gamma |g|_{L^\infty(R^2)} \int_{\tilde{W}_{-1}} |\nabla u||\nabla v| \, dx. \tag{2.26}$$

Dans le même esprit, puisque sur $\tilde{W}_n, |G(.,m) - \bar{\gamma}_n| \leqslant \frac{\gamma}{2}$,

$$|J_n| \leqslant \gamma |g|_{L^\infty(R^2)} \int_{\tilde{W}_n} |\nabla u||\nabla v| \, dx, \; n \geqslant 0. \tag{2.27}$$

Ainsi

$$|I_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} J_n| \leqslant \gamma |g|_{L^\infty(R^2)} \int_{\Omega} |\nabla u||\nabla v| \, dx \tag{2.28}$$

disparaitra dans l'estimation finale à la limite $\gamma \to 0$.

Le coeur du problème revient donc à estimer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}_n K_n. \tag{2.29}$$

La difficulté provient du fait que $\bar{\gamma}_n \to \infty$ avec n mais en fait nous allons voir que (2.29) est une somme téléscopique, celà provient du fait que $g(u,v)\{u,v\}$ a une structure particulière.

Notons

$$w(x) = \int_0^{u(x)} g(s, v(x))\, ds, \tag{2.30}$$

un calcul montre alors que

$$g(u,v)\{u,v\} = \{w,v\}. \tag{2.31}$$

Remarque 2.6 La norme de w dans $H^1(\Omega)$ ne peut être estimée en fonction de celle de u et v dans $H^1(\Omega)$.

Grâce à (2.31), K_n s'écrit

$$K_n = \int_{\tilde{W}_n} \{w,v\}\, dx. \tag{2.32}$$

Mais $\{w,v\} = \frac{\partial}{\partial x_1}(w\frac{\partial v}{\partial x_2}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(w\frac{\partial v}{\partial x_1})$ et donc

$$\int_{\tilde{W}_n} \{w,v\}\, dx = \int_{\partial\tilde{W}_n} w\, \frac{\partial v}{\partial s}\, ds$$

où l'absisse curviligne s sur $\partial\tilde{W}_n$ est choisie de sorte que la normale ν du repère de Frenet sur $\partial\tilde{W}_n$ soit extérieure à $\tilde{W}_n$. Si par contre on oriente s sur $V(\gamma)$ de sorte que $\frac{\partial G}{\partial \nu} \geqslant 0$ on a

$$K_n = \int_{V(\gamma_n)} w\frac{\partial v}{\partial s}\, ds - \int_{V(\gamma_{n+1})} w\frac{\partial v}{\partial s}\, ds \tag{2.33}$$

et (2.29) s'écrit

$$K \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}_n K_n = \bar{\gamma}_0 \int_{V(\gamma_0)} w\frac{\partial v}{\partial s}\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}_{n-1}) \int_{V(\gamma_n)} w\frac{\partial v}{\partial s}\, ds. \tag{2.34}$$

Nous avons $\bar{\gamma}_0 \leqslant \gamma$ et $\bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}_{n-1} \leqslant \gamma$ de sorte que

$$|K| \leqslant \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{V(\gamma_n)} w\frac{\partial v}{\partial s}\, ds \right|. \tag{2.35}$$

Fixons n et décomposons $V(\gamma_n)$ en composantes connexes ω_i, $i = 1, ..., k$. On observe que

$$\int_{\omega_i} w\, \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = \int_{\omega_i} \left(\int_{\lambda}^{u(s)} g(\sigma, v(\sigma))\, d\sigma \right) \frac{\partial v}{\partial s}\, ds,\ \forall \lambda \in I\!R,$$

et donc

$$\left|\int_{\omega_i} w\ \frac{\partial v}{\partial s}\ ds\right| \leqslant |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\omega_i} |u(s)-\lambda| \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|\ ds,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prenons $\lambda = \frac{1}{|\omega_i|}\int_{\omega_i} u(s)ds$, il vient après sommation sur i

$$\left|\int_{V(\gamma_n)} w\frac{\partial v}{\partial s}\ ds\right| \leqslant |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{V(\gamma_n)} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| ds \int_{V(\gamma_n)} \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|\ ds. \tag{2.36}$$

Par le choix de γ_n (voir (2.21)), il vient

$$\left|\int_{V(\gamma_n)} w\frac{\partial v}{\partial s}\ ds\right| \leqslant |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \frac{(1+\varepsilon)^2}{\gamma^2} \int_{W_n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)^{1/2}|\nabla G|\ dx, \tag{2.37}$$

et donc

$$\left|\int_{V(\gamma_n)} w\frac{\partial v}{\partial s}\ ds\right| \leqslant |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \frac{(1+\varepsilon)^2}{\gamma} \int_{W_n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\ dx$$

par l'identité $\int_{W_n} |\nabla G|^2 dx = (n+1)\gamma - n\gamma = \gamma$.

Ainsi en revenant à (2.35) :

$$|K| \leqslant (1+\varepsilon)^2 |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx. \tag{2.38}$$

Ainsi en rassemblant (2.22), (2.28) et (2.38) :

$$|\varphi(m)| \leqslant |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} (\gamma \int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|) dx + (1+\varepsilon) \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx), \tag{2.39}$$

et en faisant $\gamma \to 0, \varepsilon \to 0$:

$$|\varphi(m)| \leqslant |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx. \tag{2.40}$$

On remarque alors que si (u,v) est changé en $(\mu u, \mu^{-1} v)$, $\mu > 0$, φ est inchangé de sorte que

$$|\varphi(m)| \leqslant |g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} (\mu^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \mu^{-2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx)$$

et (2.4) est obtenu en prenant le μ optimal. ■

Remarque 2.7 Dans la preuve qui précède, nous avons implicitement supposé que les fonctions u, v et g étaient suffisament régulières. Pour montrer (2.4), on procède par régularisation : $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ et g^ε approchent u, v et g ce qui produit φ_ε régulier et vérifiant (2.24) puis on passe à la limite $\varepsilon \to 0$ et $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ par l'unicité de solution pour (2.1) - (2.2) dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ (par exemple). Le fait que φ soit continu sur Ω est bien plus délicat puisque la convergence de φ_ε vers φ n'est pas uniforme sur $\bar{\Omega}$. Nous renvoyons au paragraphe 3, Corollaire 3.6 pour ce point. Toutefois lorsque $g \equiv 1$, un des cas que l'on rencontre naturellement dans les applications, on peut donner une démonstration très simple car

$$-\Delta(\varphi_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon'}) = \{u_\varepsilon - u_{\varepsilon'},\ v_\varepsilon\} + \{u_{\varepsilon'}, v_\varepsilon - v_{\varepsilon'}\}$$

et alors par (2.4),

$$|\varphi_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon'}|(x) \leqslant 2[|\nabla(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'})|_{L^2(\Omega)}|\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\nabla u'_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}|\nabla(v_\varepsilon - v_{\varepsilon'})|_{L^2(\Omega)}],$$

ce qui montre que φ_ε est une suite de Cauchy dans $C^0(\bar{\Omega})$ et permet d'affirmer que $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$.

3 Généralisations et liens avec l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$

3.1 Quelques rappels

Rappelons que l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ est

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ f^* \in L^1(\mathbb{R}^N)\} \tag{3.1}$$

où

$$f^*(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)dy \right| \tag{3.2}$$

et $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \rho \geqslant 0,\ \rho \not\equiv 0$ (Fefferman et Stein [17] ont montré que cet espace ne dépend pas du choix de ρ). On peut caractériser $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ par le fait que $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et que $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^N), j = 1, ..., N$ où les R_j sont les transformées de Riesz de symbole $\xi_j/|\xi|$ en variables de Fourier ξ.

Le dual de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ a été identifié par Fefferman [16] comme étant l'espace BMO $(\mathbb{R}^N)$ de John et Nirenberg. Rappelons que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ appartient à $BMO(\mathbb{R}^N)$ s'il existe une constante C telle que pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^N$, il existe une constante $\gamma = \gamma(B, f)$ telle que

$$\int_B |f(x) - \gamma|^2\, dx \leqslant C|B|. \tag{3.3}$$

La meilleure constante C dans (3.3) est noté $||f||^2_{BMO}$ ce qui définit une norme sur $BMO(\mathbb{R}^N)$ quotienté par les fonctions constantes.

Ces espaces interviennent de manière naturelle lorsque $N = 2$ en liaison avec l'opérateur de Laplace en partie en raison des deux observations qui suivent.

Proposition 3.1 *La solution élémentaire du Laplacien dans* $\mathbb{R}^2$: $-\frac{1}{2\pi}\log|x|$ *appartient à* $BMO(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 3.2 *L'espace de H^1 homogène :*

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^2) = \{v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2),\ \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

s'injecte continuement dans $BMO(\mathbb{R}^2)$.

La Proposition 3.1 est le résultat d'un calcul élémentaire, alors que la Proposition 3.2 est "évidente" en utilisant une décomposition en ondelettes (Meyer [23]). Toutefois on peut donner une preuve directe de la Proposition 3.2. En effet prenons $B = B(x,r)$, $r > 0$ et $\gamma = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy$. Soit (à x et r fixés) $g(\omega) = f(x + r\omega)$ et $m(g) = \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)} g(\omega)d\omega$. D'après l'inégalité de Poincaré sur $B(0,1)$, il existe une constante C_p telle que pour tout $h \in H^1(B(0,1))$, $\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)} |h(\omega) - m(h)|^2 d\omega \leqslant C_p \int_{B(0,1)} |\nabla h(\omega)|^2 d\omega$ et donc en prenant $h = g$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - \gamma|^2 dy &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)} |g(\omega) - m(g)|^2 d\omega\\ \leqslant C_p \int_{B(0,1)} |\nabla g(\omega)|^2 d\omega &= C_p \int_{B(x,r)} |\nabla f|^2 dx,\end{aligned}$$

d'où

$$||f||^2_{BMO(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_p \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f|^2 dx. \tag{3.4}$$

3.2 Une autre démonstration du Théorème 2.1 lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$

Soient u et v dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ et $g \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sous réserve de donner un sens à la convolution de $g(u,v)\{u,v\}$ avec le noyau $-\frac{1}{2\pi}\log|x-y|$, on dispose d'une solution φ de

$$-\Delta\varphi = g(u,v)\{u,v\} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \tag{3.5}$$

en prenant

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g(u(y),v(y))\{u(y),v(y)\}\log|x-y|dy. \tag{3.6}$$

Afin de donner un sens à (3.6), nous montrons l'estimation suivante.

Théorème 3.3 *Soient u et v dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ et $g \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. La fonction $g(u,v)\{u,v\}$ appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ et*

$$|g(u,v)\{u,v\}|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant C|g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.7}$$

Avant de montrer ce résultat, remarquons qu'il entraine que φ définie en (3.6) appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ grâce à la Proposition 3.1 et à la dualité $\mathcal{H}^1 - BMO$ (voir la Proposition 3.5 plus loin).

Preuve du Théorème 3.3. Puisque $f(x) = g(u(x), v(x))\{u(x), v(x)\}$ est dans $L^1(I\!R^2)$, il reste à montrer que $f^* \in L^1(I\!R^2)$. Prenons ρ tel que $\int_{I\!R^2} \rho = 1$ et supp $\rho \subset B(0,1)$ puis notons

$$w(y) = \int_\lambda^{u(y)} g(s, v(y))ds, \; \lambda = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x,r)} u(z)dz. \tag{3.8}$$

Nous avons $f = \{w, v\}$ et donc

$$\frac{1}{r^2}\int_{I\!R^2} f(y)\rho\left(\frac{x-y}{r}\right)dy = \frac{1}{r^3}\int_{B(x,r)}\left(R_1\frac{\partial v}{\partial x_2} - R_2\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) w\, dy$$

où
$R_i(y) = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{r}\right)$. D'après (3.8), $|w(y)| \leqslant |g|_{L^\infty}|u(y) - \lambda|$ et donc

$$\left|\frac{1}{r^2}\int_{I\!R^2} f(y)\rho\left(\frac{x-y}{r}\right)dy\right| \leqslant \frac{C|g|_{L^\infty}}{r^3}\int_{B(x,r)} |u(y) - \lambda||\nabla v|dy. \tag{3.9}$$

Puis nous continuons comme dans Coifman *et al* [12]. Le membre de droite de (3.9) est borné en utilisant par exemple :

$$\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)}\left|\frac{u(y)-\lambda}{r}\right||\nabla v(y)|dy \leqslant \left(\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)}\left|\frac{u(y)-\lambda}{r}\right|^3 dy\right)^{1/3}\left(\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)}|\nabla v(y)|^{3/2}dy\right)^{2/3}$$

$$\text{(par l'inégalité de Sobolev, rappelons que } \lambda = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x,r)} u(y)dy)$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)}|\nabla u|^{6/5}dy\right)^{5/6}\left(\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)}|\nabla v(y)|^{3/2}dy\right)^{2/3}$$

$$\leqslant CM(|\nabla u|^{6/5})^{5/6}(x)M(|\nabla v|^{3/2})^{2/3}(x),$$

où $M(g)(x) = \sup\{\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)}|g|dy, r > 0\}$ désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood. Ainsi revenant à (3.9),

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^2} f^*(x)dx &\leqslant C|g|_{L^\infty}\int_{I\!R^2} M(|\nabla u|^{6/5})^{5/6}M(|\nabla v|^{3/2})^{2/3}dx \\ &\leqslant C|g|_{L^\infty}(\int|\nabla u|^2dx)^{1/2}(\int|\nabla v|^2dx)^{1/2}\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz puis le fait que M opére continemment sur $L^p, p > 1$. Ceci achève la preuve de (3.7).

Remarque 3.4 Ce sont Coifman, Lions, Meyer et Semmes [12] qui ont remarqué les premiers que pour u et v dans $\dot{H}^1(I\!R^2), \{u, v\} \in \mathcal{H}^1(I\!R^2)$. Ce résultat n'entraine pas toutefois (3.7) car $L^\infty \times \mathcal{H}^1 \not\subset \mathcal{H}^1$. En effet si on avait $L^\infty \times \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^1$ on aurait $L^\infty \times BMO \subset BMO$, ce qui n'est pas (prendre $\frac{x}{|x|}$ et $\log|x|$ par exemple).

Comme nous l'avons indiqué à la Remarque 3.7, la régularité C^0 de φ solution de (2.1) - (2.2) s'obtient grâce au Téorème 3.3. En effet on commence par remarquer que ce résultat entraîne la proposition suivante.

Proposition 3.5 *La fonction φ définie en (3.6) est continue sur $I\!R^2$ et vérifie*

$$|\varphi|_{L^\infty} \leqslant C|g|_{L^\infty(R^2)}|\nabla u|_{L^2(R^2)}|\nabla v|_{L^2(R^2)}.$$

Démonstration. Cette estimation est une conséquence immédiate de la Proposition 3.1 et de la dualité $\mathcal{H}^1 - BMO$. Etant donné que $\Delta\varphi \in \mathcal{H}^1(I\!R^2)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = R_i R_j(\Delta\varphi)$ est aussi dans $\mathcal{H}^1(I\!R^2)$. Ainsi $\varphi \in W^{2,1}_{loc}(I\!R^2)$ et donc φ est continue sur $I\!R^2$. La continuité de φ peut aussi s'obtenir en remarquant que les translations sont continues sur $\mathcal{H}^1(I\!R^N)$ (cela résulte du fait que les fonctions C^∞ à décroissance rapide sont denses dans $\mathcal{H}^1(I\!R^N)$, Stein [25, p.231]). ∎

Nous sommes alors en mesure de montrer le résultat suivant.

Corollaire 3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, la fonction φ solution de (2.1) - (2.2) est continue sur Ω.*

Preuve. Notons $\bar{u}$ et $\bar{v}$ des prolongements à support compact de u et v à $I\!R^2$ et soit $\bar{\varphi}$ donné par (3.6) avec $\bar{u}$ et $\bar{v}$ au lieu de u, v. La fonction $\varphi - \bar{\varphi}$ est harmonique dans Ω et donc régulière dans Ω, puisque $\bar{\varphi}$ est continue (Proposition 3.5) φ est continue dans Ω. ∎

Remarque 3.7 Il est possible de montrer une version plus faible du Théorème 2.1 à l'aide du Théorème 3.3. En effet, on prolonge encore u et v à $I\!R^2$ en des fonctions $\bar{u}$ et $\bar{v}$ dans $H^1(I\!R^2)$ et à support compact. On note alors $\bar{\varphi}$ la fonction définie en (3.6) avec $\bar{u}$ et $\bar{v}$ au lieu de u et v.

Par construction $\varphi - \bar{\varphi}$ est harmonique et donc

$$|\varphi - \bar{\varphi}|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant |\varphi - \bar{\varphi}|_{L^\infty(\partial\Omega)} = |\bar{\varphi}|_{L^\infty(\partial\Omega)},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 2|\bar{\varphi}|_{L^\infty(R^2)} &\leqslant \quad (\text{par } (3.7)\ )) \ \leqslant C|g|_{L^\infty}|\nabla\bar{u}|_{L^2(R^2)}|\nabla\bar{v}|_{L^2(R^2)} \\ &\leqslant \quad C(\Omega)|g|_{L^\infty}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Cette approche fournit une constante qui dépend *a priori* de Ω. ∎

3.3 Le cas des coefficients variables

Pour son intérêt propre mais aussi pour étudier les conditions aux limites du type Neumann, nous considérons le cas d'un opérateur elliptique à coefficients variables. C'est à dire pour u et $v \in H^1(\Omega), g \in C^0(I\!R^2, I\!R) \cap L^\infty(I\!R^2)$ on étudie

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = g(u,v)\{u,v\} \text{ dans } \Omega, \tag{3.10}$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.11}$$

On fait l'hypothèses que les $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geqslant \alpha|\zeta|^2,\ \forall\zeta \in I\!R^2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega. \tag{3.12}$$

Théorème 3.8 *Sous les hypothèses qui précèdent, la solution φ de (3.10) - (3.11) appartient à $H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ et*

$$|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\alpha}|g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.13}$$

$$|\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\alpha}|g|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.14}$$

■

La preuve du Théorème 3.8 suit celle du Théorème 2.1 pourvu que l'on introduise la fonction de Green associée à $-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ et que l'on remplace (2.15) par

$$\int_{W(\gamma_1,\gamma_2)} a_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\,dx = \gamma_2 - \gamma_1. \tag{3.15}$$

Ceci fournit l'estimée (3.13). En ce qui concerne le fait que $\varphi \in C^0(\Omega)$, on procède comme pour le Corollaire 3.6. En effet, d'après Chanillo et Li ([10]) la fonction de Green associée à $-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ est dans $BMO(\mathbb{R}^2)$ ce qui conduit (avec les notations du Corollaire 3.6) à $-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial x_j}\right) = 0$ dans Ω et donc $\varphi - \bar{\varphi}$ est continue (par un résultat de De Giorgi, voir Giaquinta ([19])) dans Ω.

3.4 Un problème de Neumann

Considérons

$$-\Delta\varphi = \{u, v\} \text{ dans } \Omega, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \int_\Omega \varphi\; dx = 0, \tag{3.17}$$

où u et v dans $H^1(\Omega)$ vérifient la condition de compatibilité sur $\partial\Omega$: $\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial s}ds = 0$ (au sens de la dualité $H^{1/2} - H^{-1/2}$).

Théorème 3.9 *Avec les notations et hypothèses qui précèdent, la solution de (3.16) - (3.17) appartient à $H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ et*

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} |\varphi - c|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c_N(\Omega)|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.18}$$

$$\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant c_N^{1/2}(\Omega)|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.19}$$

où $c_N(\Omega)$ est une constante qui ne dépend que de Ω.

Pour la preuve du Théorème 3.9, on renvoie à Bethuel-Ghidaglia ([4]). Dans la preuve de ce résultat on utilise en particulier le Théorème 3.8. Dans l'esprit du Corollaire 2.4, nous avons la conséquence suivante du Théorème 3.9.

Corollaire 3.10 *Il existe une constante $C_1(\Omega)$ telle que pour tous u, v et w dans $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$,*

$$\int_\Omega w.\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx \leqslant c_1(\Omega)|w|_{H^1(\Omega)}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.20}$$

P. Choné ([11]) a montré que la constante $c_N(\Omega)$ ne peut être choisie indépendamment de Ω. Il montre aussi le résultat suivant.

Théorème 3.11 *([11]). Il existe une constante universelle K telle que si on se restreint à l'une des trois classes de fonctions $(u, v) \in H^1(\Omega)$:*

(i) u est constante sur Ω, v arbitraire,

(ii) v est constante sur Ω, u arbitraire,

(iii) u et v sont constantes sur chaque composante connexe de $\partial\Omega$,

la solution de (3.16) - (3.17) vérifie (3.18) et (3.19) avec K au lieu de $c_N(\Omega)$.

3.5 Une autre version du Corollaire 2.1

Motivé par l'étude de la régularité des applications harmoniques à valeurs dans une sphère $S^N, N \geqslant 2$ (voir Hélein ([21]), Evans ([15]) et Bethuel-Ghidaglia ([4])), on considère

$$-\Delta\varphi = \omega.\nabla v \text{ dans } \Omega, \tag{3.21}$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.22}$$

où $\omega \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ et div $\omega = 0$. Si

$$\omega_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \omega_2 = -\frac{\partial u}{\partial x_2} \text{ avec } u \in H^1(\Omega), \tag{3.23}$$

alors $\omega.\nabla v = \{u, v\}$ et (3.21) - (3.22) se réduit à (2.6) - (2.7) et alors d'après le Corollaire 2.1,

$$|\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}|\omega|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Dans le cas où Ω est simplement connexe, (3.23) a toujours lieu. En fait lorsque Ω n'est pas simplement connexe, si une inégalité du type (3.24) a lieu, la constante doit dépendre de Ω. En effet prenons pour Ω la couronne $0 < \varepsilon < r < 1$ et $u = \log r, v = \log \frac{r}{\varepsilon}$ deux fonctions harmoniques dans Ω. On vérifie que $\varphi = u.v$ pour $\omega = -2\nabla u$. Le rapport $|\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)}$ sur $|\omega|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ tend vers l'infini lorsque ε tend vers zéro. On montre alors le résultat suivant.

Théorème 3.12 *Soit $\omega \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ avec div $\omega = 0$ et $v \in H^1(\Omega)$. Il existe $C_2(\Omega)$, ne dépendant que de Ω, telle que la solution φ de (3.21) - (3.22) appartienne à $H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et vérifie*

$$|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_2(\Omega)|\omega|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.25}$$

$$|\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2^{1/2}(\Omega)|\omega|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.26}$$

Preuve. Il suffit d'introduire Φ harmonique dans Ω et vérifiant $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i}\omega.nd\sigma$, où Γ_i sont les composantes connexes de Γ (si $\omega \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ et div $\omega = 0, \omega.n \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $\int_{\Gamma_i}\omega.nd\sigma =< 1, \omega.n >$ au sens de la dualité $H^{1/2} - H^{-1/2}$ sur Γ). On écrit alors $\omega - \nabla\Phi = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, -\frac{\partial a}{\partial x_2}\right), a \in H^1(\Omega)$, puisque $\omega - \nabla\varphi$ est à flux nul sur chaque Γ_i de sorte que (3.21) se lise

$$-\Delta\varphi = \{a, v\} + \nabla\Phi.\nabla v.$$

On conclue alors à l'aide du Corollaire 2.1. ∎

3.6 Inversion de l'opérateur de Stokes sur un jacobien

Dans l'esprit du Théorème 3.12, nous montrons dans Bethuel-Ghidaglia ([6]) le résultat suivant. Gardant les notations du Théorème 3.12, on note $(u,p) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega)$ (p est défini modulo une constante) la solution de

$$-\Delta u + \nabla p = (\omega.\nabla)v \text{ dans } \Omega, \tag{3.27}$$

$$\text{div } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.28}$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.29}$$

Théorème 3.13 *On a l'estimation*

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_S(\Omega)|\omega|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)} \tag{3.30}$$

où $C_S(\Omega)$ ne dépend que de Ω et de plus $u \in C^0(\bar{\Omega})$.

Remarque 3.14 On montre comme auparavant l'estimation sur $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$. ∎

4 Régularité pour les solutions de l'équation des H-surfaces

4.1 Introduction, position du problème

Soit H une fonction régulière et bornée de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Une application $u \in H^1(D^2, \mathbb{R}^3)$ où D^2 est le disque unité de $\mathbb{R}^2$ vérifie l'équation des H-surfaces si

$$\Delta u = 2H(u)\frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2} \text{ dans } \mathcal{D}'(D^2). \tag{4.1}$$

Si u est régulière et représente une paramétrisation conforme d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, (1.1) signifie alors que la courbure moyenne au point $u(x_1, x_2)$ vaut $H(u(x_1, x_2))$. Ainsi (4.1) est aussi appelée équation des surfaces à courbure moyenne prescrite.

L'équation (4.1) a une structure variationnelle. En effet notons $F_H : H^1(D^2, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$F_H(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2 dx + \frac{2}{3}\int_{D^2} Q(u).\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx \tag{4.2}$$

où $div_u Q = 3H$, par exemple

$$Q_1(u_1, u_2, u_3) = \int_0^{u_1} H(s, u_2, u_3)\, ds, \; Q_2(u) = \int_0^{u_2} H(u_1, u_2, u_3)\, ds, \; \text{etc...}. \tag{4.3}$$

On vérifie alors (Hildebrandt et Kaul [22]) que les points critiques de F_H sont solutions de (4.1).

Il n'est pas clair *a priori* que la fonctionnelle F_H soit bien définie sur $H^1(D^2, \mathbb{R}^3)$ puisque, bien que H soit régulière et bornée, la deuxième intégrale dans (4.2) n'a pas forcément de sens. En fait Steffen [24] a montré que F_H est bornée sur $H^1(D^2, \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(D^2, \mathbb{R}^3)$ pour la norme $H^1(D^2, \mathbb{R}^3)$. Nous donnerons au paragraphe 4.5 une nouvelle preuve de ce fait qui s'appuie sur la formule de la co-aire.

Nous n'abordons pas ici la question de l'existence et de la multiplicité des solutions de (4.1), renvoyant pour celà à l'article de revue de Bethuel et Rey [7].

On étudie la question de la régularité des solutions de (4.1), c'est à dire si $u \in H^1_{loc}(D^2, \mathbb{R}^3)$ est solution de (4.1), a t-on $u \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^3)$? La conjecture (confortée par les résultats que nous donnerons plus loin) est

si H est bornée sur $\mathbb{R}^3$ et si $u \in H^1_{loc}(D^2, \mathbb{R}^3)$ est solution de (4.1),

$$\text{alors } u \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^3). \tag{4.4}$$

Tomi [26] a montré que pour prouver (4.4), il suffisait de montrer que $u \in L^\infty_{loc}(D^2, \mathbb{R}^3)$. Pour l'instant, (4.4) est un problème ouvert, toutefois Heinz [20] a montré que si $|\nabla H(u)|$ tend vers zéro comme $\frac{1}{1+|u|}$ lorsque $|u| \to \infty$ alors (4.4) était vrai (nous donnons au paragraphe 4.3 une nouvelle preuve de ce fait qui utilise le Corollaire 2.3 et la formule de la co-aire). Plus récemment, Bethuel [2] a amélioré le résultat de Heinz en montrant qu'il suffisait que $|\nabla H(u)|$ soit borné. Dans [4] nous montrons que (4.4) a lieu si H ne dépend que de deux variables (voir aussi le paragraphe suivant) et dans [5] nous montrons, à l'aide de la formule de la co-aire, que (4.4) a lieu si $(1+|u_3|)\frac{\partial H}{\partial u_3}(u)$ est bornée (voir aussi le paragraphe 4.4).

4.2 Le cas où H ne dépend que de deux variables

On suppose qu'il existe un vecteur unitaire n tel que $n.\nabla H \equiv 0$. De manière équivalente, on peut supposer que

$$H(u_1, u_2, u_3) = H(u_1, u_2). \tag{4.5}$$

Théorème 4.1 *([4]) On suppose que H est bornée et vérifie (4.5). Soit $u \in H^1_{loc}(D^2, \mathbb{R}^3)$ solution de (4.1), alors $u \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^3)$.*

Démonstration Un des points clefs de la preuve est le Théorème 3.3. Donnons nous $\varepsilon_0 \in]0,1[$ à préciser ultérieurement). Soit $x_0 \in D^2$, prenons r_0 tel que $B(x_0, 3r_0) \subset D^2$ et $\int_{B(x_0,3r_0)} |\nabla u|^2 dx \leqslant \varepsilon_0$.

Soit χ une fonction de troncature telle que $\chi = 1$ sur $B(x_0, 2r_0)$ et $\chi = 0$ hors de $B(x_0, 3r_0)$. On considère l'équation dans $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta\varphi = 2H(v_1, v_2)\{v_1, v_2\} \tag{4.6}$$

où $v_i = \chi u_i, i = 1, 2$.

Puisque $u_3 - \varphi$ est harmonique dans $B(x_0, 2r_0)$, la régularité de u_3 revient à celle de φ. Nous utilisons alors le Théorème 3.3 avec $u = v_1, v = v_2$ et $g = 2H$ et alors le membre droit de (4.7) appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$. Il en résulte que $\varphi \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et alors $\nabla\varphi \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \subset L^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, l'espace de Lorentz (voir Ziemer [28] pour la définition). Ainsi

$$|\nabla u_3|_{L^{2,1}(B(x_0,r_0))} \leqslant C|\nabla u|_{L^2(B(x_0,3r_0))}. \tag{4.7}$$

D'après le Corollaire 2.3 appliqué à (4.6), nous avons aussi

$$|u_3|_{L^\infty(B(x_0,r_0))} + |\nabla u_3|_{L^2(B(x_0,r_0))} \leqslant C|\nabla u|_{L^2(B(x_0,3r_0))}. \tag{4.8}$$

Ainsi pour appliquer le résultat de Tomi [26], il suffit de montrer que $|u_1| + |u_2|$ est bornée dans $B(x_0, r_0)$. Pour cela nous adaptons la méthode de Hélein [21]. Soient M_1, M_2 et M_3 défini comme suit

$$M_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - i\frac{\partial u_j}{\partial x_2}.$$

D'après (4.1) nous avons $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)$

$$\frac{\partial M_i}{\partial \bar{z}} = 2H(u_1, u_2)\{u_{j+1}, u_{j+2}\}.$$

Posant $\mu = (M_1, M_2)$, nous avons

$$\frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}} = Re(\alpha\mu) \tag{4.9}$$

où α est la matrice

$$\frac{i}{2}H(u_1, u_2)\begin{pmatrix} 0 & - & M_3 \\ \bar{M}_3 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit alors T l'opérateur :

$$T\nu = P \star (\tilde{\alpha}\nu + \tilde{\alpha}\bar{\nu})$$

où $P = \frac{1}{\pi}\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ (la solution fondamentale de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$) et $\tilde{\alpha}$ est le prolongement de α par 0 hors de $B(x_0, r_0)$. Puisque H est bornée on déduit de (4.7) que $\tilde{\alpha} \in L^{2,1}(\mathbb{R}^2)$. Mais $P \in L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ et la convolution est continue de $L^{2,1} \times L^{2,\infty}$ dans L^∞ donc T est continu de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans lui même et il existe une constante absolue C_a telle que

$$||T||_{\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty)} \leqslant C_a||\alpha||_{L^{2,1}(B(x_0,r_0))} \leqslant C|\nabla u|_{L^2(B(x_0,3r_0)} \leqslant C\varepsilon_0.$$

Ainsi pour ε_0 assez petit, $I + T$ est inversible dans L^∞ et alors l'équation

$$\nu + T\nu = \nu_0$$

a une solution pour tout vecteur ν_0 donné dans $\mathbb{R}^2$. Notons alors ν_1 celle obtenue pour $\nu_0 = (1,0)$ et ν_2 pour $\nu_0 = (0,1)$. Les fonctions ν_1 et ν_2 sont continues et bornées et (4.9) s'écrit (pour tout ν) $Re\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}({}^t\nu\mu)\right) = 0$. Ainsi

$$Re\frac{\partial}{\partial \bar{z}}({}^t\nu_1\mu) = Re\frac{\partial}{\partial \bar{z}}({}^t\nu_2\mu) = 0.$$

Ceci s'écrit

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{rs}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right) = 0, \; r = 1, 2,$$

où les a_{ij}^{rs} sont des combinaisons linéaires des ν_l^k. En fait le choix de ν_1 et ν_2 conduit à

$$sup_{x\in B(x_0,r_0)}|a_{ij}^{rs} - \delta_{ij}\delta^{rs}| \leqslant C(|T\nu_1|_{L^\infty} + |T\nu_2|_{L^\infty}).$$

En prenant ε_0 assez petit, nous pouvons imposer la condition d'ellipticité forte sur a_{ij}^{rs} et par les résultats classiques de régularité sur les systèmes elliptiques (voir par exemple Giaquinta [19], p. 87) on déduit que u_1 et u_2 sont Hölderiens sur $B(x_0, \frac{r_0}{2})$. La preuve du Théorème 4.1 est achevée. ∎

4.3 Le cas où $(1+|u|)|\nabla H(u)|$ est borné

On suppose que

$$sup_{u\in I\!R^3}(1+|u|)|\nabla H(u)| < \infty. \tag{4.10}$$

Théorème 4.2 *([20]) On suppose que H est bornée et vérifie (4.10). Soit* $u \in H^1_{loc}(D^2, I\!R^3)$ *solution de (4.1), alors* $u \in C^\infty(D^2, I\!R^3)$.

Démonstration Nous donnons ici la preuve de [4] qui s'appuie sur le Corollaire 2.3 et sur la formule de la co-aire. Comme auparavant, il suffit de montrer que $u \in L^\infty_{loc}(D^2, I\!R^3)$. Puisqu'il s'agit d'une propriété locale, il suffit de montrer que pour tous $x_0 \in D^2$ et $\delta > 0$ tels que $B(x_0, 2\delta) \subset D^2, u$ est bornée sur $B(x_0, \delta)$. D'après le Théorème de Fubini, puisque $u \in H^1(B(x_0, 2\delta))$, il existe $\eta \in]\delta, 2\delta[$ tel que $u \in H^1(\partial B(x_0, \eta)) \subset C^0(\partial B(x_0, \eta))$ et le Théorème 4.2 résulte alors de la Proposition suivante.

Proposition 4.3 *Supposons que H est bornée et vérifie (4.10). Soit* $u \in H^1(D^2, I\!R^3)$ *solution de (4.1) telle que la restriction de u à* ∂D^2 *soit bornée. Alors u est bornée sur* D^2.

Preuve de la Proposition 4.3. Notons pour $r \geqslant 0$,

$$W(r) = \{x \in D^2,\ |u(x)| \geqslant r\},\ V(r) = \partial W(r),\ F(r) = D^2 \backslash W(r).$$

Si A est un sous ensemble mesurable de D^2, on note $E(v, A) = \int_A |\nabla v|^2 dx$ et $\wedge(r) = E(u, W(r))$. Il est clair, que pour montrer la Proposition 4.3, il suffit de montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\wedge(R) = 0. \tag{4.11}$$

Notre méthode va consister à construire une suite croissante (R_n), bornée et telle que $\wedge(R_n) \leqslant \beta \wedge (R_{n+1})$ avec $\beta \leqslant \frac{1}{4}$. Alors $R = \lim R_n$ vérifiera (4.11).

Le fait que H vérifie (4.10) a pour conséquence que si $v \in H^1(D^2, I\!R^3)$ alors $H(v)v \in H^1(D^2, I\!R^3)$ et

$$\int_{D^2} |\nabla(H(v)v)|^2 dx \leqslant C_1 \int_{D^2} |\nabla v|^2 dx. \tag{4.12}$$

Puisque $u_{|\partial D^2} \in L^\infty(\partial D^2)$, $M = ||u_{|\partial D^2}||_{L^\infty(\partial D^2)} + 1 < \infty$. Soit alors $\varepsilon > 0$ à choisir ultérieurement. Prenons R_0 tel que

$$R_0 > M \text{ et } \wedge(R_0) < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Supposons alors que u est régulière. Bien entendu cette hypothèse est absurde, le raisonnement qui suit fournit en fait une estimation a priori et il s'agit de construire une suite (u^n) adéquate de fonctions régulières qui approchent u et vérifier sur u^n les estimations ci-après. Le raisonnement complet est délicat et technique, nous renvoyons donc à [[4], Lemme 6.2] pour les détails.

Donnons nous $\alpha \in]0,1[$ et choisissons $R_0' \in]R_0(1+\frac{\alpha}{8}), R_0(1+\frac{\alpha}{4})[$ tel que $V(R_0')$ soit régulier. Notons alors φ_0 la solution de

$$-\Delta\varphi_0 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2} \text{ sur } W(R_0'),$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ sur } V(R_0').$$

D'après le Corollaire 2.3,

$$\left(\int_{W(R_0')} |\nabla\varphi_0|^2\right)^{1/2} \leqslant C_1 \int_{W(R_0')} |\nabla u|^2 dx = C_1 \wedge (R_0'). \tag{4.14}$$

Intégrant $\int_{V(r)} \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}\right| ds$ sur l'intervalle $r \in]R_0(1+\frac{\alpha}{4}), R_0(1+\frac{3\alpha}{4})[$ nous voyons à l'aide de la formule de la co-aire et de (4.14) que

$$\int_{R_0(1+\frac{\alpha}{4})}^{R_0(1+\frac{3\alpha}{4})} \left(\int_{V(r)} \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}\right| ds\right) dr \leqslant \int_{W(R_0')} |\nabla\varphi_0||\nabla u| \leqslant C_2 \wedge (R_0')^{3/2}.$$

Il existe donc $R_0'' \in]R_0(1+\frac{\alpha}{4}), R_0(1+\frac{3\alpha}{4})[$, tel que

$$\int_{V(R_0'')} \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}\right| ds \leqslant \frac{4C_2}{R_0\alpha} \wedge (R_0'')^{3/2}. \tag{4.15}$$

Multiplions alors (4.1) par u et intégrons sur $W(R_0'')$. Nous obtenons

$$\int_{W(R_0'')} u.\Delta u \, dx = -2\int_{W(R_0'')} H(u)\Delta\varphi_0.u dx$$

et donc

$$\wedge(R_0'') = \frac{1}{2}\int_{V(R_0'')} \frac{\partial|u|^2}{\partial\nu} ds - 2\int_{W(R_0'')} \nabla(H(u)u)\nabla\varphi_0 dx + 2\int_{V(R_0'')} H(u)u.\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu} ds.$$

Par construction $\frac{\partial|u|^2}{\partial\nu} \leqslant 0$ sur $V(r)$ et en utilisant (4.12), (4.14) et (4.15) nous obtenons

$$\wedge(R_0'') \leqslant C_3 \wedge (R_0')^{3/2} + |H|_{L^\infty} \frac{8C_2R_0''}{R_0\alpha} \wedge (R_0')^{3/2}$$

soit

$$\wedge(R_0'') \leqslant \frac{C_4}{\alpha} \wedge (R_0')^{3/2}.$$

Prenons alors $R_1 = R_0(1+\alpha)$, il vient

$$\wedge (R_1) \leqslant \frac{C_4}{\alpha} \wedge (R_0)^{3/2}. \tag{4.16}$$

Prenons alors ε tel que

$$\frac{\varepsilon^{1/2}}{\alpha} C_4 \leqslant \frac{1}{4}, \tag{4.17}$$

il résulte de (4.16) que $(\wedge(R_0) < \varepsilon))$

$$\wedge(R_1) \leqslant \frac{1}{4} \wedge (R_0).$$

On reprend alors la construction avec R_0 remplacé par R_1 et $\alpha_0 = \alpha$ par $\alpha_1 = \alpha_0/2$. On note $R_2 = R_1(1+\frac{\alpha}{2})$ de sorte que

$$\begin{aligned} \wedge(R_2) &\leqslant \tfrac{2C_4}{\alpha} \wedge (R_1)^{3/2} \leqslant \tfrac{2C_4}{\alpha} \left(\tfrac{\varepsilon}{4}\right)^{1/2} \wedge (R_1) \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon^{1/2} C_4}{\alpha} \wedge (R_1) \leqslant \tfrac{1}{4} \wedge (R_1). \end{aligned}$$

Ainsi en prenant $R_n = (1 + \frac{1}{2^n})R_{n-1}$ on vérifie que $\wedge(R_n) \leqslant \frac{1}{4} \wedge (R_{n-1})$ et donc $\wedge(\lim R_n) = 0$. ∎

4.4 Le cas où $(1+|u_3|)\left|\frac{\partial H}{\partial u_3}(u)\right|$ est borné

Nous généralisons les Théorèmes 4.1 et 4.2 en faisant une hypothèse plus faible que (4.4) et (4.10).

Théorème 4.4 *([5]) On suppose que H est bornée et que*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^3} (1+|u_3|)\left|\frac{\partial H}{\partial u_3}(u)\right| < \infty. \tag{4.18}$$

Soit $u \in H^1_{loc}(D^2, \mathbb{R}^3)$ vérifiant (4.1), alors $u \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^3)$.

Remarque 4.5 Il est clair que (4.18) peut être remplacée par : il existe $n \in \mathbb{R}^3, ||n|| = 1$ tel que

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^3} (1+|u.n|)|n.\nabla H(u)| < \infty. \tag{4.19}$$

Schéma de la preuve du Théorème 4.3. La preuve complète, délicate et technique, est donnée dans Bethuel-Ghidaglia [5]. Nous nous contentons d'en donner quelques idées. En fait le Théorème résulte de l'inégalité (4.21) ci dessous. En effet (4.21) implique que u est hölderienne sur D^2 et par le résultat de Tomi déjà cité, $u \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^3)$.

Proposition 4.6 *Donnons nous $x_0 \in D^2$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset D^2$. Il existe deux constantes $\eta > 0$ et $\theta \in]0,1[$ telles que si u vérifie (4.1) et*

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 < \eta_0, \tag{4.20}$$

alors

$$T(x_0, r, \theta) \leqslant \frac{1}{4} T(x_0, r, 1) \tag{4.21}$$

où

$$T(x_0, r, \theta) \equiv \left(\int_{B(x_0,\theta r)} |\nabla u_3|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{1}{\theta r} \int_{B(x_0,\theta r)} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)\, dx. \tag{4.22}$$

■

Pour montrer ce résultat on s'appuie sur le Lemme 4.7 ci-après. Introduisons quelques notations. Soit γ la trace de u sur $S(x_0, r_0)$ le bord de $B(x_0, r_0)$ et u^h son extension harmonique :

$$\Delta u^h = 0 \text{ dans } B(x_0, r_0),$$

$$u^h = \gamma \text{ sur } S(x_0, r_0).$$

On désigne par K et M les constantes :

$$K = \sup_{u \in I\!R^3} \left(|H(u)| + (1 + |u_3|) \left| \frac{\partial H}{\partial u_3}(u) \right| \right),$$

$$M = \frac{1}{2\pi r_0} \int_{S(x_0,r_0)} u^h \, ds.$$

Lemme 4.7 *Supposons que $|\gamma - M|_{L^\infty(S(x_0,r_0))} \leqslant 1$ et que $\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u|^2 \leqslant 1$. Il existe une constante C qui ne dépend que de K telle que*

$$\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla(u_3 - u_3^h)|^2 \, dx \leqslant C(E_3 E + (E_3 E)^{1/2} \int_{S(x_0,r_0)} |\nabla u_1| \, ds). \tag{4.23}$$

■

Dans cet énoncé on a noté

$$E_3 = \int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u_3|^2 \, dx, \; E = \int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Montrons d'abord comment la Proposition 4.6 résulte du Lemme 4.7. Donnons nous $\eta_0 \in]0,1[$. D'après le Théorème de Fubini, nous pouvons trouver $r_0 \in]r/4, r[$ tel que la restriction γ de u à $S(x_0, r_1)$ vérifie

$$\int_{S(x_0,r_0)} |\nabla\gamma|^2\, ds \leqslant \frac{3\eta_0}{r} \text{ et } \int_{S(x_0,r_0)} |\nabla u_1|\, ds \leqslant \frac{2}{r}\int_{B(x_0,r)} |\nabla u_1|\, dx. \tag{4.24}$$

Ainsi en utilisant (4.20) et (4.23) (sous réserve que $\|\gamma - M\|_{L^\infty(S(x_0,r_0))} \leqslant 1$), nous voyons que

$$\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla(u_3 - u_3^h)|^2\, dx \leqslant C\eta_0^{1/2}\left(\left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla u_3|^2\, dx\right)^{1/2} + \frac{1}{r}\int_{B(x_0,r)} |\nabla u_1|\right)^2 \tag{4.25}$$

D'autre part puisque u_3^h est harmonique, on a (voir par exemple Gilbard et Trudinger [29]) : il existe une constante absolue C_a telle que pour tout $\theta_0 \in]0,1[$, $\rho > 0$

$$\int_{B(x_0,\theta_0\rho)} |\nabla u_3^h|^2\, dx \leqslant C\theta_0^2 \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u_3^h|^2\, dx.$$

Ainsi

$$\int_{B(x_0,\theta_0 r_0)} |\nabla u_3^h|^2\, dx \leqslant C_a\theta_0^2 \int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u^h|^2\, dx \leqslant C_a\theta_0^2 \int_{B(x_0,r)} |\nabla u_3^h|^2\, dx. \tag{4.26}$$

En combinant (4.25) et (4.26), il vient

$$\int_{B(x_0,\theta_0 r_0)} |\nabla u_3|^2\, dx \leqslant C(\eta_0^{1/2} + \theta_0^2)\left(\left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla u_3|^2\right)^{1/2} + \frac{1}{r}\int_{B(x_0,r)} |\nabla u_1|\right)^2 \tag{4.27}$$

En écrivant que $\varphi = u_1 - u_1^h$ vérifie

$$\Delta\varphi = 2H(u)\{u^2, u^3\} \text{ dans } B(x_0, r_0),$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } S(x_0, r_0),$$

et en utilisant des techniques similaires à celles qui précèdent, on montre que

$$\frac{1}{\theta_0 r_0}\int_{B(x_0,\theta_0 r_0)} |\nabla u_1^h| \leqslant C\eta_0\left(\eta_0^{1/2}\left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla u_3|^2\right)^{1/2} + \frac{1}{r}\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u_1|\, dx\right) \tag{4.28}$$

ainsi que

$$\frac{1}{r}\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla\varphi| dx \leqslant C\eta_0^{1/2}\left(\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u_3|^2\right)^{1/2}. \tag{4.29}$$

Il résulte alors de (4.28) et (4.29) que

$$\frac{1}{\theta_0 r_0}\int_{B(x_0,\theta_0 r_0)}|\nabla u_1|dx \leqslant \frac{C\eta_0^{1/2}}{\theta_0}\left(\left(\int_{B(x_0,r)}|\nabla u_3|^2dx\right)^{1/2}+\frac{\theta_0}{r}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u_1|dx\right) \quad (4.30)$$

Puis en utilisant que $r\leqslant 4r_0$, (4.27) et (4.30) on trouve (avec la notation (4.22)) que

$$T\left(x_0,r,\frac{\theta_0}{r}\right)\leqslant K(\eta_0,\theta_0)T(x_0,r,1) \quad (4.31)$$

où

$$K(\eta_0,\theta_0)=C\left(\theta_0+\eta_0^{1/4}+\frac{\eta_0^{1/2}}{\theta_0}\right). \quad (4.32)$$

Prenons $\theta_0=(8C)^{-1}$ puis η_0 assez petit pour que $8C(\eta_0^{1/4}+8C\eta_0^{1/2})\leqslant 1$ et $\frac{1}{2\pi r_0}\int_{S(x_0,r_0)}|\nabla\gamma|\leqslant 1$ (voir (4.24)).

Alors $||\gamma-M||_{L^\infty(S(x_0,r_0))}\leqslant 1$ et

$$T\left(x_0,r,\frac{\theta_0}{4}\right)\leqslant\frac{1}{4}T(x_0,r,1).$$

La preuve de la Proposition 4.6 est achevée. Reste donc à montrer le Lemme 4.7. Tout d'abord puisque $||\gamma-M||_{L^\infty(S(x_0,r_0))}\leqslant 1$, le principe du maximum montre que $||u_3^h-M||_{L^\infty(B(x_0,r_0))}\leqslant 1$ et donc

$$||u_3^h||_{L^\infty(B(x_0,r_0))}\leqslant 1+M. \quad (4.33)$$

D'après (4.1),

$$\Delta(u_3-u_3^h)=2H(u)\{u_1,u_2\} \text{ dans } B(x_0,r_0),$$

$$u_3-u_3^h=0 \text{ sur } S(x_0,r_0),$$

et donc

$$\int_{B(x_0,r_0)}|\nabla(u_3-u_3^h)|^2\,dx=-2I \quad (4.34)$$

où l'intégrale à estimer pour obtenir (4.23) est

$$I=\int_{B(x_0,r_0)}H(u)\{u^1,u^2\}(u_3-u_3^h)\,dx. \quad (4.35)$$

Pour estimer (4.35), on utilise deux techniques différentes selon que M est grand ou petit. Par exemple selon que $|M|\leqslant 10$ et $|M|\geqslant 10$. Nous traitons le cas $|M|\leqslant 10$

renvoyant à [5] pour l'autre cas.

Introduisons alors les ensembles de niveau de u_1 :

$$W^1(\delta_1, \delta_2) = \{x \in B(x_0, r_0),\ \delta_1 < u_1(x) < \delta_2\},$$

$$V^1(\delta) = \{x \in B(x_0, r_0),\ u_1(x) = \delta\},$$

et on oriente la normale ν à $V^1(\delta)$ de sorte que $\frac{\partial u^1}{\partial \nu} \geqslant 0$. Soit alors (τ, ν) le repère de Frenet sur $V^1(\delta)$, associé à l'asbisse curviligne s. Tout cela est loisible pour presque tout δ. Ainsi, sur $V^1(\delta)$,

$$\frac{\partial u^1}{\partial s} = 0,\ \frac{\partial u^1}{\partial \nu} = |\nabla u^1|,\ \{u^1, u^2\} = |\nabla u^1|\ \frac{\partial u_2}{\partial s}$$

et par la formule de la co-aire (1.1), I s'écrit

$$I = \int_{\mathbb{R}} J(\delta)\ d\delta \tag{4.36}$$

où

$$J(\delta) = \int_{V^1(\delta)} H(\delta, u_2, u_3)(u_3 - u_3^h)\frac{du_2}{ds}\ ds. \tag{4.37}$$

Ecrivons $V^1(\delta) = \cup_i\ \omega_i$ pour les δ tels que $V^1(\delta)$ est l'union finie de courbes fermées et régulières et soit $\alpha_i = \frac{1}{|\omega_i|}\int_{\omega_i} u_2 ds$.

Nous avons l'identité

$$H(\delta, u_2, u_3)\frac{du_2}{ds} = -\int_{\alpha_i}^{u_2} \frac{\partial H}{\partial u_3}(\delta, \lambda, u_3)\frac{du_3}{ds}\ d\lambda\ + \frac{d}{ds}\int_{\alpha_i}^{u_2} H(\delta, \lambda, u_3)\ d\lambda$$

(ici α_i pourrait être n'importe quel réel). Ainsi

$$J(\delta) = J_1(\delta) - J_2(\delta) \tag{4.38}$$

où

$$J_1(\delta) = \Sigma_i \int_{\omega_i} (u_3 - u_3^h)\left(\frac{d}{ds}\int_{\alpha_i}^{u_2} H(\delta, \lambda, u_3)\ d\lambda\right)\ ds, \tag{4.39}$$

$$J_2(\delta) = \Sigma_i \int_{\omega_i}\int_{\alpha_i}^{u_2} \frac{\partial H}{\partial u_3}(\delta, \lambda, u_3)\frac{du_3}{ds}(u_3 - u_3^h)\ d\lambda\ ds. \tag{4.40}$$

Puisque $u_3 - u_3^h = 0$ sur $S(x_0, r_0)$,

$$J_1(\delta) = -\Sigma_i \int_{\omega_i}\left(\int_{\alpha_i}^{u_2} H(\delta, \lambda, u_3)\ d\lambda\right)\frac{d(u_3 - u_3^h)}{ds}\ ds$$

et donc

$$|J_1(\delta)| \leqslant K\Sigma_i \int_{\omega_i} |u_2 - \alpha_i||\nabla(u_3 - u_3^h)|\, ds. \tag{4.41}$$

Quant à $J_2(\delta)$, puisque $|u_3^h| \leqslant 11$,

$$|J_2(\delta)| \leqslant 11K\Sigma_i \int_{\omega_i} |u_2 - \alpha_i||\nabla u_3|\, ds. \tag{4.42}$$

En combinant (4.41) et (4.42),

$$|J(\delta)| \leqslant 12K\Sigma_i \int_{\omega_i} |u_2 - \alpha_i|(|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)\, ds$$

et par le choix de α_i,

$$|u_2 - \alpha_i|_{L^\infty(\omega_i)} \leqslant \int_{\omega_i} |\nabla u_2|\, ds \leqslant \int_{V^1(\delta)} |\nabla u_2|\, ds.$$

Ainsi

$$|J(\delta)| \leqslant 12K \int_{V^1(\delta)} |\nabla u_2|\, ds \int_{V^1(\delta)} (|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)\, ds. \tag{4.43}$$

Puisque u est régulière, $J(\delta)$ est nul pour $|\delta|$ grand et donc (4.36) est une intégrale sur un compact de $I\!R$. Quitte à perturber légèrement u^1, on peut supposer que u^1 est une fonction de Morse (i.e. le hessien de u^1 est non dégénéré aux points critiques de u^1), alors la fonction $\delta \mapsto J(\delta)$ est continue. Dans ce cas on peut écrire I comme limite de sommes de Riemman : $\forall \mu > 0$,

$$I = \lim_{\mu \to 0} \mu \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} J(\mu_n) \tag{4.44}$$

où $\mu_n \in [n, \mu, (n+1)\mu]$ est arbitraire.

Nous avons d'aprés la formule de la co-aire (1.1),

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{n\mu}^{(n+1)\mu} \int_{V^1(\delta)} (|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)\, ds\, d\delta &= \textstyle\int_{W_n} |\nabla u_1|(|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)\, dx, \\ &\leqslant \left(\textstyle\int_{W_n} |\nabla u_1|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\textstyle\int_{W_n} (|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)^2\, dx\right)^{1/2} \end{aligned}$$

et

$$\int_{n\mu}^{(n+1)\mu} \left(\int_{V^1(\delta)} (|\nabla u_2|\, ds\right) d\delta \leqslant \left(\int_{W_n} |\nabla u_1|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{W_n} (|\nabla u_2|^2\, dx\right)^{1/2}$$

où $W_n = W^1(n\mu, (n+1)\mu)$. D'après le Théorème de la moyenne, il existe $\mu_n \in]n\mu, (n+1)\mu[$ tel que $V^1(\mu_n)$ soit régulier et

$$\int_{V^1(\mu_n)} |\nabla u_2|\, ds \leqslant \frac{2}{\mu}\left(\int_{W_n} |\nabla u_1|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_{W_n} (|\nabla u_2|^2\, dx\right)^{1/2},$$

$$\int_{V^1(\mu_n)} (|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)\, ds \leqslant \frac{2}{\mu}\left(\int_{W_n} |\nabla u_1|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_{W_n} (|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Alors par (4.43) :

$$|J(\mu_n)| \leqslant \frac{48K}{\mu^2}\left(\int_{W_n} |\nabla u_1|^2\, dx\right)\left(\int_{W_n} |\nabla u_2|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_{W_n} (|\nabla u_3| + |\nabla u_3^h|)^2\, dx\right)^{1/2} \quad (4.45)$$

Pour estimer $\int_{W_n} |\nabla u_1|^2\, dx$, on utilise le Lemme suivant :

Lemme 4.8 *Pour tous δ_1 et δ_2,*

$$\int_{W^1(\delta_1,\delta_2)} |\nabla u_1|^2\, dx \leqslant |\delta_2 - \delta_1| \left(\int_{B(x_0,r_0)} |\Delta u_1|\, dx + \int_{S(x_0,r_0)} \left|\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right|\, ds\right). \quad (4.46)$$

■

Cette inégalité s'obtient aisément grâce à la formule de Green (cf [5]).

Alors puisque $\Delta u_1 = 2H(u)\{u_2, u_3\}$,

$$\int_{W_n} |\nabla u_1|^2\, dx \leqslant \mu \left[2K\left(\int_{B(x_0,r_0)} |\Delta u_2|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_{B(x_0,r_0)} |\Delta u_3|^2\, dx\right)^{1/2} + \int_{S(x_0,r_0)} |\nabla u_1|\, ds\right]$$

Revenant à (4.44) nous déduisons à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\mu \Sigma_{n\in \mathbb{Z}} |J(\mu_n)| \leqslant (E_3 E + (E_3 E)^{1/2} \int_{S(x_0,r_0)} |\nabla u_1|\, ds) \quad (4.47)$$

(on a utilisé que $\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u_3^h|^2\, dx \leqslant \int_{B(x_0,r_0)} |\nabla u_3|^2\, dx$).

Enfin (4.44) et (4.47) conduisent à (4.23). ■

4.5 A propos de la fonctionnelle F_H

La fonctionnelle F_H introduite en (4.2) - (4.3) est bien définie sur $H^1(D^2; \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(D^2, \mathbb{R}^3)$ et

$$|F_H(u)| \leqslant \frac{1}{2}|\nabla u|^2_{L^2(D^2)} + \frac{2}{3}|H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|u|_{L^\infty(D^2)}|\nabla u|^2_{L^2(D^2)}. \quad (4.48)$$

En fait nous allons améliorer significativement cette estimation en montrant le

Théorème 4.9 *Etant donné un ouvert Ω borné et régulier du plan et une fonction $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ est notée γ, on a l'estimation suivante*

$$\left|\int_\Omega Q(u).\frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2} dx\right| \leqslant 2|H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}(2\sqrt{2}|\nabla u|^3_{L^2(\Omega)} + |\gamma|_{L^\infty(\partial\Omega)}|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)})\rho. \quad (4.49)$$

où Q est défini en (4.3).

Démonstration. Nous allons utiliser la formule de la co-aire dans l'esprit de la preuve du Théorème 2.1. Pour commencer nous montrons une inégalité similaire à (4.49).

Proposition 4.10 *Soient $u \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $v, w, \in H^1(\Omega)$. On a l'estimation*

$$\left|\int_\Omega \int_0^u H(\sigma, v, w) d\sigma\{v, w\}\, dx\right| \leqslant 4\sqrt{2}|H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)}|\nabla w|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.50)$$

Preuve de la Proposition 4.10. Quitte à changer u en λu, nous pouvons supposer que $\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leqslant 1$. Nous pouvons aussi supposer que u, v et w sont des fonctions régulières dans $\bar{\Omega}$. On introduit alors

$$W(\delta_1, \delta_2) = \{x \in \Omega,\ \delta_1 < u(x) < \delta_2\},$$

$$V(\delta) = \{x \in \Omega,\ u(x) = \delta\},$$

$$W_n = W(n\, \gamma, (n+1)\gamma),\ \tilde{W}_n = W(\gamma_n, \gamma_{n+1})$$

où $\gamma > 0$ est arbitraire et $\gamma_n \in]n\gamma,\ (n+1)\gamma[$ est à choisir ultérieurement (on imposera que $\tilde{W}_n$ est régulier). On écrit alors

$$I \equiv \int_\Omega \int_0^u H(\sigma, v, w)\, d\sigma\{v, w\}\, dx = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} I_n \quad (4.51)$$

où

$$I_n \equiv \int_{\tilde{W}_n} \int_0^u H(\sigma, v, w)\, d\sigma\{v, w\}\, dx. \quad (4.52)$$

Soit $\bar{\gamma}_n = (\gamma_n + \gamma_{n+1}))/2$, nous avons $I_n = J_n + K_n$ où

$$K_n = \int_{\tilde{W}_n} \int_0^{\bar{\gamma}_n} H(\sigma, v, w)\, d\sigma\{v, w\}\, dx \quad (4.53)$$

et

$$J_n = \int_{\tilde{W}_n} \int_{\bar{\gamma}_n}^u H(\sigma, v, w)\, d\sigma\{v, w\}\, dx. \quad (4.54)$$

La deuxième intégrale s'estime par

$$|J_n| \leqslant |u - \bar{\gamma}_n|_{L^\infty(\tilde{W}_n)} |H|_{L^\infty(R^3)} \int_{\tilde{W}_n} |\nabla v||\nabla w| \, dx,$$

et par le choix de γ_n,

$$|J_n| \leqslant 2\gamma |H|_{L^\infty(R^3)} \int_{\tilde{W}_n} |\nabla v||\nabla w| \, dx. \tag{4.55}$$

Pour estimer K_n, on remarque que

$$\int_0^{\bar{\gamma}_n} H(\sigma, v, w) \, d\sigma\{v, w\} = \left\{ \int_0^v \int_0^{\bar{\gamma}_n} H(\sigma_1, \sigma_2, w) \, d\sigma_1 \, d\sigma_2, \; w \right\} \tag{4.56}$$

et donc, à condition que $\tilde{W}_n$ ne rencontre pas $\partial\Omega$,

$$K_n = \int_{V(\gamma_n) \cup V(\gamma_{n+1})} \int_0^v \int_0^{\bar{\gamma}_n} H(\sigma_1, \sigma_2, \; w) \, d\sigma_1 \, d\sigma_2) \frac{dw}{ds} \, ds. \tag{4.57}$$

Les considérations d'orientations sur $V(\gamma_n)$ permettent alors d'établir que

$$\Sigma_{N \in \mathbb{Z}} \, K_n = \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} L_n \tag{4.58}$$

où

$$L_n = \int_{V(\gamma_n)} \left(\int_0^v \int_{\bar{\gamma}_{n-1}}^{\bar{\gamma}_n} H(\sigma_1 \; \sigma_2, \; w) \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 \right) \frac{dw}{ds} \, ds. \tag{4.59}$$

Décomposons alors $V(\gamma_n)$ en composantes connexes fermées ω_i et soit $v_i = \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} v \, ds$. Nous avons

$$L_n = \Sigma_i \int_{\omega_i} \int_{v_i}^v \int_{\bar{\gamma}_{n-1}}^{\bar{\gamma}_n} H(\sigma_1, \; \sigma_2 \; w) \, d\sigma_1, \; d\sigma_2 \, \frac{dw}{ds} ds,$$

et donc

$$|L_n| \leqslant \Sigma_i |\bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}_{n-1}| \; |H|_{L^\infty(R^3)} \int_{\omega_i} |v - v_i| \left| \frac{dw}{ds} \right| ds.$$

Ainsi

$$|L_n| \leqslant 2\gamma |H|_{L^\infty(R^3)} \int_{V(\gamma_n)} |\nabla v| \, ds \int_{V(\gamma_n)} |\nabla w| \, ds. \tag{4.60}$$

En fait seul $\tilde{W}_{-1}$ rencontre $\partial\Omega$, par conséquent il faut réecrire (4.58) sous la forme

$$\Sigma_{n \in \mathbb{Z}} K_n = K_{-1} + \Sigma_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}} + R \tag{4.61}$$

où

$$R \equiv \int_{V(\gamma_0)} \int_0^v \int_0^{\bar{\gamma}_0} H(\sigma_1,\, \sigma_2,\, w)\; d\sigma_1 d\sigma_2\, \frac{dw}{ds} ds - \tag{4.62}$$

$$- \int_{V(\gamma_{-1})} \int_0^v \int_0^{\bar{\gamma}_{-1}} H(\sigma_1,\, \sigma_2,\, w)\; d\sigma_1 d\sigma_2\, \frac{dw}{ds} ds.$$

En répétant la technique qui conduit à (4.60), on obtient

$$|R| \leqslant 2\gamma |H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \Sigma_{n=-1}^{0} \int_{V(\gamma_n)} |\nabla w|\; ds. \tag{4.63}$$

Choix de γ_n. Par la formule de la co-aire,

$$\int_{W_n} (|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2)^{1/2} |\nabla u|\; dx = \int_{n\gamma}^{(n+1)\gamma} \left(\int_{V(\lambda)} (|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2)^{1/2}\; ds \right) d\lambda.$$

Ainsi, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma_n \in]n\gamma, (n+1)\gamma[$ tel que $V(\gamma_n)$ soit régulier et

$$\int_{V(\gamma_n)} (|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2)^{1/2}\; ds \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\gamma} \int_{W_n} (|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2)^{1/2} |\nabla u|\; dx. \tag{4.64}$$

En revenant à (4.51) et en utilisant (4.61),

$$I = I_{-1} + \Sigma_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0\}} L_n + R + \Sigma_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} J_n$$

et alors par (4.55), (4.60), (4.63) et

$$|I_{-1}| \leqslant \gamma |H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\tilde{W}_{-1}} |\nabla v| |\nabla w|\; dx,$$

on obtient avec (4.64) que

$$|I| \leqslant 2|H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_\Omega (\gamma |\nabla v| |\nabla w| + \frac{(1+\varepsilon)^2}{\gamma} (|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2))\; dx.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on peut faire $\varepsilon \to 0$ et donc

$$|I| \leqslant 2|H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_\Omega [\gamma |\nabla v| |\nabla w| + \frac{1}{\gamma} (|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2)]\; dx. \tag{4.65}$$

Il est clair que pour montrer (4.50), on peut aussi supposer que

$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \leqslant 1$ et $\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \leqslant 1$ et alors (4.65) devient

$$|I| \leqslant 2|H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \left(\gamma + \frac{2}{\gamma} \right)$$

et (4.50) s'obtient par le choix du γ optimal. ∎

Afin de montrer (4.49), nous généralisons la Proposition 4.10 au cas où $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Proposition 4.11 *Soit $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $v, w \in H^1(\Omega)$. On a l'estimation*

$$\left|\int_\Omega \int_0^u H(\sigma, v, w)\, d\sigma \{v, w\} dx\right| \leqslant 2|H|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}(2\sqrt{2}|\nabla u|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^\infty(\partial\Omega)}). \\ .|\nabla v|_{L^2(\Omega)}|\nabla w|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.66)$$

La démonstration de ce résultat suit celle de la Proposition 4.10, c'est pourquoi nou l'omettons. Enfin l'inégalité (4.49) est une conséquence immédiate de (4.66).

5 Compacité faible de l'ensemble des solutions des équations d'Euler stationnaires

Etant donné un ouvert simplement connexe, borné et régulier Ω dans le plan et une force $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ on dit $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ vérifie les équations d'Euler stationnaires incompressibles avec force f (au sens faible) dans Ω si

$$divu = 0 \text{ au sens des distributions dans } \Omega, \quad (5.1)$$

$$u.\nu = 0 \text{ au sens des distributions sur } \partial\Omega, \quad (5.2)$$

$$\int_\Omega (u \otimes u : \nabla\nabla^\perp \eta + f.\nabla^\perp \eta)\, dx = 0, \ \forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (5.3)$$

où $\nabla^\perp \eta \equiv \left(\frac{\partial n}{\partial x_2}, -\frac{\partial n}{\partial x_1}\right)$, ν désigne la normale unitaire extérieure sur $\partial\Omega$ et $(u \otimes u)_{ij} = u_i\ u_j$.

Remarque 5.1 Si $u \in L^2(\Omega)$ vérifie (5.10) alors $u.\nu$ peut être défini dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et (5.2) prend sens. ■

On suppose que l'on dispose d'une famille $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions régulières sur $\bar{\Omega}$ telle que u^ε vérifie les équations d'Euler stationnaires incompressibles avec force f^ε et

$$f^\varepsilon \text{ converge vers } f \text{ dans } L^1(\Omega), \quad (5.4)$$

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_\Omega \left(|u^\varepsilon|^2 + \left|\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_2}\right|\right) dx < \infty. \quad (5.5)$$

Notre objet est de montrer le résultat suivant.

Théorème 5.2 *Soit u appartenant à la fermeture faible dans $L^2(\Omega)$ de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Alors u vérifie les équations d'Euler stationnaires incompressibles avec force f.*

Ce résultat est prouvé dans Bethuel-Ghidaglia [3]. Le cas $\Omega = \mathbb{R}^2$ a été traité par Di Perna et Majda [13] et Alinhac [1], voir aussi Evans [14]. La preuve que nous donnons ici utilise la formule de la co-aire (cette preuve est aussi valable pour le cas $\Omega = \mathbb{R}^2$) ce qui nous permet de préciser (quantifier) la mesure de défaut de convergence (dans la terminologie de [13]).

Nous allons indiquer de quelle manière la formule de la co-aire intervient dans la preuve du Théorème 5.2. Tout d'abord puisque Ω est simplement connexe, écrivons

$$u^\varepsilon = \nabla^\perp \zeta^\varepsilon \text{ dans } \Omega,\ \zeta^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Il résulte de (5.5) que ζ^ε est borné dans $H^1(\Omega)$ et que $\Delta\zeta^\varepsilon$ est borné dans $L^1(\Omega)$. Si u est valeur d'adhérence de la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans $L^2(\Omega)$ - faible, alors $u = \nabla^\perp\zeta$, $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ et ζ est valeur d'adhérence de ζ^ε dans $H_0^1(\Omega)$ - faible. Bien que ζ^ε soit régulière, rien ne garantie que ζ le soit, on construit alors une famille $(\zeta_\delta)_{\delta>0}$de fonctions régulières qui s'annulent sur $\partial\Omega$ et telles que

$$\zeta_\delta \text{ converge vers } \zeta \text{ dans } H_0^1(\Omega) - \text{ fort et } \Delta\zeta_\delta \text{ est bornée dans } L^1(\Omega).$$

Une telle famille peut être obtenue en considérant la solution du problème de minimisation

$$\min_{\psi\in H_0^1(\Omega)} \int \left\{ |\nabla\psi|^2 + \frac{|\psi - \zeta^\delta|^2}{|\zeta^\delta - \zeta|_{L^2(\Omega)}} \right\} dx$$

où la famille ζ^δ converge faiblement vers ζ dans $H_0^1(\Omega)$.

Si $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergait fortement vers ζ dans $H_0^1(\Omega)$, le Théorème 5.2 serait évident. Il s'agit donc d'estimer la fonction $|u^\varepsilon(x) - u(x)|^2$ et c'est pourquoi nous introduisons les ensembles de niveau de $\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta$: pour $\gamma \geqslant 0$ nous notons

$$W_\delta^\varepsilon(\gamma) = \{x \in \Omega, |\zeta^\varepsilon(x) - \zeta(x)| \geqslant \gamma\}.$$

la surface de cet ensemble tend vers zéro lorsque ε et δ tendent vers zéro puisque

$$\text{Aire } (W_\delta^\varepsilon(\gamma)) \leqslant \frac{1}{\gamma^2}|\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{5.6}$$

et nous savons que ζ^ε converge fortement vers ζ dans $L^2(\Omega)$ lorsque ε tend vers zéro (dorénavant nous notons aussi ζ^ε la suite extraite qui converge vers ζ).

Ainsi, au sens de la mesure de Lebesgue, $W_\delta^\varepsilon(\gamma)^c \equiv \Omega\backslash W_\delta^\varepsilon(\gamma)$ et un "gros" ensemble et nous allons estimer $|u^\varepsilon - u_\delta|$ sur cet ensemble (voir (5.9). A cet effet notons

$$C_0 = \sup_{\delta>0,\,\varepsilon>0} \int_\Omega (|\nabla\zeta^\varepsilon|^2 + |\nabla\zeta_\delta|^2 + |\Delta\zeta^\varepsilon| + |\Delta\zeta_\delta|)\, dx. \tag{5.7}$$

Proposition 5.3 *Il existe une constante C_1 qui ne dépend que de C_0 telle que pour tous ε, δ et γ positifs, il existe $\gamma_\delta^\varepsilon \in [\gamma, 2\gamma]$ tel que $W_\delta^\varepsilon(\gamma_\delta^\varepsilon)$ ait pour frontière une réunion finie de courbes régulières dont la somme des longueurs, notée l_γ^ε, vérifie*

$$l_\gamma^\varepsilon \leqslant \frac{C_1}{\gamma^2}|\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.8}$$

De plus,

$$\int_{W_\delta^\varepsilon(\gamma_\delta^\varepsilon)^c} |u^\varepsilon - u_\delta|^2 \, dx \leqslant C_1\gamma, \tag{5.9}$$

$$\text{Aire } (W_\delta^\varepsilon(\gamma_\delta^\varepsilon)) \leqslant \frac{|\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|^2}{\gamma^2} L^2(\Omega). \tag{5.10}$$

Démonstration. Appliquons la formule de la co-aire (1.1) avec $g = 1, f = |\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|$ et $X = W_\delta^\varepsilon(2\gamma) \backslash W_\delta^\varepsilon(\gamma)$.

Il vient

$$\int_X |\nabla|\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|| \, dx = \int_\gamma^{2\gamma} l_\delta^\varepsilon(\sigma) \, d\sigma,$$

où $l_\delta^\varepsilon(\sigma)$ est la longueur de la frontière de $W_\delta^\varepsilon(\sigma)$.

Nous avons donc

$$\int_\gamma^{2\gamma} l_\delta^\varepsilon(\sigma) \, d\sigma \leqslant \int_{W(\gamma)} |\nabla|\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|| \, dx$$

et par (5.6) et (5.7) :

$$\int_\gamma^{2\gamma} l_\delta^\varepsilon(\sigma) \, d\sigma \leqslant \frac{2C_0^{1/2}}{\gamma}|\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après le Lemme de Sard et la formule de la moyenne, il existe $\gamma_\delta^\varepsilon \in [\gamma, 2\gamma]$ tel que $W_\delta^\varepsilon(\gamma_\delta^\varepsilon)$ est régulier et

$$l_\delta^\varepsilon \equiv l_\delta^\varepsilon(\gamma_\delta^\varepsilon) \leqslant \frac{3C_0^{1/2}}{\gamma^2}|\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.11}$$

Nous avons obtenu (5.8), alors que (5.10) résulte de (5.6). Reste donc à montrer (5.9). Pour l'instant nous n'avons pas utilisé l'estimée L^1 sur $\Delta\zeta^\varepsilon$. L'inégalité (5.9) va en résulter.

Nous notons

$$W_+ = \{x \in \Omega, \zeta^\varepsilon(x) - \zeta_\delta(x) \geqslant \gamma\},$$

$$W_- = \{x \in \Omega,\ \zeta^\varepsilon(x) - \zeta_\delta(x) \leqslant -\gamma\},$$

$$V_+ = \partial W_+ \text{ et } V_- = \partial W_-.$$

Par la formule de Green

$$- \int_{W_\delta^\varepsilon(\gamma)^c} \Delta(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta).(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta)\, dx =$$

$$\int_{W_\delta^\varepsilon(\gamma)^c} |\nabla(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta)|^2\, dx - \int_{\partial(W_\delta^\varepsilon(\gamma)^c)} (\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta) \frac{\partial(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta)}{\partial n}\, ds. \tag{5.12}$$

D'autre part

$$- \int_{W\pm} \Delta(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta)\, dx = \int_{V\pm} \frac{\partial(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta)}{\partial n}\, ds,$$

et donc d'après (5.7)

$$\left| \int_{V\pm} \frac{\partial(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta)}{\partial n}\, ds \right| \leqslant 2C_0.$$

Ainsi revenant à (5.12) nous obtenons en utilisant à nouveau (5.7) que

$$\int_{W_\delta^\varepsilon(\gamma)^c} |\Delta(\zeta^\varepsilon - \zeta_\delta)|^2\, dx \leqslant 4C_0\gamma$$

et (5.9) est prouvé.

La proposition 5.3 est la première étape de la preuve du Théorème 5.2. Suivent alors deux autres étapes. la suivante "traite" des effets du bord : contrairement aux apparences, le Théorème 5.2 n'est pas un résultat local et ceci est du aux termes de pression qui sont cachés dans la formulation (5.3). La dernière étape utilise les deux précédentes et la technique de Di Perna - Majda [13]. On renvoie a [3] pour la démonstration complète.

Bibliographie

[1] S. ALINHAC, Un phénomène de concentration évanescente pour des flots non-stationnaires incompressibles en dimension deux, *Com. Math. Phys.,* **127** (1990) 585-596.

[2] F. BETHUEL, Un résultat de régularité pour les solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite. *C.R. Acad. Sci. Paris 314* (1992) p. 1003-1007.

[3] F. BETHUEL et J.M. GHIDAGLIA, Weak limits of solutions to the incompressible 2D-Euler equation in a bounded domain, *Asymptotic Analysis* à paraître et Prépublications du CMLA 9210, Cachan, France 1992.

[4] F. BETHUEL et J.M. GHIDAGLIA, Improved regularity of solutions to elliptic equations involving jacobians and applications, *J. Math. Pures et Appliquées,* en impression, *72*, 1993.

[5] F. BETHUEL et J.M. GHIDAGLIA, Regularity for solutions to the equations of surfaces of prescribed mean curvature using the coarea formula, à paraître et Prépublication 9309 du CMLA, Cachan, 1993.

[6] F. BETHUEL et J.M GHIDAGLIA, Sharp L^∞-estimates for Stokes operator in two dimensions, Prépublication 9318 du CMLA, Cachan 1993.

[7] F. BETHUEL et O. REY, Large solutions for the equation of surfaces of prescribed mean curvature, *"A tribute in honor of J. DOUGLAS and T. RADO"*, T. Rassias Ed., à paraître et Prépublication du CMLA 9218, Cachan, 1992.

[8] M. BRELOT et G. CHOQUET, Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier, 3,* 199-263, 1951.

[9] H. BREZIS et J.M. CORON, Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture, *Comm. Pure Appl. Math., 37,* 149-187, 1984.

[10] S. CHANILLO et Y.Y. LI, Continuity of solutions of uniformly elliptic equations in $\mathbb{R}^2$, *Manuscripta Math.* à paraître.

[11] P. CHONÉ, Problèmes elliptiques avec second membre jacobien et condition de Neumann au bord, à paraître.

[12] R. COIFMAN, P.L. LIONS, Y. MEYER, S. SEMMES, Compacité par compensation et espaces de Hardy, *C.R. Acad. Sci. Paris, 311,* 519-524, 1990, and Compensated compactness and Hardy spaces, Prépublication CEREMADE, 9123, Université Paris IX, 1991.

[13] R. DI PERNA et A. MAJDA, Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for two dimensional incompressible flow, *J. of Amer. Math. Soc.,* 1 (1988) 59-95.

[14] L.C. EVANS, *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations,* CBMS # 74, A.M.S. Providence, (1990).

[15] L.C. EVANS, Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres, Preprint 1991.

[16] C. FEFFERMANN, Characterizations of bounded mean oscillations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77, 1971, p. 587-588.

[17] C. FEFFERMAN et E. STEIN, H^p spaces of several variables, *Acta Maths., 19*, 1972, p. 137-193.

[18] H. FEDERER, *Geometric measure theory,* Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[19] M. GIAQUINTA, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic systems,* Princeton University Press, 1983.

[20] E. HEINTZ, Uber die regularität schwarcher Lösungen nicht linear elliptisher systeme, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen II. Mathematisch Physikalissche Klasse 1,* 1-13, 1975.

[21] F. HELEIN, Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphére, *C.R. Acad. Sci. Paris., 311,* Série I, 519-524, 1990.

[22] S. HILDEBRANDT et H. KAUL, Two dimensional variational Problems with obstructions, and Plateau's problem for H-surfaces in a Riemannian Manifolds, *Comm. Pure. Applied Math. 25* (1972), p. 187-223.

[23] Y. MEYER, *Ondelettes et Opérateurs I,* Hermann, Paris, 1990.

[24] K. STEFFEN, Isoperimetric inequalities and the problem of Plateau, *Math. Ann.,* 222 (1976), 97-144.

[25] E. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[26] F. TOMI, Bermerkungen zum regularitäts problem der Gleichung vergesehriebener Krümmung, *Math Z, 132* (1973) p. 323-326.

[27] H. WENTE, An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, *J. Math. Anal. Appl., 26,* (1989) p. 318-344.

[28] W. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions,* Springer-Verlag, 1989.

[29] GILBARD et TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer-Verlag, Berlin, 1983.