JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PATRICK GÉRARD
ÉRIC LEICHTNAM

Équirépartition de fonctions propres pour des problèmes aux limites

Journées Équations aux dérivées partielles (1992), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1992____A11_0>

Equirépartition de fonctions propres pour des problèmes aux limites.

Patrick Gérard	*Eric Leichtnam*
Batiment 425	*Ecole Normale Superieure*
Université Paris – Sud	45 *rue d'Ulm*
91405 *ORSAY*	75005 *Paris*

1. Introduction.

En 1974, A. Shnirelman énonçait le résultat suivant([15]):

"Soit M une variété riemannienne compacte dont le flot géodésique est ergodique (pour la mesure de Liouville λ sur le fibré unitaire cotangent), soit (ϕ_k) une base orthonormée de fonctions propres du laplacien associé. Alors il existe une partie S de $\mathbf{N}$ de densité 1 telle que, pour tout opérateur pseudo-différentiel classique A d'ordre 0 on ait :

$$\langle A\phi_k, \phi_k\rangle \longrightarrow \int_{S^*M} \sigma_0(A)d\lambda,$$

quand $k \in S$ tend vers l'infini."

Une démonstration complète de ce résultat n'a été publiée que dix ans plus tard par Zelditch ([19]) dans le cas des surfaces à courbures négatives constantes, puis par Colin de Verdière ([2]) dans le cas général. Ainsi l'hypothèse d'ergodicité faite sur le système dynamique associé à l'opérateur (i.e. le flot géodésique) entraîne que "presque toutes" les fonctions propres se délocalisent asymptotiquement uniformément en espace et en fréquence. En 1987 un résultat analogue a été prouvé par Helffer-Martinez-Robert ([8]) pour un opérateur de Schrödinger semi-classique. Notons que le résultat précédent est en général faux pour une famille **non** orthonormée de fonctions propres.

L'objet de notre travail est de généraliser le résultat précédemment cité au problème de Dirichlet sur un ouvert à bord Ω de $\mathbf{R}^n$. Les démonstrations de cette note sont données dans [6]. Dans cette situation le système dynamique associé est le "billiard" sur Ω. Le premier exemple de billard ergodique a été introduit par Sinaï([14]) et décrit le mouvement d'un point matériel sur un tore avec réflexions élastiques sur des obstacles sphériques fixes. Comme les réflexions ont lieu sur des frontières strictement concaves, ce flot possède la plupart des propriétés de type "chaotique" du flot géodésique sur une variété à courbure négative. Mais il existe des billiards ergodiques convexes comme l'a montré Bunimovitch ([1]); l'exemple le plus simple étant le "stade". De tels exemples sont moralement "moins ergodiques" que les précédents; toutefois le théorème suivant montre que les fonctions propres associées possèdent des propriétés ergodiques analogues.

Théorème 1. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, dont la frontière est $W^{2,\infty}$ (i.e. la normale varie de facon lipschitzienne). On suppose que le billiard sur Ω est ergodique. Soit (ϕ_k) une base orthonormale de fonctions propres pour le laplacien de Dirichlet sur Ω. Alors il existe une partie S de $\mathbf{N}$ de densité 1 telle que pour tout opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 A sur $\mathbf{R}^n$ on ait:

$$\langle A 1_\Omega \phi_k, 1_\Omega \phi_k \rangle \longrightarrow \int_{S^*\Omega} \sigma_0(A) d\lambda. \tag{1}$$

quand $k \in S$ tend vers l'infini; où $\sigma_0(A)$ désigne le symbole principal de A, et $\lambda = dx d\sigma(\xi)$ est la mesure de Liouville de masse 1 sur $S^*\Omega$.

Si Ω est un ouvert strictement convexe à bord suffisamment régulier, Lazutkin ([12], [13]) a montré que le flot du billiard sur Ω n'est pas ergodique et a construit une sous-suite de fonctions propres de densité > 0 ne possédant pas la propriété (1). Notons que la frontière du stade (et des billiards considérés dans [1]) est bien de classe $W^{2,\infty}$.

Il serait intéressant de savoir quand dans l'énoncé du théorème 1 on peut prendre $S = \mathbf{N}$.

Il semble très probable que les méthodes de notre article [6] puissent permettre d'étendre le théorème 1 au cas du billiard de Sinaï.

Le principe de la preuve du théorème 1 consiste, comme dans [2], [15], [19] à se ramener à un résultat de propagation de singularités pour des mesures de défaut microlocales. Toutefois la présence ici d'un bord peu régulier rend délicat l'usage du théorème d'Egoroff, aussi nous prouverons une version infinitésimale d'un résultat de propagation: une équation de transport.

2. Mesures semi-classiques et propagation des singularités.

Posons:

$$S^*\bar{\Omega} = \{(x,\xi); x \in \bar{\Omega}, \quad |\xi| = 1\}$$

Les fonctions propres du théorème 1 sont solutions du problème:

$$-\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k, \quad \phi_k|_{\partial\Omega} = 0$$

Posons:

$$u_k = \phi_k 1_\Omega, \quad h_k = \lambda_k^{\frac{-1}{2}}, \quad v_k = h_k \frac{\partial u_k}{\partial n} \tag{2}$$

On obtient alors l'équation:

$$(-h_k^2 \Delta - 1) u_k = h_k v_k \otimes \delta_{\partial\Omega}$$

On observe que $u_k \rightharpoonup 0$, et que les u_k sont supportés dans un compact fixe.

En utilisant une quantification positive des symboles on construit aisément une suite $(\mu_k)_k$ de mesures positives sur $S^*\mathbf{R}^n$ telle que $\mu_k(S^*\mathbf{R}^n) = ||u_k||^2_{L^2} = 1$ et que pour tout opérateur pseudo-différentiel classique A d'ordre 0 on ait:

$$\langle A u_k, u_k \rangle - \int \sigma_0(A) d\mu_k \rightarrow 0$$

quand k tend vers l'infini. Dans la suite nous fixons une telle suite (μ_k).

Proposition et définition 2. (voir [5] et [6])

Les distributions tempérées $\mu \in S'(\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n})$ pour lesquelles il existe une partie infinie $S \subset N$ telles que:

$$\forall a \in S(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n), \quad \langle a(x; h_k D)u_k, u_k\rangle \ \to \langle \mu, a\rangle$$

quand $k \in S$ tend vers l'infini, sont de la forme $\int a d\mu$ où μ est une mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}^{2n}$ de masse totale $\leq limsup(||u_k||^2)$. On dit alors que μ est une mesure semi-classique associée à la suite $(u_k)_k$. On note M l'ensemble de ces mesures.

En utilisant les équations (2) on vérifie (voir [6]) que la suite (v_k) est bornée dans $L^2(\partial\Omega)$ où $\partial\Omega$ est muni de la mesure de Lebesgue. Comme $\partial\Omega$ est de classe C^1 on peut définir (voir [6]) à l'aide d'une densité positive l'ensemble N des mesures semi-classiques associées à la suite (v_k).

Proposition 3. Soit $\mu \in M$ et S comme dans la proposition 2. Alors μ est portée par $S^*\bar{\Omega}$ et pour tout opérateur pseudodifférentiel classique A d'ordre 0 sur $\mathbf{R^n}$:

$$\langle Au_k, u_k\rangle \to \int \sigma_0(A) d\mu$$

quand $k \in S$ tend vers l'infini. De plus M coincide avec l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (μ_k) pour la topologie vague de $S^*\mathbf{R}^n$.

La preuve utilise le concept de mesure de défaut microlocal introduit dans [4] (voir aussi [17]).

L'équation de transport suivante exprime la version infinitésimale de la propagation des singularités.

Théorème 4. (voir [6]). Soit Ω un ouvert borné connexe (éventuellement non convexe) de $\mathbf{R}^n$, à bord $W^{2,\infty}$. Avec les notations ci-dessus, toute $\nu \in N$ est portée par $\{(x,\gamma) \in T^*\partial\Omega, |\gamma| \leq 1\}$. De plus, pour toute $\mu \in M$, il existe $\nu \in N$ telle que

$$\xi \cdot \partial_x \mu = -\frac{1}{2} 1_{\partial\Omega}(x) \int_{|\gamma|\leq 1} \nu(x, d\gamma) \frac{\delta(\xi - \xi_+(x,\gamma)) - \delta(\xi - \xi_-(x,\gamma))}{\langle \xi_+(x,\gamma) - \xi_-(x,\gamma), n(x)\rangle}. \tag{3}$$

où pour $\gamma \in T_x^*\partial\Omega$, $|\gamma| \leq 1$, $\xi_\pm(x,\gamma)$ sont les deux vecteurs de norme 1 se projetant orthogonalement sur γ et, $n(x)$ désigne la normale unitaire sortante sur $\partial\Omega$.

Note: Si le bord est plus régulier, on vérifie que, dans la partie "glancing", ν ne charge que la zone "gliding" , et on obtient un résultat de propagation suivant les rayons glissants.

3. Convergence en moyenne.

Proposition 5. La suite (μ_k) converge vaguement vers $\lambda^0 = 1_{S^*\Omega} dx d\sigma(\xi)$ au sens de Césaro.

Idée de la preuve: Comme λ^0 et les μ_k sont des mesures de probabilités et que $\lambda^0(S^*\Omega) = 1$, il suffit de prouver la convergence vague sur $S^*\Omega$. On applique alors comme dans [2] la méthode de l'equation de la chaleur. Le théorème taubérien de Karamata (voir [18]) montre alors qu'il suffit de prouver que pour chaque $a \in C_c^\infty(S^*(\Omega))$, $a \geq 0$, on a:

$$\frac{Tr(A1_\Omega e^{t\Delta_D})}{Tr(e^{t\Delta_D})} \to \int_{S^*\Omega} a d\lambda$$

quand $t \to 0^+$, où A est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal a, Δ_D est le laplacien de Dirichlet sur Ω et, les traces s'entendent au sens des opérateurs sur $L^2(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vérifiant $\varphi a = a$. En utilisant le principe de "ne pas sentir la frontière" de Kac ([9]) on montre alors que pour un $\epsilon > 0$, on a:

$$|Tr(A\varphi(e^{t\Delta_D} - e^{t\Delta})\varphi)| \leq \frac{1}{\epsilon}\exp(-\frac{\epsilon}{t}) \quad , \quad t > 0$$

On conclue alors aisément.

4. Mesures invariantes sur des billiards convexes.

$\mathbf{R}^n$ étant muni de sa métrique riemannienne canonique, on identifiera vecteurs tangents et vecteurs cotangents à l'aide de cette métrique.

Introduisons quelques notations. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ à bord C^1 et soit $n = n(x)$ la normale unitaire sortante sur $\partial\Omega$. On note $\partial_+ S^*\bar{\Omega}$ (resp.$\partial_- S^*\bar{\Omega}$) l'ensemble des vecteurs cotangents (x, ξ) au-dessus de $\partial\Omega$ tels que $\langle \xi, n(x) \rangle > 0$ (resp. $\langle \xi, n(x) \rangle < 0$), et j l'involution de $\partial_- S^*\bar{\Omega} \cup \partial_+ S^*\bar{\Omega}$ échangeant un vecteur et son symétrique par rapport à l'espace tangent à $\partial\Omega$. On pose enfin:

$$S^H\bar{\Omega} = S^*\Omega \cup \partial_- S^*\bar{\Omega} \cup \partial_+ S^*\bar{\Omega}, \quad \text{et} \quad B(\Omega) = S^H\bar{\Omega}/\sim \quad ,$$

où $\sim$ identifie un point et son image par j.

Comme Ω est convexe, la trajectoire du billiard issue de $(x, \xi) \in B(\Omega)$ est celle d'un point matériel partant à t=0 du point x à la vitesse ξ, et se déplaçant dans Ω avec réflexions suivant les lois de Descartes sur $\partial\Omega$. Pour certains ouverts convexes il existe des trajectoires du billiard qui ne sont pas définies pour tout temps t: la série des temps successifs entre rebonds converge (voir [7]). Cependant l'ensemble de tels points est de mesure nulle pour la mesure de Liouville (voir [10]), on peut définir presque partout un flot (G_t) sur $B(\Omega)$, laissant invariant la projection $\tilde{\lambda}$ sur $B(\Omega)$ de la mesure de Liouville λ; par définition Ω est un billiard ergodique si le système dynamique $(B(\Omega), \quad (G_t), \quad \tilde{\lambda})$ l'est. Comme (G_t) n'est pas continu en général, il est délicat de traduire le théorème 4 de propagation en termes de mesures invariantes par le flot du billiard, c'est pourquoi nous introduirons plus loin une classe particulière de mesures sur $\partial_+ S^*\bar{\Omega}$.

Pour $t \in \mathbf{R}, (x, \xi) \in S^*\mathbf{R}^n$, posons $F_t(x, \xi) = (x + t\xi, \xi)$.
Pour $\alpha \in S^H\bar{\Omega}$, posons:

$$\tau_\pm(\alpha) = \pm min\{t > 0, \quad F_{\pm t}(\alpha) \in \partial S^*\bar{\Omega}\} \quad \text{si} \quad \alpha \in S^*\Omega \cup \partial_\mp S^*\bar{\Omega}, et$$

$$\tau_\pm(\alpha) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \in \partial_\pm S^*\bar{\Omega}.$$

La convexité de Ω permet alors de voir que $\tau_\pm$ est continue sur $S^H\bar{\Omega}$. On considère alors les deux applications propres suivantes:

$$\begin{aligned} p :& S^H\bar{\Omega} \to \partial_+ S^*\bar{\Omega} \\ & \alpha \to F_{\tau_+(\alpha)}\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T :& \partial_+ S^*\bar{\Omega} \to \partial_+ S^*\bar{\Omega} \\ & \alpha \to p \circ j(\alpha) \end{aligned}$$

Notons M_i l'ensemble des mesures de Radon μ sur $S^H\bar{\Omega}$ dont le prolongement μ^0 par 0 à l'ouvert $S^H\bar{\Omega} \cup S^*\bar{\Omega}^c$ de $S^*\mathbf{R}^n$ satisfait à:

$\xi.\partial_x\mu^0$ est une mesure de Radon portée par $\partial_- S^*\bar{\Omega} \cup \partial_+ S^*\bar{\Omega}$, et $j(\xi.\partial_x\mu^0) = -\xi.\partial_x\mu^0$.

Notons M_∂ l'ensemble des mesures de Radon sur $\partial_+ S^*\bar{\Omega}$ invariantes par T. Dans [6], on obtient aisément la:

Proposition 6. L'application b:

$$\mu \to b(\mu) = -\frac{1}{\tau_-}p(\mu)$$

définit une bijection de M_i sur M_∂. De plus, $b(\mu) = -\xi.\partial_x\mu^0|_{\partial_+ S^*\bar{\Omega}}$.

Voici un exemple fondamental d'élément de M_i: si λ^0 est le prolongement de la mesure de Liouville λ par 0 à $S^*\mathbf{R}^n$, on a:

$$\xi.\partial_x\lambda^0 = -\xi.n(x)\delta_{\partial\Omega}(x)d\sigma(\xi)$$

Ainsi $\lambda \in M_i$, et $l = b(\lambda)$ est donnée par:

$$l(dxd\xi) = \xi.n(x)\delta_{\partial\Omega}(x)d\sigma(\xi)$$

Enfin, il est facile de voir que Ω est un billiard ergodique si et seulement si le système dynamique $(\partial_+ S^*\bar{\Omega}, T, l)$ est ergodique.

5. Utilisation de l'ergodicité.

On suppose que Ω est convexe et que le billiard est ergodique . Considérons $\tilde{S}$ l'ouvert $\bigcup_{t\in\mathbf{R}} F_t(\partial_+ S^*\bar{\Omega})$ de $S^*\mathbf{R}^n$. Pour chaque $\alpha \in \tilde{S}$, il existe un unique $t = t(\alpha) \in \mathbf{R}$ tel que $F_t(\alpha) \in \partial_+ S^*\bar{\Omega}$, et l'application $\alpha \to t(\alpha)$ est continue. L'application suivante $\tilde{p}$:

$$\begin{aligned} & \tilde{S} \to \partial_+ S^*\bar{\Omega} \\ & \alpha \to \tilde{p}(\alpha) = F_{t(\alpha)}(\alpha) \end{aligned}$$

est continue et $\tilde{p}|_{S^H\bar{\Omega}} = p$. Fixons une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, ≥ 0, valant 1 près de $\bar{\Omega}$. Posons

$$m_k = -\frac{1}{\tau_-}\tilde{p}(\varphi\mu_k)$$

Les propositions 3 et 6, et le théorème 4 permettent de voir que:

(4)
$$T(m_k) - m_k \rightharpoonup 0 \quad k \to \infty$$

vaguement sur $X = \partial_+ S^* \bar{\Omega}$. De même, la proposition 5 entraine que:

(5)
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m_k \rightharpoonup l = b(\lambda) \quad k \to \infty$$

vaguement sur X.

Enfin, comme μ_k est une mesure de probabilité, on a:

(6)
$$\int_X h dm_k \leq \int_X h dl = 1$$

où $h = -\tau_-$ est continue > 0 sur X. Notre théorème 1 découle alors du résultat général suivant:

Théorème 7.

Soient X un espace localement compact, métrisable, dénombrable à l'infini, $T : X \to X$ une application continue, et l une mesure de Radon ≥ 0 finie sur X, invariante par T. On suppose que le système dynamique (X, T, l) est ergodique. Alors, pour toute suite (m_k) de mesures de Radon ≥ 0 sur X vérifiant (4), (5), (6), il existe une partie infinie S de $\mathbf{N}$ de densité 1 telle que:

$$m_k \rightharpoonup l \quad \text{vaguement sur} \quad X \qquad k \to \infty, \quad k \in S$$

Bibliographie.

[1] L. A. Bunimovitch, On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersive Billiards, Commun. Math. Phys. 65, 295-312 (1979).

[2]. Y. Colin de Verdière, Ergodicité et Fonctions propres du laplacien, Commun. Math. Phys. 102, 497-502 (1985).

[3] D. Delande, in "Chaos and Quantum Physics" (Les Houches, 1989) eds. M.J. Giannoni, A. Voros et J. Zinn-Justin, North-Holland.

[4] P. Gérard, Microlocal Defect Measures, Commun. Partial Diff. Equations 16 (11), 1761-1794 (1991).

[5] P. Gérard, Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, Séminaire E.D.P.,1990-1991, exposé numéro 16, Ecole Polytechnique.

[6] P. Gérard, et E. Leichtnam, article à paraitre et, Ergodicité de Fonctions Propres pour des Problèmes aux Limites. Séminaire E.D.P., 1992, Ecole Polytechnique.

[7] B. Halpern, Strange Billiards Table, Trans. AMS 232,297-305 (1977).

[8] B. Helffer, A. Martinez et D. Robert, Ergodicité et Limite semi-classique, Commun. Math. Phys. 109, 313-326 (1987).

[9]M. Kac, Can one hear the shape of a drum ?, Amer. Math. Monthly 73 ,1-23 (1966).

[10] A. Katok, J.M. Strelcyn, Invariant Manifolds, Entropy and Billiards...,Lecture Notes in Math. 1222, Springer (1986).

[11] V. F. Lazutkin, On the asymptotics of the eigenfunctions of the Laplacian, Soviet Math Dokl. 12, 1569-1572 (1971).

[12] V. F. Lazutkin, The KAM Theory and Asymptotics of spectrum of Elliptic Operators, Springer (1991).

[13] P. Leboeuf et A. Voros, Multiplicative formulation of Quantum Mechanics: a new setting for semi-classical analysis, actes du Colloque Franco-Japonais: "Analyse algébrique des perturbations singulières", CIRM, Luminy, 21-26 oct.1991.

[14] Ya G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections..., Russ. Math. Surveys 25, 137-189 (1970).

[15] A.I. Shnirelman, Ergodic Properties of eigenfunctions, Usp. Math. Naouk 29, 181-182 (1974).

[16] A.I. Shnirelman, On the asymptotic proerties of eigenfunctions in the regions of chaotic motions, appendice à [12].

[17] L. Tartar, H-measures, a new approach..., Proc. Roy. Soc. Ed., 115 A (1990), 193-230.

[18] M. Taylor, Pseudo-differential Operators, Princeton (1981).

[19] S. Zelditch, Uniform distribution of eigenfunctions on hyperbolic surfaces, Duke Math. J. 55, 919-941 (1987).