JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FABRICE BÉTHUEL

Passage à la limite faible dans des équations aux dérivées partielles non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1991), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1991____A3_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Passage à la limite faible dans des équations aux dérivées partielles non linéaires

Fabrice BETHUEL

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, CERMA la Courtine 93167 NOISY-LE-GRAND CEDEX

et

CMLA ENS CACHAN

Introduction : Soit H un espace de Hilbert, et F une fonctionnelle définie sur H. Une suite de Palais-Smale pour F est une suite u^n d'éléments de H telle que $dF(u^n) \longrightarrow 0$, et $F(u^n) \leqslant C$. Les suites de Palais-Smale s'introduisent naturellement lorsqu'on cherche à trouver des solutions à l'équation $dF = 0$, (en général une équation aux dérivées partielles) par des méthodes variationnelles (théorie de Morse, lemme du col, etc...). Celles-ci peuvent être utilisées directement lorsque F satisfait la condition dite de Palais-Smale : de toute suite de Palais-Smale on peut extraire une sous-suite convergente. Malheureusement, dans beaucoup de situations intéressantes, (en particulier lorsque l'équation est invariante par certains groupes de symétries), la condition de Palais-Smale n'est pas satisfaite. Dans de nombreux cas, on peut néanmoins se contenter de démontrer que pour toute suite de Palais-Smale il existe une sous-suite qui converge faiblement.

Ici nous prendrons comme exemple modèle l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite : nous montrerons comment des phénomènes de compensation permettent de passer faiblement à la limite dans les équations. Soit D^2 le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Soit $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit γ une application de ∂D^2 vers $\mathbb{R}^3$ dans $H^1(\partial D^2) \hookrightarrow C^0$. Soit $u \in H^1_\gamma(D^2;\mathbb{R}^3)$. On dit que u vérifie l'équation des surfaces à courbure moyenne (H) prescrite (avec valeur au bord γ) si

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = 2H(u)\, u_x \wedge u_y & \text{au sens faible} \\ u = \gamma & \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

Cette équation apparait en géométrie : si u est un paramétrage conforme d'une surface S de $\mathbb{R}^3$ et vérifie (1), la courbure moyenne de la surface S, en $u(x,y)$ est $H(u)$. Les solutions de (1) sont des points critiques de la fonctionnelle :

(2) $$F(u) = E(u) + V_Q(u)$$

où $E(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2$ et $V_Q = \frac{1}{3}\int Q(u)\, u_x \wedge u_y$

où $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifie

$$\operatorname{div} Q = 3H.$$

En particulier si $H=H_0=C^{te}$ on peut prendre $Q(x_1,x_2,x_3) =$

$(H_0 x_1, H_0 x_2, H_0 x_3)$. Dans le cas général, un choix possible pour Q est

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\left(\int_0^{x_1} H(s,x_2,x_3)ds,\ \int_0^{x_2} H(x_1,s,x_3)ds,\ \int_0^{x_3} H(x_1,x_2,s)ds\right).$$

Pour trouver des solutions à(1) il est naturel de vouloir minimiser F sur $H^1_\gamma(D^2,\mathbb{R}^3)$. Malheureusement F n'est pas bornée inférieurement. Néanmoins si γ vérifie (après translation éventuelle) la condition suivante

(3) $\|\gamma\|_{L^\infty} \|H\|_{L^\infty} < 1$

On peut montrer que le minimum de F est atteint sur

$$M = \left\{u \in H^1_\gamma(D^2;\mathbb{R}^3)\ \|u\|_{L^\infty} \leqslant \|\gamma\|_{L^\infty}\right\}$$

On a alors

<u>Théorème 1 ([Hildebrandt])</u> : si γ vérifie (3) alors il existe $u_H \in H^1_\gamma(D^2;\mathbb{R}^3)$ vérifiant (1) telle que

$$\|u_H\|_{L^\infty} \leqslant \|\gamma\|_{L^\infty}.$$

De plus u_H est un minimum local strict de F.

Soit u_0 l'extension harmonique de γ : (ie. u_0 vérifie $-\Delta u = 0$, $u_0 = \gamma$ sur ∂D^2). u_H est très proche de u_0 au sens suivant

<u>Lemme 1</u> : On a

(4) $(|E(u_H)-E(u_0)|) \leqslant C(\gamma)\, E(u_0)$.

où $C(\gamma) \longrightarrow 0$ quand $\gamma \longrightarrow 0$ dans $H^{1/2}$.

Pour trouver d'autres solutions que u_H, par des méthodes variationnelles, on considère les suites de Palais-Smale pour F. Soit u^n une telle suite. Elle vérifie $F(u^n) < C$ et

(5) $-\Delta u^n = 2H(u^n)\, u^n_x \wedge u^n_y + f^n$

où $f^n \longrightarrow 0$ dans H^{-1} [(4) exprime que $dF(u^n) \longrightarrow 0$] . On démontre alors le théorème suivant.

<u>Théorème 2</u> : [Bethuel 2]. Supposons que H vérifie

(6) $\|H\|_{L^\infty} \leqslant C$

(7) $\|\nabla H\|_{L^\infty} \leqslant C$

Soit u^n une suite de $H^1(\Omega^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $u^n \longrightarrow u$ dans H^1 faible et telle que

$$-\Delta u^n = 2H(u^n)\, u^n_x \wedge u^n_y + f^n$$

avec $f^n \in H^{-1}$, $\|f^n\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0$. Alors u vérifie

$$-\Delta u = 2H(u)\, u_x \wedge u_y$$

Dans le cas où $H=H_0$ est constant, la preuve du théorème 1 est facile à obtenir (voir [Wente] ou [Brezis-Coron]). En effet si $u \in C^\infty$, on a

(8) $u_x \wedge u_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u \wedge uy) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x \wedge u)\right]$

Si φ est une fonction test de $C^\infty_0(B^2;\mathbb{R}^3)$ on a

$$I(u) = \int \varphi u_x \wedge u_y = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} u \wedge u_y + \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} u_x \wedge u$$

et cette égalité reste vraie pour $u \in H^1$ par approximation. On vérifie alors aisément que si $u^n \longrightarrow u$ faible dans H^1, alors $I(u^n) \longrightarrow I(u)$. On peut donc passer à la limite dans la non linéarité, et le Théorème 2 en découle (pour $H=C^{te}$).

Lorsque H est variable, l'intégrale $I_H(u^n) = \int \varphi H(u^n) u^n_x \wedge u^n_y$ n'est plus continue par convergence faible et il faut alors utiliser le couplage lié à l'équation.

F. Pacard a donné une démonstration du théorème 2 dans le

cas particulier où $f^n = 0$ et $u^n \in C^3$. Elle utilise des estimées à a priori pour des solutions régulières de (1), basée sur des inégalités de type Böchner et une méthode de recouvrement due à Sachs et Uhlenbeck ([Sc U], voir aussi Schoen [Sc]).

La preuve du théorème 2 comporte trois étapes principales.

- Une approximation de u^n par des application régulières et vérifiant une équation du même type ;

- une méthode de recouvrement-recollement, qui va faire apparaître des termes de bord.

- une estimée qui permet de comparer des termes de bord, utilisant de manière essentielle le résultat de compensation suivant, du à Wente :

<u>Théorème 3</u> ([Wente] voir aussi [Brezis-Coron]). Soit $u \in H^1(D^2;\mathbb{R}^3)$, et $\varphi \in W_0^{1,1}$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = u_x \wedge u_y \text{ dans } D^2 \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial D^2 \end{cases}$$

Alors $\varphi \in H^1 \cap L^\infty$ et

(9) $\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^2} \leqslant C \|\nabla u\|^2_{L^2}$.

II Démonstration du théorème 2

II-1 une technique d'approximation

On a le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 4 : Soit $v \in H^1_\gamma(\Omega,\mathbb{R}^3)$, $f \in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ (Ω domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$), tels que

$$-\Delta v = 2H(v)\, v_x \wedge v_y + f.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des applications $\bar{v} \in C^3_\gamma(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\bar{f} \in C^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$ et $\bar{g} \in C^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$, telle que

$$-\Delta\bar{v} = 2H(\bar{v})\, \bar{v}_x \wedge \bar{v}_y + \bar{f} + \bar{g}$$

$$\text{et } \|v-\bar{v}\|_{H^1} + \|f-\bar{f}\|_{H^{-1}} + \int |\bar{g}| < \varepsilon .$$

Le théorème 4 permet de régulariser la suite u^n, qui sera dorénavant remplacée par une suite $\bar{u}^n$ telle que

. $\bar{u}^n \in C^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$

. $\bar{u}^n \longrightarrow u$ dans H^1 faible

. $\bar{u}^n$ vérifie

$$(10) \quad -\Delta\bar{u}^n = 2\,H(\bar{u}^n)\;\bar{u}^n_x \wedge \bar{u}^n_y + \bar{f}^n + \bar{g}^n \quad \text{avec}$$

$$\bar{f}^n \in C^3,\ \bar{g}^n \in C^3,\ \text{et } \|\bar{f}^n\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \quad \int |\bar{g}|^n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

II-2 Une méthode de recouvrement-recollement

L'idée principale est de construire une nouvelle suite $\underline{u}(n,m)$(où m est un nouveau paramètre, défini plus bas) qui converge fortement vers u, et qui vérifie une équation proche de (1), (de sorte que l'on peut passer à la limite dans la non-linéarité). Nous utilisons un argument inspiré de [Be 1].

Tout d'abord, nous divisons (II-2.1) le domaine en carrés C_r, de coté de longueur $\frac{1}{m}$, choisis de manière adéquate. Sur chaque carré C_r $\underline{u}(n,m)$ sera la solution de Hildebrandt avec pour donnée au bord $\bar{u}^n$, sur ∂C_r, quand il est possible de la définir (sinon on prendra l'extension harmonique de la valeur au bord). On montre alors que $\underline{u}(n,m)$ converge fortement vers u quand $n \longrightarrow +\infty$ $n \longrightarrow +\infty$. Enfin (II.2-3) on calcule l'Equation pour $\underline{u}(n,m)$ et on s'aperçoit qu'on a essentiellement besoin de calculer des termes de bord.

II.2-1 : Division en carré $\underline{C}_r$

On montre que l'on peut diviser le domaine en carrés C_r, contigus, tels que C_r est translaté de $\left[-\frac{1}{2m}\ \frac{1}{2m}\right]^2$ et

(11) . $\overline{u}^n \longrightarrow u$ dans $H^{1/2}(\partial C_r)$ et $C^{0,\alpha}$ pour tout carré C_r

(12) . $\Sigma\, E(u,\partial C_r) \leqslant Cm\, E(u)$, où $E(u;\partial C_r)=\int_{\partial C_r} |\nabla u|^2$ et $E(u)=\int_\Omega |\nabla u|^2$.

On note alors Q_m la réunion des carrés C_r tels que

(13) $\quad \|u\|_{L^\infty(\partial C_r)} \; \|H\|_{L^\infty} < 1.$

et P_m le complémentaire de Q_m. On montre alors en utilisant (12) que $\mathrm{mes}(P_m) \longrightarrow 0$, quand $m \longrightarrow +\infty$.

Pour tout carré C_r, soit $u_0(n,m)$ vérifiant

$$(14)\quad \begin{cases} -\Delta u_0(n,m) = 0 \text{ dans } C_r \\ u_0(n,m) = \overline{u}^n \text{ sur } \partial C_r \end{cases}$$

Si $C_r \subset Q_m$, on définit $\underline{u}(n,m)$ comme la solution de Hildebrandt (théorème 1) avec pour donnée au bord $\overline{u}^n$. Donc $\underline{u}(n,m)$ vérifie

$$(15)\quad \begin{cases} -\Delta \underline{u}(n,m) = 2H(\underline{u}(n,m))\underline{u}(n,m)_x \wedge \underline{u}(n,m)_y \text{ dans } C_r \\ \underline{u}(n,m) = \overline{u}^n \qquad \text{sur } \partial C_r \end{cases}$$

Si $C_r \subset P_m$ on pose $\underline{u}(n,m) = u_0(n,m)$. Il est clair que $\underline{u}(n,m) \in H^1 \cap C^0$, $u_0(n,m) \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap C^0$, et (11) implique que $u_0(n,m) \longrightarrow u$ dans H^1 en utilisant le lemme 1 et (11) on montre alors que $\|u_0(n,m) - \underline{u}(n,m)\|_{H^1} \longrightarrow 0$ et donc que $\underline{u}(n,m) \longrightarrow u$ dans H^1.

II-2-2 Equation d'Euler pour $\underline{u}(n,m)$

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de montrer que pour $\zeta \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$I(u,\zeta) = 0$$

où pour $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$I(v,\zeta) = \int \nabla v.\nabla\zeta - 2\int H(v)\cdot v_x \wedge v_y \cdot \zeta$$

Calculons $I(\underline{u}(n,m),\zeta)$. On obtient en utilisant (10),(15), en

intégrant par partie

$$I(\underline{u}(n,m),\zeta) = \Sigma\int_{\partial C_r} \zeta \frac{\partial \underline{u}(n,m)}{\partial n} + R(n,m,\zeta)$$

$$= \Sigma\int_{\partial C_r} \zeta \frac{\partial \underline{u}(n,m)-\partial \overline{u}^n}{\partial n} + R(n,m,\zeta)$$

où

$$R(n,m,\zeta) = \sum_{C_r \text{CPm}} -2H(\underline{u}(n,m)\ \underline{u}(n,m)_x \wedge \underline{u}(n,m)_y \zeta$$

comme $\text{mes}(P_m) \longrightarrow 0$, $|R(n,m,\zeta)| \longrightarrow 0$.

On a donc

$$(16)\quad |I(\underline{u}(n,m),\zeta)| \leqslant |\zeta|_{L^\infty} \Sigma\int_{\partial C_r} \left|\frac{\partial \underline{u}(n,m)- \partial \overline{u}^n}{\partial n}\right| + |\zeta|_{L^\infty} R(n,m,\zeta)|$$

Par ailleurs comme $\underline{u}(n,m) \longrightarrow u$ dans H^1, $I(\underline{u}(n,m),\zeta) \longrightarrow I(u,\zeta)$ (pour une sous-suite) et donc, pour démontrer le théorème 2, il suffit de montrer que

$$I(\underline{u}(n,m),\zeta) \longrightarrow 0, \qquad \text{pour tout } \zeta \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Pour ce faire, il faut montrer que la contribution des termes de bord dans (16) converge vers zéro. En adaptant légèrement la méthode présentée ci-dessus on peut alors conclure grâce au Théorème 5 ci-dessous.

II-2-3 Comparaison de termes de bord

On considère deux applications de classe C^3 de $C^2 = [0,1]^2$ vers $\mathbb{R}^3$, v_0 et v_1, telles que $v_0 = v_1 = \gamma$ sur ∂C^2. Posons

$$\overline{E} = \max(\int |\nabla v_0|^2, \int |\nabla v_1|^2)$$

et supposons $\overline{E} < 1$, et que v_0 et v_1 vérifient

$$(17)\quad -\Delta v_0 = 2H(v_0)\ v_{0x} \wedge v_{0y} + f_0 + g_0$$

$$(18)\quad -\Delta v_1 = 2H(v_1)\ v_{1x} \wedge v_{1y} + f_1 + g_1$$

$$(19)\quad v_0 = v_1 = \gamma \text{ sur } \partial C^2$$

où f_0, g_0, f_1, g_1 sont régulières (C^3) et telles que

$$(20)\quad \int |g_0| + \int |g_1| + |f_0|_{H^{-1}} + |f_1|_{H^{-1}} \leqslant \overline{E}^{6} .$$

en utilisant l'isomorphisme $H^{-1} \longrightarrow H_0^1$ on peut écrire $f_0 = \Delta h_0$, $f_1 = \Delta h_1$. On a :

<u>Théorème 5</u> : Soit $0 < \delta < 1$, et $\alpha < \delta$ il existe $\eta \in [\alpha-\delta, \alpha]$ tel que

$$(21)\quad \int_{\partial C(\eta)} \left|\frac{\partial(v_0 - v_1)}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial h_1}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial h_2}{\partial n}\right| \leqslant \frac{C}{\delta^{3/2}} \overline{E}^{11/8}$$

et

$$(22)\quad \operatorname{Sup} \{|v_0 - v_1| \quad x \in C(\eta)\} \leqslant \frac{C}{\delta^2} \overline{E}^{11/8}$$

où

$$C(\eta) = \left\{(x,y) \in C^2,\ \left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \eta/2,\ \left|y - \frac{1}{2}\right| \leqslant \eta/2\right\} \blacksquare$$

La preuve du Théorème 5 utilise de manière essentielle deux ingrédients :

- Le résultat de compensation de Wente (théorème 3)
- La formule de la coaire (généralisée) de Federer et Fleming ci-dessous.

<u>Théorème 6</u> : Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, borné. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, et et $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ des applications régulières. On a, pour tout $A \subset \Omega$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{f^{-1}(y) \cap A} g\right] dy = \int_A |\nabla f| \cdot g .$$

<u>Idée de la démonstration du théorème 5</u> :

On pose $\Phi = v_0 - v_1$ et on considère, pour $\varepsilon > 0$ les ensembles

$$W(\varepsilon) = \left\{x \in C^2,\ |v_0 - v_1| = |\Phi(x)| \leqslant \varepsilon\right\}$$

et

$$V(\varepsilon) = |\Phi|^{-1}(\{\varepsilon\}) = \partial W(\varepsilon) \backslash \partial C^2$$

Nous allons estimer

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{W(\varepsilon)} |\nabla (v_0 - v_1)|^2 = \int_{W(\varepsilon)} |\nabla\Phi|^2$$

On a une première estimée, qui n'utilise pas la compensation (Théorème 3)

<u>Lemme 2</u> : Pour $\varepsilon \geqslant \bar{E}^4$ on a

(23) $\Lambda(\varepsilon) \leqslant C\,\bar{E}\,\varepsilon$

où C ne dépend que de $\|H\|_{L^\infty}$.

<u>preuve du lemme 2</u> : On multiplie les équations (17) et (18) par Φ en intégrant sur $W(\varepsilon)$ on obtient, pour tout ε

$$(23)\quad \Lambda(\varepsilon) \leqslant \varepsilon \int_{V(\varepsilon)} \frac{\partial|\Phi|}{\partial n} + \int_{W(\varepsilon)} 2|\Phi|\,|[H(v_0)(v_{0x}\wedge v_{0y} - H(v_1)v_{1x}\wedge v_{1y})]$$

$$+ \int_{W(\varepsilon)} (f_0 - f_1)\,\Phi + \int_{W(\varepsilon)} \Delta(h_0 - h_1)\,\Phi$$

On écrit ensuite

$$(25)\quad \int_{W(\varepsilon)} \Delta(h_0 - h_1)\,\nabla\Phi + \int_{V(\varepsilon)} \frac{\partial(h_0 - h_1)}{\partial n}\,\Phi.$$

Le terme le plus délicat à estimer est $\left|\int \frac{\partial h_0 - h_1}{\partial n}\,\Phi\right| \leqslant \varepsilon \int \left|\frac{\partial h_0 - h_1}{\partial n}\right|$.

A cet effet nous utiliserons la formule de la coaire (Théorème 6)

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{V(\varepsilon)} \left|\frac{\partial h_0 - h_1}{\partial n}\right| \leqslant \int_{W(2\varepsilon)} |\nabla(h_0 - h_1)|\,|\nabla\Phi| \leqslant \left[\int |\nabla(h_0 - h_1)|^2\right]^{1/2} \left[\int |\nabla\Phi|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant C\bar{E}^6$$

Comme $\varepsilon > \bar{E}^2$, il existe donc, par la formule de la moyenne

$\varepsilon \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que

$$(26)\quad \int_{V(\varepsilon_1)} \left|\frac{\partial(h_0 - h_1)}{\partial n}\right| \leqslant C\bar{E}^4 \leqslant C\bar{E}^2\,\varepsilon_1$$

On estime alors $\Lambda(\varepsilon_1) \geqslant \Lambda(\varepsilon)$. Pour calculer $\int_{V(\varepsilon_1)} \frac{\partial|\Phi|}{\partial n}$, on multiplie les équations (17)et(18) par $\frac{\Phi}{|\Phi|}$, on intègre sur $C^2 \setminus W(\varepsilon_1)$, et on soustrait. On obtient alors, après quelques estimées faciles

$$(27)\quad \int_{V(\varepsilon_1)} \frac{\partial |\Phi|}{\partial n} \leqslant C\overline{E}$$

en combinant (24), (25), (26), (27) on obtient finalement l'estimée du Lemme 2.

En utilisant le phénomène de compensation, on peut obtenir un résultat plus fin. Soit $\tilde{W}(\varepsilon)$ la composante connexe de $W(\varepsilon)$ contenant ∂C^2, et soit $\tilde{V}(\varepsilon)=\partial\tilde{W}(\varepsilon) \setminus \partial C^2$. Posons $\tilde{\Lambda}(\varepsilon)=\int_{\tilde{W}(\varepsilon)} |\nabla\Phi|^2$.

On a

<u>Lemme 3</u> : Pour tout $\overline{E}^2 \leqslant \varepsilon < \overline{E}^{1/2}$, on a

$$(28)\quad \tilde{\Lambda}(\varepsilon) \leqslant C\overline{E}^{11/8}\,\varepsilon$$

<u>Fin de la démonstration du Théorème 5</u> : Posons, pour $\varepsilon > 0$

$$L(\varepsilon) = \mathcal{H}^1\left(\tilde{V}(\varepsilon)\right)$$

La formule de la coaire montre que (avec g=1 dans le théorème 6)

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} L(\varepsilon')d\varepsilon' \leqslant \int_{\tilde{W}(\varepsilon)} |\nabla\Phi| \leqslant \left[\tilde{\Lambda}(\varepsilon)\right]^{1/2} \leqslant \left[C\overline{E}^{11/8}\,\varepsilon\right]^{1/2}$$

Donc il existe $\varepsilon_1 \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que

$$L(\varepsilon_1) \leqslant \left[\frac{C\overline{E}^{11/8}}{\varepsilon}\right]^{1/2}$$

choisissons $\varepsilon = 64\,\dfrac{C\overline{E}^{11/8}}{\delta^2}$. On obtient

$$L(\varepsilon_1) \leqslant \frac{\delta}{8}.$$

Il en résulte que pour un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $]\alpha-\delta,\alpha[$ de mesure supérieure à $\delta/2$, et pour $\eta \in \mathcal{A}$ on a

$$\partial C(\eta) \subset \tilde{W}(\varepsilon_1)$$

Par conséquent

$$\int_{\mathcal{A}}\left[\int_{C(\eta)}|\nabla(v_0-v_1)|^2\right] d\eta \leqslant \int_{W(\varepsilon_1)}|\nabla(v_0-v_1)|^2 \leqslant \tilde{\Lambda}(\varepsilon_1)$$

Comme mes $\mathcal{A} \geqslant \frac{\delta}{2}$, pour un sous-ensemble $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$, de mesure supérieure à $\delta/4$ on a, pour $\eta \in \mathcal{A}'$

$$\int_{\partial C(\eta)}|\nabla(v_0-v_1)|^2 \leqslant C\bar{E}^{11/8}\,\varepsilon/\delta \leqslant \left(C\bar{E}^{11/8}\right)^2/\delta^3$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$\int_{C(\eta)}|\nabla(v_0-v_1)| \leqslant C\bar{E}^{11/8}/\delta^{3/2}$$

et les estimées en $|\nabla h_0| + |\nabla h_1|$ s'obtiennent de manière similaire. Ceci termine la preuve du Théorème 5.

III-4 Fin de la preuve du théorème 2

La preuve du théorème 2 s'obtient en combinant les trois parties précédentes. Rappelons que l'on cherche à démontrer que $I(u,\zeta)=0$, pour tout $\zeta \in C_0^\infty(R)$. On introduit un nouveau paramètre K (que l'on fera tendre vers zéro ultérieurement), et on choisit δ (qui apparait dans le théorème 5) en posant $\delta=K^{1/7}$. On montre, que pour une sous-suite de $\bar{u}^n$, on peut choisir les C_r tels que

$$\overline{\lim}\, E\left(\bar{u}^n, C_r\backslash C_r(1-\delta)\right) \leqslant C\,\delta\,\bar{M} \text{ où } \bar{M} = \operatorname{Sup}\int\left|\nabla\bar{u}^n\right|^2$$

On considère ensuite les cubes C_r de Ω tels que $E\left(\bar{u}^n ; C_r\right) \geqslant K$.

Leur nombre est inférieur à $\bar{M}/K$. Soit $J(n,m)$ leur réunion.

En utilisant un argument de capacité on montre alors, qu'on a

$$|I(\underline{u}(n,m),\zeta)| \leqslant \sum_{C_r\subset J(n,m)}\int_{C_r(\eta_r)}\left|\frac{\partial\bar{u}^n-\partial\underline{u}(n,m)}{\partial n}\right| |\zeta|_{L^\infty} + O(1) + C\delta$$

Où η_r est choisi dans $\left[\frac{(1-\delta)}{m}, \frac{1}{m}\right]$ en appliquant le Théorème 5 à $\underline{u}(n,m) = \bar{u}^n$, et C_r : les estimées du théorème 5 permettent alors de conclure.

Bibliographie

[Bethuel 1] : The approximation problem for Sobolev maps between manifolds ; à paraître dans Acta Mathematica.

[Bethuel 2] : Weak convergence of Palais-smale sequences for critical functionals ; en préparation.

[Brezis-Coron] : Multiple solutions of H. Systems and Rellich's conjecture Communication on Pure and applied mathematics, 37 (1984) p 149-187.

[Hildebrandt] : On the plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Comm. Pure and Applied Math 23 (1970) p 97-114.

[Pacard] : Weak convergence of surfaces ; prépublication.

[Sachs-Uhlenbeck] The existence of Minimal Immersions of 2-spheres, Ann. Math 113 (1981) p 1-24.

[Schoen] : Analytic aspects of the Harmonic map problem, in Seminar on nonlinear PDE (Chern, ed.), Springer (1984).

[Wente] : Large solutions ot the volume constrained Plateau Problem, Archiv. Rat. Hech. Anal. 75 (1980) p 59-77.