JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-YVES CHEMIN

Poches de tourbillon et structure géométrique dans les fluides incompressibles bidimensionnels

Journées Équations aux dérivées partielles (1991), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1991____A1_0>

POCHES DE TOURBILLON ET STRUCTURE GEOMETRIQUE DANS LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES BIDIMENSIONNELS

Jean-Yves CHEMIN

Centre de mathématiques de l'Ecole Polytechnique,
U.R.A. N° 169 du C.N.R.S.,
91128 PALAISEAU CEDEX

Abstract

We will study the properties of a solution of incompressible Euler system for large time. We suppose that the initial vorticity is the characteristic function of a regular bounded domain. Then the vorticity remains, for every time, the characteristic function of a bounded domain with the same regularity.

Mots-Clefs : champ de vecteurs (peu réguliers), régularité tangentielle, flot, tourbillon (poches de).

Code Matière A.M.S. 35L60 et 76A02.

Introduction

Les résultats principaux exposés ici ont pour motivation première un problème classique de la mécanique d'un fluide parfait bidimensionnel : le problème des poches de tourbillon. Rappelons le cadre dans lequel nous allons travailler. Le mouvement d'un tel fluide est décrit par un champ de vecteurs sur le plan, dépendant du temps, noté v(t,x) et vérifiant

$$(E)\quad \begin{cases} \partial_t v + v.\nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases},$$

où p(t,x) désigne la pression du fluide au point x à l'instant t et où $v.\nabla v = \sum_i v^i \partial_i$. On notera ψ le flot du champ de vecteurs v, c'est-à-dire l'application vérifiant l'équation différentielle suivante : $\partial_t \psi(t,x) = v(t,\psi(t,x))$ et $\psi(0,x) = x$.

La quantité fondamentale dans l'étude de cette équation est le rotationnel du champ des vitesses, aussi appelé tourbillon. Comme nous sommes en dimension deux, cette matrice antisymétrique est identifiée à un réel noté $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$. Le caractère spécifique de la dimension deux est la conservation de ω le long des trajectoires du champ de vecteurs v :

$$(0.1)\quad \partial_t \omega + v.\nabla\omega = 0.$$

Vue la nullité de la divergence du champ de vecteurs v, on peut, si l'on s'en tient au champ de vecteurs bornés, recalculer v, à une constante près, à partir de ω par la formule bien connue suivante, dite loi de Biot-Savart :

$$(0.2)\quad v = \nabla^\perp \Delta^{-1}\omega = \left(-\int \frac{x_2 - y_2}{|x-y|^2}\omega(y)dy\,,\ \int \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2}\omega(y)dy \right).$$

Il est clair que, dès que $\omega \in L^\infty \cap L^q$ avec $q<2$, les intégrales ci-dessus définissent un champ de vecteurs borné. De plus, il est bien connu (et trivial à vérifier) que si ω vérifie (0.1) avec le champ de vecteurs v donné par (0.2), alors v lui-même est solution de (E) avec la donnée initiale déduite de ω_0 par la relation (0.2). Nous nous placerons toujours dans ce cadre et dans l'énoncé des théorèmes, nous ne formulerons les hypothèses que sur le tourbillon.

Le problème des poches de tourbillon est le suivant : supposons que le tourbillon soit, à l'instant initial, la fonction caractéristique d'un ouvert borné dont le bord est de classe $C^{k+\varepsilon}$, où k est un entier strictement positif et ε un réel de l'intervalle $]0,1[$; il est bien connu dans ce cas qu'il existe un unique champ de vecteurs solution du système (E) sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$, dont le tourbillon appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Cette solution est alors quasi-lipschitzienne, c'est-à-dire que son module de continuité est $|x-y|.|\mathrm{Log}|x-y||$. Un tel champ de vecteurs possède un flot ψ à régularité exponentiellement décroissante en fonction du temps, c'est-à-dire que $\psi(t,.)$ est un homéomorphisme de classe $C^{\exp -\alpha t}$. D'après la relation (0.1), le tourbillon à l'instant t est alors la fonction caractéristique d'un ouvert dont la topologie reste inchangée. Par contre, son bord n'est plus a priori que de classe $C^{\exp -\alpha t}$. Ces résultats et cette problématique sont exposés dans [11] par Yudovitch lorsque l'on remplace $\mathbf{R}^2$ par un domaine borné du plan.

Deux questions très naturelles se posent alors:

- le bord de l'ouvert reste-t-il régulier à temps petit?
- si oui, que se passe-t-il pour les temps grands?

Dans le cas où ω_0 est la fonction caractéristique de l'intérieur d'une courbe du plan, fermée, simple et de classe $C^{1+\varepsilon}$, l'approche suivante a été développée (voir par exemple [10]). Il est très facile, dans ce cadre, de vérifier, grâce à la formule de Green, que si le bord reste de classe $C^{1+\varepsilon}$, il existe alors un paramétrage propre x(t,.) du bord vérifiant l'équation

$$\text{(B)} \quad \partial_t x(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}|x(t,s) - x(t,\sigma)|\partial_\sigma x(t,\sigma)\, d\sigma.$$

Dans [10], A. Majda annonce une démonstration de l'existence locale en temps d'une solution de l'équation (B) et, en se fondant sur des expériences numériques (voir [12]), conjecture que le temps d'existence est en général fini et que, dans ce cas, le bord du domaine cesse d'être rectifiable. Une moindre dégradation de la régularité du bord a également été suggérée par des simulations numériques plus récentes (voir [4] et [5]).

Une approche simplificatrice a été proposée par P. Constantin et E. Titi (voir [9]). Dans l'optique de l'équation (B), on étudie de petites perturbations du cercle, qui est bien sûr une solution stationnaire de (B) et on ne retient alors du développement en série du logarithme que les termes quadratiques. Pour cette approximation quadratique de l'équation (B), S. Alinhac a démontré dans [1] un résultat d'instabilité qui inclinait à penser qu'il pouvait ne pas y avoir d'existence globale de solution régulière pour l'équation (B) elle-même.

En ce qui concerne l'existence locale en temps, nous l'avons démontrée dans [6] en oubliant l'équation (B) et en démontrant un contrôle local de la norme lipschitz de la solution de (E) grâce à la régularité tangentielle du tourbillon par rapport à un champ de vecteurs ne s'annulant pas sur le support singulier C^ε du tourbillon.

La motivation essentielle de ce travail est la démonstration du théorème suivant :

Théorème A

Soit ε appartenant à l'intervalle]0,1[, on considère une fonction x_0 de l'espace $C^{1+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)$ paramétrant proprement une courbe de Jordan ; il existe alors une unique solution $x(t,s)$ de l'équation (B) appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^{1+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2))$.

Dans [6], nous avions développé l'étude de l'action itérée de champs de vecteurs peu réguliers qui permettait de déduire du théorème ci-dessus le corrolaire suivant :

Corrolaire B

Soit ε appartenant à l'intervalle]0,1[et k un entier positif non nul, on considère une fonction x_0 de l'espace $C^{k+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)$ paramétrant proprement une courbe de Jordan ; il existe alors une unique solution $x(t,s)$ de l'équation (B) appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^{k+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)) \cap C^\infty(\mathbf{R}; C^{k+\varepsilon-0}(S^1; \mathbf{R}^2))$.

Notre démarche sera la suivante :

- dans le premier paragraphe, nous expliquerons quel concept de régularité permet de voir le théorème précédent comme corrolaire immédiat d'un théorème beaucoup plus général, le théorème 1 ;
- dans le deuxième, nous démontrerons une estimation sur la norme Lipschitz d'un champ de vecteurs ;
- dans le troisième et dernier, nous achèverons, par régularisation des données initiales, puis estimation a priori sur les solutions régulières du système (E) et enfin passage à la limite, la démonstration du théorème 1.

Notations et rappels

Dans toute la suite de cet article, nous prendrons les notations et conventions suivantes :

- ε désignera un réel strictement compris entre 0 et 1;
- si X est un champ de vecteurs du plan, on note $I(A,X)$ l'infimum de $|X(x)|$ pour x parcourant A;
- si f est une distribution sur le plan, on note $\nabla^\perp f$ le champ de vecteurs $(-\partial_2 f, \partial_1 f)$ qui est bien sûr de divergence nulle;
- si Ω est un ouvert du plan et $\varepsilon \in]0,1[$, $C^\varepsilon(\Omega)$ (resp. $Lip(\Omega)$) désigne l'ensemble des

fonctions u bornées sur Ω telles que l'on ait, pour tout x et y dans Ω, $|u(x)-u(y)| \leq C\,|x-y|^{\varepsilon}$ (resp. $|x-y|$) et on notera par $\|.\|_{\varepsilon,\Omega}$ (resp. $\|.\|_{Lip(\Omega)}$) la norme naturelle sur $C^{\varepsilon}(\Omega)$ (resp. $Lip(\Omega)$),

• si $\Omega = \mathbf{R}^2$, on peut caractériser l'espace $C^{\varepsilon}(\Omega)$ noté alors simplement C^{ε} à l'aide d'un découpage dyadique de l'espace des fréquences. Plus précisement, soit $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^2\backslash\{0\})$ telle que $\chi(\xi) = 1 - \Sigma_{q\geq 0}\phi(2^{-q}\xi) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^2)$, on a :

$u \in C^{\varepsilon} \Leftrightarrow \chi(D)u \in L^{\infty}$ et $\|\phi(2^{-q}D)\|_{L^{\infty}} \leq C2^{-q\varepsilon}$, la norme $\|\chi(D)u\|_{L^{\infty}} + \mathrm{Sup}_{q\geq 0}\, 2^{q\varepsilon}\, \|\phi(2^{-q}D)\|_{L^{\infty}}$, notée $\|u\|_r$, étant une norme équivalente à la norme usuelle, la propriété caractéristique servant de définition à l'espace C^r lorsque r est quelconque ; enfin si r=1, on ne trouve pas l'ensemble des fonctions lipschitziennes, mais l'ensemble traditionnellement appelé classe de Zygmund et noté $C^1{}_*$ des fonctions bornées telles que $|u(x+y) + u(x-y) -2u(x)| \leq C\,|y|$;

• on désignera, pour $q\geq 0$, l'opérateur $\phi(2^{-q}D)$ par Δ_q , l'opérateur $\chi(D)$ par Δ_{-1} et enfin, en convenant que $\Delta_p = 0$ lorsque $p\leq -2$, l'opérateur $\Sigma_{p\leq q-1}\Delta_p$ par S_q On désignera par N_0 un entier tel que $\mathrm{Supp}\,\chi(2^{-N_0}\,.) + \mathrm{Supp}\,\phi$ ne rencontre pas l'origine. On pose alors

$$T_a = \sum_{q\geq 0}^{\infty} S_{q-N_0}(a)\Delta_q \text{ puis } R(a,.) = \sum_{|q-q'|\leq N_0} \Delta_q(a)\Delta_{q'} \text{ et, si X est un champ de vecteurs, } T_X = \sum_i T_{X^i}\partial_i\,.$$

Remerciements
Nous tenons à remercier S. Alinhac, J.-M. Bony et G. Lebeau pour de très fructueuses discussions.

1. Théorème général d'existence globale

Pour justifier la définition qui va suivre, il convient d'observer que des techniques tout-à-fait usuelles d'étude des intégrales singulières montrent que le champ de vecteurs associé par la relation (0.2) à une solution de classe $C^{1+\varepsilon}$ de l'équation (B) est lipschitzien. Il apparait alors qu'une réelle compréhension du problème passe par la réponse à la question suivante : si l'on régularise une donnée initiale de type poche de tourbillon, a-t-on, pour les solutions associées aux données régularisées, une estimation uniforme de leur norme lipschitz sur un intervalle de temps fixe? La solution de ce problème impose la construction d'un espace de fonctions adapté, d'où la définition suivante :

Définition 1

Soient A un fermé du plan et X un champ de vecteurs de divergence nulle à coefficients C^{ε}*, on désigne par* $C_{\varepsilon}(A,X)$ *l'ensemble des fonctions bornées du plan telles que :*

(i) $u \in C^{\varepsilon}(\mathbf{R}^2 \backslash A)$,

(ii) $X(x,D)u \in C^{\varepsilon-1}$.

Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de ce travail.

Théorème 1

Soient X_0 *un champ de vecteurs de divergence nulle et* A^0 *un fermé du plan tels que* X_0 *soit de classe* C^{ε} *et* $I(A^0,X_0)$ *strictement positif ; si* $\omega_0 \in C_{\varepsilon}(A^0,X_0) \cap L^q$*, avec* $q<2$*, il existe une unique solution de (E) dans* $C(\mathbf{R}\,; L^{\infty}(\mathbf{R}^2)) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbf{R}\,; Lip\,(\mathbf{R}^2))$ *qui de plus vérifie :*

(i) $X_0(x,D)\psi \in L^{\infty}_{loc}(\mathbf{R};\, C^{\varepsilon})$,

(ii) si $X_t = \psi_t^* X_0$ *et* $A^t = \psi(t,A^0)$*, alors* $\omega(t,.) \in C_{\varepsilon}(A^t,\, X_t)$ *et* $X_t(x,D)v(t,.) \in C^{\varepsilon}$.

Démonstration du théorème A à partir du théorème 1

Soit f_0 une équation $C^{1+\varepsilon}$ de la courbe γ^0, image du cercle $\mathbf{S}^1$ par x_0, on pose $X_0 = \nabla^{\perp} f_0$. On considère alors le fermé A^0 des points du plan à distance suffisamment petite de γ^0 pour que X_0 ne s'annule pas sur A^0. On peut alors appliquer le théorème 1; si l'on observe que, dans le cadre de l'équation (B), on a $x(t,s) = \psi(t,x_0(s))$, on déduit du théorème 1 ci-dessus, en observant que $\partial_s x(t,s) = (X_0(x,D)\psi)(t,x_0(s))$, l'existence d'une solution x de l'équation (B) qui appartient à l'espace $C^{1+\varepsilon}{}_{loc}(\mathbf{R}\times\gamma_0)$.

Remarques

L'énoncé du théorème 1 contient en particulier le fait que le champ de vecteurs v_0 est Lipschitzien.

La difficulté majeure de la démonstration réside dans le contrôle de la norme lipschitz du champ de vecteurs solution au cours du temps, alors que la régularité donnée par les relations (0.1) et (0.2) est moindre ($C^1{}_*$ ou mieux, à dérivées BMO). Dans [6], nous avions démontré une majoration de la norme lipschitz du champ de vecteurs v, qui assurait le caractère lipschitzien de v lorsque son rotationnel ω appartenait à $C_{\varepsilon}(A,X)$. Le point clef pour obtenir l'existence globale consiste à établir une version logarithmique de cette inégalité, c'est-à-dire une version où les données géométriques définissant la régularité additionnelle n'apparaissent qu'au travers d'un logarithme. C'est l'objet du paragraphe qui suit.

2. Contrôle du gradient d'un champ de vecteurs à partir de son rotationnel.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 2.1

Soit ε un réel de l'intervalle $]0,1[$, il existe une constante C telle que, si A est un quelconque fermé du plan et X un champ de vecteurs de classe C^ε, de divergence nulle et ne s'annulant pas sur A, on ait :

$$\|v\|_{Lip} \leq C\{\|v\|_{L^\infty} + \|\omega\|_{L^\infty}(1 + Log\, N_\varepsilon(A,X,\omega))\},$$

$$avec\ N_\varepsilon(A,X,\omega) = \frac{\|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{\varepsilon,\mathbb{R}^2\setminus A}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus A)}}\left(1 + \frac{\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Démonstration

Elle repose sur deux idées très simples. La première, bien connue, est que l'inclusion de l'espace C^0_* dans L^∞ est vraie, au logarithme de la norme C^ε près. Plus précisement, on a le lemme suivant :

Lemme 2.2

Les réels strictement positifs ε et α étant donnés, il existe une constante C telle que, pour toute fonction f et tout couple (a,b) de réels vérifiant $\|f\|_0 \leq \alpha a$, $\|f\|_\varepsilon \leq \alpha b$ et $a \leq b$, on ait,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq Ca\left(1 + Log\left(\frac{b}{a}\right)\right).$$

Démonstration

On écrit $f = (Id - S_N)f + S_N f$, la caractérisation des espaces de Hölder entraine alors que l'on a $\|f\|_{L^\infty} \leq \alpha(N+1)a + \alpha 2^{-(N+1)\varepsilon} b$; on obtient ainsi le lemme en choisissant par exemple

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} Log \frac{b}{a}\right] + 1 .$$

La seconde idée est la suivante. Si $X = \partial_1$, la majoration de $\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty}$ résulte du lemme ci-dessus. Or, $\|\partial_2{}^2\phi\|_{L^\infty} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \|\partial_1{}^2\phi\|_{L^\infty}$, d'où le théorème 2.1 dans ce cas très particulier.

Pour passer au cas général, deux difficultés se présentent. La première provient de la nécessaire troncature en espace et se résout facilement en analysant avec un peu de précaution la pseudolocalité des multiplicateurs de Fourier. La seconde, beaucoup plus sérieuse, provient de la faible régularité du champ de vecteurs X et sa possible annulation au cours de l'évolution. L'un des points cruciaux est que toutes ces tendances à perturber l'inégalité n'apparaissent, elles aussi qu'atténuées par un logarithme.

Pour obtenir ce résultat, il nous faut procéder graduellement. Ainsi, allons nous commencer par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.3

Soit ε un réel de l'intervalle $]0,1[$, il existe une constante C (ne dépendant que de ε) telle que si A est un fermé du plan et Y un champ de vecteurs de classe C^ε ne s'annulant pas sur A, on ait :

$$\|v\|_{Lip} \leq C \left\{ \|v\|_{L^\infty} + \|\omega\|_{L^\infty} \frac{\|Y\|_{L^\infty}^2}{I(A,Y)^2} \left(1 + Log \left(\frac{\|Y\|_\varepsilon^2}{I(A,Y)^2} + \frac{\|Y\|_\varepsilon \|Y(x,D)v\|_\varepsilon}{I(A,Y)^2 \|\omega\|_{L^\infty}} \right) + Log \frac{\|\omega\|_{\varepsilon, R^2 \setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(R^2 \setminus A)}} \right) \right\}.$$

Démonstration

Nous allons, dans un premier temps nous concentrer sur les hautes fréquences. On posera $a = (Id-\chi(D))\Delta^{-1}\omega$. Il faut majorer $\|\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty}$. L'étape décisive est la majoration de $\|Y(x,D)\partial_i a\|_{L^\infty}$.

Avant d'aller plus loin, nous rappelons sans démonstration quelques propriétés du calcul paradifférentiel de Bony (voir [3]) qui sont résumés dans le lemme suivant :

Lemme 2.4

Soient r, s et m trois nombres réels et σ une fonction indéfiniment dérivable telle que, pour tout ξ de norme plus grande que 1et tout réel λ supérieur à 1, $\sigma(\lambda\xi) = \lambda^m \sigma(\xi)$;

(i) $\|T_a b\|_s \leq C\|a\|_{L^\infty}\|b\|_s$ et si $r < 0$, $\|T_a b\|_{r+s} \leq C\|a\|_r\|b\|_s$;

(ii) si $r+s > 0$, $\|R(a,b)\|_{r+s} \leq C\|a\|_r\|b\|_s$;

(iii) $\|[T_a, \sigma(D)]b\|_{s-m+1} \leq C\|\nabla a\|_{L^\infty}\|b\|_s$ et si $r < 1$, $\|[T_a, \sigma(D)]b\|_{s-m+r} \leq C\|\nabla a\|_{r-1}\|b\|_s$

On va utiliser une décomposition dans l'espace des fréquences inspirée de celle en paraproduit et reste. On a

$$(2.1)\quad Y(x,D)\,\partial_i a = \Phi_1+\Phi_2 \text{ avec } \Phi_1 = T_Y\partial_i a \text{ et } \Phi_2 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{q=-1}^{+\infty} S_{q+N_0}(\partial_i\partial_k a)\Delta_q Y^k.$$

Il est clair que $\|\Phi_1\|_0 \le C\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}$. Le fait que, pour tout $\varepsilon' \in]0,\varepsilon[$, on ait

$$\|\Phi_1\|_{\varepsilon'} \le C_{\varepsilon,\varepsilon'}\,(\|Y\|_\varepsilon\,\|\omega\|_{L^\infty} + \|Y(x,D)v\|_\varepsilon),$$

résulte de l'application du lemme 2.4 et de techniques usuelles de calcul paradifférentiel. Le lemme 2.2 assure alors que

$$(2.2)\quad \|\Phi_1\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\left(\frac{\|Y(x,D)v\|_\varepsilon + \|Y\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty}}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right)\right).$$

Le terme Φ_2 se traite de manière différente. On fixe un entier N et on écrit $\Phi_2 = \Phi_{3,N} + \Phi_{4,N}$ avec :

$$\Phi_{3,N} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{q=-1}^{N-1} S_{q+N_0}(\partial_k\partial_i a)\Delta_q Y^k,$$

$$\Phi_{4,N} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{q=N}^{\infty} S_{q+N_0}(\partial_k\partial_i a)\Delta_q Y^k.$$

La majoration de $\Phi_{4,N}$ se fait en utilisant la régularité C^ε du champ de vecteurs Y, d'où :

$$\|\Phi_{4,N}\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon 2^{-N\varepsilon/2}\|\omega\|_{L^\infty}\|Y\|_\varepsilon.$$

Le terme $\Phi_{3,N}$ doit se traiter avec un peu plus de finesse. Un regroupement d'Abel entraine que

$$\Phi_{3,N} = \sum_{k=1}^{2}\left\{S_{N+1}(Y^k)\Delta_{N-N_0}\partial_k\partial_i a - \sum_{q=-1}^{N-1} S_{q+1}(Y^k)\Delta_{q-N_0}\partial_k\partial_i a\right\}, \text{ d'où}$$

$$\|\Phi_{3,N}\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon N\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}.$$

On optimise alors le choix de N en prenant par exemple $\frac{N}{2} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}}\right] + 1$, d'où il vient :

$$(2.3)\quad \|\Phi_2\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}}\right).$$

En appliquant (2.1-3), on obtient, pour tout $i \in \{1,2\}$:

$$(2.4)\quad \|Y(x,D)\partial_i a\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon \|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty} + \|Y(x,D))v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Il suffit alors d'observer, qu'en posant $Y^3 = Y^1$, on a,

$$|Y(x)|^2\partial_i^2 = Y^1(x)Y(x,D)\partial_1 - Y^2(x)Y(x,D)\partial_2 + (-1)^{i+1}\left(Y^{i+1}(x)\right)^2\Delta \text{ et}$$
$$|Y(x)|^2\partial_1\,\partial_2 = Y^1(x)Y(x,D)\partial_2 - Y^2(x)Y(x,D)\partial_1 - Y^1(x)Y^2(x)(\partial_2^2 - \partial_1^2)\ ,$$

pour conclure, d'après (2.4), à l'inégalité suivante, pour tout i et j valant 1 ou 2 :

$$(2.5)\quad \|\,|Y(x)|^2\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon (\|Y\|_{L^\infty})^2\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty} + \|Y(x,D))v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Reste à tronquer en dehors de A. Pour ce faire, on va poser $\alpha = (I(A,X) / 2\|Y\|_\varepsilon)^{1/\varepsilon}$ et considérer une fonction f (resp. g) appartenant à $C^\varepsilon(\mathbf{R}^2; [0,1])$, valant 1 près de $A_{\alpha/2}$ (resp. $A_{3\alpha/4}$) et supportée dans $A_{3\alpha/4}$(resp. $A_{5\alpha/6}$) telle que $\|f\|_\varepsilon \le C\alpha^{-\varepsilon}$ (A_α désignant l'ensemble des points du plan dont la distance à A est inférieure à α). On a clairement que $2I(A_\alpha,Y) \ge I(A,Y)$, d'où

$$(2.6)\quad \|g(\mathrm{Id}-\chi(D))\nabla v\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon \frac{\|Y\|^2_{L^\infty}}{I(A,Y)^2}\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty} + \|Y(x,D))v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

On va maintenant majorer $\|(1-g)\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty}$. Au vu du support de 1-f, il est clair que

$$\|(1-f)\omega\|_\varepsilon \le C\alpha^{-\varepsilon}\|\omega\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\setminus A} \text{ et que } \|(1-f)\omega\|_{L^\infty} \le C\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A)}.$$

Le lemme 2.2 assure alors que

$$(2.7)\quad \|(\mathrm{Id} - \chi(D))\partial_i\partial_j\Delta^{-1}(1-f)\omega\|_{L^\infty} \le C\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|\omega\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A)}} - \mathrm{Log}\alpha\right).$$

Pour majorer $\|(1-g)\partial_i\partial_j(\mathrm{Id} - \chi(D))\Delta^{-1}f\omega\|_{L^\infty}$, on a recours au lemme suivant, démontré dans [8] :

Lemme 2.5

Soit σ une fonction de classe C^∞ telle que $|\partial^\alpha\sigma(\xi)| \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|/2}$, il existe une constante C telle que, si P et Q sont deux fermés disjoints tels que $d(P,Q) = \mathrm{Inf}\,\{|x-y| \,/\, (x,y) \in P\times Q\}$ soit non nul, alors, pour toute fonction bornée h supportée dans Q, on a, en posant $\mathrm{Log}^- = \mathrm{Min}\,(0, \mathrm{Log})$:

$$\|\sigma(D)h\|_{L^\infty(P)} \le C(\,1 - \mathrm{Log}^-\, d(P,Q))\,\|h\|_{L^\infty}.$$

Remarque

Nous retrouverons ici le fait que les multiplicateurs de Fourier d'ordre 0 n'opèrent certes pas dans L^∞, mais que cette non-opérance n'apparait jamais qu'au travers d'un logarithme.

Il résulte de l'application du lemme 2.5 ci-dessus, avec P = Supp (1-g) et Q = Supp f, que

$$(2.8)\quad \|(1-g)\partial_i\partial_j(\mathrm{Id}-\chi(D))\Delta^{-1}f\omega\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{L^\infty}(1-\mathrm{Log}\alpha).$$

Il résulte de (2.7) et de (2.8) que

$$(2.9)\quad \|(1-g)(\mathrm{Id}-\chi(D))\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{L^\infty}\left(1+\mathrm{Log}\frac{\|\omega\|_{\varepsilon,\,\mathbb{R}^2\setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus A)}}-\mathrm{Log}\alpha\right).$$

Reste maitenant le cas des basses fréquences. Il suffit de dire que

$$(2.10)\quad \|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\,\|v\|_{L^\infty}.$$

En décomposant ∇v en $\nabla v = g(\mathrm{Id}-\chi(D))\nabla v + (1-g)(\mathrm{Id}-\chi(D))\nabla v + \chi(D)\nabla v$ et en utilisant alors (2.6), (2.9) et (2.10), on obtient le lemme 2.3.

Remarque.

Le lemme 2.3 démontré ci-dessus n'utilise en rien la nullité de la divergence du champ de vecteurs Y, ce qui n'entraine aucune restriction à son application. Soit X un champ de vecteurs à divergence nulle, la structure striée qu'il définit n'est fidèlement décrite que par un champ de vecteurs colinéaire à X, unitaire dans la région qui nous intéresse. Ce champ de vecteurs n'a bien évidemment aucune raison d'être à divergence nulle. Ceci est la clef du passage du lemme 2.3, où les données géométriques liées à la structure striée apparaissent "au carré", au théorème 2.1 où ces mêmes données ne sont présentes qu'adoucies par un logarithme.

Suivant cette idée, nous allons appliquer le lemme 2.3 à un champ de vecteurs Y judicieusement construit à partir de X. Pour ce faire, posons $\beta = (I(A,X)\ /\ 2\|X\|_\varepsilon)^{1/\varepsilon}$, et si ρ désigne une fonction régulière supportée dans la boule unité du plan et d'intégrale 1, on pose alors :

$$y = \frac{16}{\beta^2}\rho\left(\frac{4}{\beta}\,\cdot\right) * 1_{A_{\beta/2}} \text{ et } Y(x) = \tau(x)X(x) \text{ avec } \tau(x) = \frac{y(x)}{X(x)}.$$

Remarquons immédiatement que $\|Y\|_{L^\infty} = I(A,Y) = 1$. Appliqué avec un ε' strictement compris entre 0 et ε (par exemple $\varepsilon' = \varepsilon/2$), le lemme 2.3 assure

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\left\{\|v\|_{L^\infty}+\|\omega\|_{L^\infty}\left(1+\mathrm{Log}\left(\|Y\|_\varepsilon\left(1+\frac{\|Y(x,D)v\|_{\varepsilon'}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right)\right)+\mathrm{Log}\,\frac{\|\omega\|_{\varepsilon,\,\mathbf{R}^2\setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A)}}\right)\right\}.$$

Par définition de Y, il est clair que

$$\|Y\|_\varepsilon \leq C\,\frac{\|X\|_\varepsilon}{I(A,X)} \text{ et que } \|Y(x,D)v\|_{\varepsilon'} \leq C\,\frac{\|X\|_\varepsilon\|X(x,D)v\|_{\varepsilon'}}{I(A,X)^2}.$$

La majoration de $\|X(x,D)v\|_{\varepsilon'}$ se fait en utilisant le lemme ci-dessous, démontré dans [8].

Lemme 2.6

Si v et X sont deux champs de vecteurs de divergence nulle et si ω est le tourbillon de v, on a alors $X(x,D)v = W_1(X,v)+W_2(X,v)$ avec :

(i) $\|W_1(X,v)\|_\varepsilon \leq C\,\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}$,

(ii) $\|W_2(X,v)\|_\varepsilon \leq C\,\|X\|_\varepsilon\,\|v\|_{Lip}$ *et pour tout* $\varepsilon' < \varepsilon$, $\|W_2(X,v)\|_{\varepsilon'} \leq C_{\varepsilon'}\,\|X\|_\varepsilon\,\|\omega\|_{L^\infty}$.

La démonstration du théorème 2.1 est alors achevée.

3. Démonstration du théorème 1.

Les trois étapes de la démonstration sont maintenant la régularisation de la donnée initiale, l'estimation a priori sur les solution régulières globales associés et le passage à la limite.

- **Régularisation des données initiales**

Soit v_0 une donnée initiale vérifiant les hypothèses du théorème 1, on considère une fonction $\theta \in C_0^\infty(B(0,\alpha))$ d'intégrale 1, α étant à choisir. On pose alors $\theta_n = n^{-2}\theta(n^{-1}.)$ et $v_{0,n}$ (resp. $\omega_{0,n}$) $= \theta_n * v_0$ (resp. ω_0). Comme v_0 est uniformément continu, la suite $(v_{0,n})_{n\in \mathbf{N}}$ converge vers v_0 dans L^∞. On désignera par $(v_n)_{n\in \mathbf{N}}$ la suite de solutions (globales d'après [2]) associées aux données initiales $(v_{0,n})_{n\in \mathbf{N}}$. Il est clair que

$$(3.1)\quad \|\omega_{0,n}\|_{L^q(\text{resp. } L^\infty)} \leq \|\omega_0\|_{L^q(\text{resp. } L^\infty)}.$$

On choisit α suffisamment petit pour que, sur l'ensemble noté A^0_α des points à distance inférieure à α de A^0, on ait

$$(3.2)\quad 2I(A^0_\alpha,X_0) \geq I(A^0,X_0).$$

En outre, si x et x' sont deux points de $\mathbf{R}^2\setminus A^0_\alpha$, alors, pour tout y dans $B(0,\alpha)$, x-y et x'-y sont dans $\mathbf{R}^2\backslash A^0$; il en résulte que

$$(3.3)\quad \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0_\alpha)} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0)} \text{ et } \|\omega_{0,n}\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\backslash A^0_\alpha} \leq \|\omega_0\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\backslash A^0}\,.$$

Il résulte du lemme 2.4 par des méthodes standard de calcul paradiférentiel que

$$(3.4)\quad \|X_0(x,D)\omega_{0,n}\|_{\varepsilon-1} \leq C(\|X_0(x,D)\omega_0\|_{\varepsilon-1} + \|X_0\|_\varepsilon\|\omega_0\|_{L^\infty}).$$

Enfin, comme les quantités $\|\omega_0\|_{L^\infty}$ et $\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0)}$ apparaissent au dénominateur dans l'inégalité du théorème 1, il n'est pas sans intérêt de les minorer. La suite $(\omega_{0,n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend faiblement vers ω_0 dans L^∞. Les estimations (3.1) et (3.3) jointes à la compacité faible de la boule unité de L^∞ assurent que

$$\lim_{n\infty}\|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0_\alpha)} \text{ (resp. } \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty}) = \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0)} \text{ (resp. } \|\omega_0\|_{L^\infty})\,.$$

En prenant n assez grand, on peut donc supposer que l'on a

$$(3.5)\quad \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0_\alpha)} \text{ (resp. } \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty}) \geq \frac{1}{2}\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0)} \text{ (resp. } \|\omega_0\|_{L^\infty})\,.$$

• **Estimation a priori**

Le point essentiel est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 3.1

Soit $\varepsilon > 0$ et $q \in]1,2[$, il existe C telle que, pour tout entier n et tout temps t, on ait :

$$\|v_n(t,.)\|_{Lip} \leq C\left(\|\omega_0\|_{L^q\cap L^\infty} + \|\omega_0\|_{L^\infty} \mathrm{Log} N_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0)\right) \exp C\|\omega_0\|_{L^\infty} t\ ,$$

avec, comme au théorème 2.1, $N_\varepsilon(A,X,\omega) = \dfrac{\|X\|_\varepsilon\|\omega\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\backslash A^0}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\backslash A^0)}}\left(1 + \dfrac{\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$

Démonstration

Nous allons définir, pour chaque temps, un champ de vecteurs X_t et un fermé A^t à qui l'on puisse appliquer, à chaque instant, le théorème 2.1 avec profit.

On définit alors X_t et A^t par

$$(3.6)\quad A^t = \psi(t,\gamma_0),$$

$$(3.7)\quad X_t = \psi_t{}^*X_0 \text{ i.e. } (X_t)^i = (X_0(x,D)\psi)^i(t,\psi^{-1}(t,x)).$$

Il faut contrôler les quantités apparaissant dans le terme de droite de l'inégalité du théorème 2.1. Vu que l'on a trivialement, d'après les relations (0.1) et (0.2), que

$$(3.8)\quad \|v(t,.)\|_{L^\infty} \leq C\|\omega_0\|_{L^q\cap L^\infty},$$

le point-clef consiste à démontrer que

$$(3.9)\quad N_\varepsilon(A^t,X_t,\omega_t) \le CN_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0)\exp C\int_0^t \|v(s,.)\|_{Lip}ds\ .$$

Pour ce faire, il suffit de majorer chacun des quotients intervenant dans la définition de $N_\varepsilon(A,X,\omega)$, ce qui se fait en utilisant essentiellement des lemmes de progation de la régularité höldérienne par un champ de vecteurs. Nous renvoyons à [8] pour plus de détails.

Il résulte du théorème 2.1 et de (3.1-5) et (3.9) que l'on a

$$(3.10)\quad \|v_n(t,.)\|_{Lip} \le C\left(\|\omega_0\|_{L^q\cap L^\infty} + \|\omega_0\|_{L^\infty}\mathrm{Log}N_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0)\right) + C\|\omega_0\|_{L^\infty}\int_0^t \|v_n(s,.)\|_{Lip}ds\ .$$

Le théorème 3.1 résulte alors simplement d'une intégration de (3.10).

- **Passage à la limite**

Il s'agit de démonter que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est de Cauchy dans un espace convenable. On suit ici la démarche de [7] en considérant l'opérateur $\pi(v,w) = \nabla\Delta^{-1}(\mathrm{tr}(dvdw))$, où Δ^{-1} désigne la convolution par Log|x|. Il est trivial de vérifier qu'une solution du système (E) est solution du système (E') où l'on a remplacé ∇p par $\pi(v,v)$. Le lemme suivant, démontré dans [8], assure la définition de l'opérateur π indépandemment de toute décroissance à l'infini des champs de vecteurs v et w.

Lemme 3.2

Pour tout $r \in\ ]-1,1[$, il existe une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs à divergence nulle v et w, on ait :

$$\|\pi(v,w)\|_r \le C\|v\|_{Lip}\|w\|_r$$

On va maintenant pouvoir majorer la différence $v_n - v_m$. On a l'équation suivante :

$$(3.11)\quad \partial_t(v_n - v_m) + v_n\nabla(v_n - v_m) = \pi(v_n - v_m, v_n + v_m) + (v_n - v_m)\nabla v_m.$$

Soit r un réel de l'intervalle]-1,0[; en découpant le produit en termes de paraproduit et de reste, il résulte du lemme 2.4 que

$$(3.12)\quad \|(v_n - v_m)\nabla v_m\|_r \le C\|v_n + v_m\|_{Lip}\|v_n - v_m\|_r\,.$$

Grâce au théorème 3.1 et au résultat de propagation de la régularité höderienne démontré dans [8], la suite $(v_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(]-T,T[\ ;\ C^r)$ pour tout réel T strictement positif et pour tout r<0. Ainsi donc, on déduit, d'après le théorème 3.1 que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R} ; C^r)$ pour tout réel r strictement inférieur à 1.

Pour conclure la démonstration du théorème 1, il reste à démontrer les propriétés de régularité de la solution ainsi construite par passage à la limite. Nous allons rappeler sans démonstration le très facile lemme 2.4 de [6].

Lemme 3.3

Si $(v_n)_{n\in N}$ est une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R} ; Lip(\mathbf{R}^2))$ convergeant vers v dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R} ; C^r)$ pour r strictement inférieur à 1, alors, pour tout r strictement inférieur à 1, la suite $(\psi_n)_{n\in N}$ des flots associés aux v_n converge dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R} ; Id + C^r)$ vers le flot ψ associé à v.

Il en résulte, du fait de la nullité de la divergence de X_0, que la suite $(X_0(x,D)\psi_n)_{n\in N}$ qui, d'après (3.2), le théorème 3.1 et la proposition 3.2 (ii), est une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\varepsilon)$, converge dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r)$ pour tout r strictement négatif vers $X_0(x,D)\psi$; et de même pour la suite $(X_{n,t})_{n\in N}$. Donc $X_0(x,D)\psi$ ainsi que X_t appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\varepsilon)$.

De plus, d'après la proposition 3.2 (i), $(X_{n,t}(x,D)\omega_n)_{n\in N}$ est une suite borné de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^{\varepsilon-1})$ qui converge dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r)$ pour tout r strictement inférieur à ε-1 vers $X_t(x,D)\omega$.

Enfin, la relation de conservation du tourbillon, jointe au fait que la solution v appartienne à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; Lip(\mathbf{R}^2))$, assure, d'après la relation (0.1), que $\omega(t,.) \in C^\varepsilon(\mathbf{R}^2 \setminus A_t)$. Le théorème 1 est alors complètement démontré.

Références bibliographiques

[1] S. Alinhac, *Remarques sur l'instabilité du problème des poches de tourbillon.* Prépublication de l'Université d'Orsay (1989), à paraitre dans Journ. of Functional Analysis.
[2] H. Bahouri et B. Dehman, *Remarques sur l'apparition de singularités dans les écoulements Eulériens incompressibles à données Holderiennes*, à paraitre.
[3] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.* Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **14**, p. 209-246 (1981).
[4] T. Buttke, *The observation of singularities in the boundary of patches of constant vorticity.* Phys. Fluids A **1(7)**, p. 1283-1285 (1989).
[5] T. Buttke, *A fast adaptive Vortex Method for Patches of Constant vorticity in two Dimensions.* Journ. Comp. Phys. **89**, p. 161-186 (1990).
[6] J.-Y. Chemin, *Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible*

bidimensionnel. Inventiones Math. **103**, p. 599-629 (1991).

[7] J.-Y. Chemin, *Régularité des trajectoires des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace*. Prépublication de l'Ecole Polytechnique 1990, à paraitre dans Journ. Maths. pures et Appliquées.

[8] J.-Y. Chemin, *Persistance des structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels*. Prépublication de l'Ecole Polytechnique 1991.

[9] P. Constantin et E. Titi, *On the evolution of nearly circular vortex patches*. Comm. Math. Phys. **119**, p. 177-198 (1988).

[10] A. Majda, *Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow*. Comm. Pure Appl. Math. **38**, p. 187-220 (1986).

[11] V. Yudovitch, *Non stationnary flow of an ideal incompressible liquid*. Zh. Vych. Math. **3**, p. 1032-1066 (1963).

[12] N. Zabusky, M. Hughes et K. Roberts, *Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions,* Jour. Comp. Phys. **30**, p. 96-106 (1979).