

NICOLAS BURQ

**Contrôle de l'équation de Schrödinger en présence  
d'obstacles strictement convexes**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1991), p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1991\\_\\_\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1991____A14_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# **CONTROLE DE L'EQUATION DE SCHRODINGER EN PRESENCE D'OBSTACLES STRICTEMENT CONVEXES**

**N. BURQ**

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique  
91128 Palaiseau Cedex, France.

## **1 INTRODUCTION**

Nous nous intéressons ici au problème du contrôle de l'équation de Schrödinger dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  contenant des obstacles strictement convexes.

Plus précisément, soit  $\tilde{\Omega}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , à frontière analytique ; et soient  $(\theta_i)_{i=1, \dots, N}$ ,  $N$  fermés strictement convexes de  $\mathbb{R}^3$ , à frontière  $C^\infty$ , tels que l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(\cup_{i=1}^N \theta_i)$  de l'union des  $\theta_i$  soit incluse dans  $\tilde{\Omega}$ . On sait alors [1 3] que :  $\forall n, \forall (i_1, \dots, i_n) ; i_j \in \{1, \dots, N\} ; i_{j+1} \neq i_j ; i_{n+1} \neq i_1 ; \exists ! \gamma = \cup_{j=1}^n [x_j, x_{j+1}] ; x_j \in \partial \theta_{i_j} ; j \leq 1 ; x_{n+1} = x_1$  tel que  $\gamma$  soit une trajectoire de lumière.

Soient alors  $\beta_\gamma$  et  $\beta_\gamma'$  les deux valeurs propres de module strictement plus petit que 1 de l'application de Poincaré associée à  $\gamma$ .

Soit  $\lambda_\gamma = \sqrt{\beta_\gamma \beta_\gamma'}$  et  $d_\gamma = \sum_{j=1}^n \|x_{j+1} - x_j\|$ .

On suppose de plus que :  $(\theta_i)$  vérifient les hypothèses suivantes introduites par M. Ikawa :

**H1**  $\forall 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq N ; j_i \neq j_k$

$$\text{Conv}(\theta_{j_1} \cup \theta_{j_2}) \cap \theta_{j_3} = \emptyset$$

$$\mathbf{H2} \quad \exists \alpha > 0 \quad \sum_{\gamma \text{ primitif}} \lambda_{\gamma} d_{\gamma} e^{\alpha d_{\gamma}} < \infty .$$

$$\text{Soit } \Omega = \tilde{\Omega} \setminus \bigcup_1^N \theta_i$$

soit  $u(t, x)$  la solution du problème d'évolution :

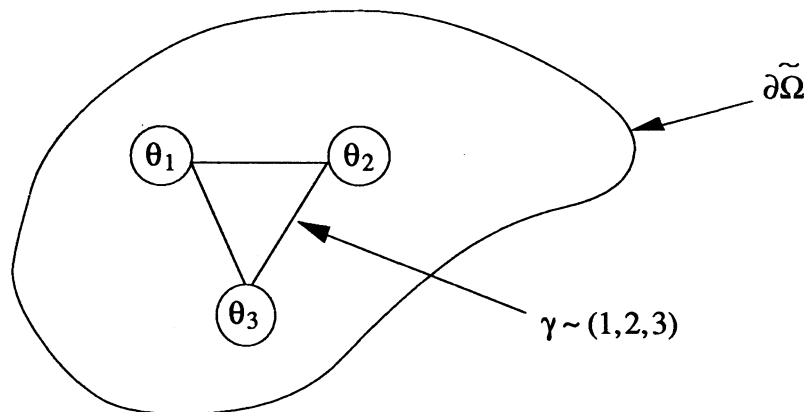
$$(i\partial_t - \Delta) u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t$$

$$(*) \quad u|_{t=0} = u_0$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

On cherche à contrôler l'énergie de la solution  $u$  par l'expression  $\|u\|^2 = \int_0^{\gamma} \int_{\tilde{\partial\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) \right|^2 dt dx$ .

Lorsqu'on n'a pas d'obstacles, ce problème a été résolu par G. Lebeau [L] qui montre qu'alors  $\|u\|^2$  est une norme équivalente à la norme  $\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$ . Cependant ces résultats ne peuvent pas s'appliquer ici puisque compte tenu des trajectoires captives  $\gamma$ ;  $\tilde{\partial\Omega}$  ne contrôle pas géométriquement  $\Omega$ .



On se propose d'indiquer ici comment la stratégie utilisée par M. Ikawa pour démontrer la décroissance exponentielle de l'énergie locale pour l'équation des ondes [I 1,2,3] peut s'appliquer dans ce cadre.

*Remarque 1)* Les hypothèses H1 et H2 sont vérifiées si  $N = 2$  ou si les  $\theta_j$  sont des boules de rayon  $r$  éloignées les unes des autres d'une distance  $d \geq Nr$ .

## 2 ENONCE DU THEOREME

*Théorème 1 :*  $\forall T_0 > 0 ; \forall \varepsilon \in ]0, 1/2[ \exists C_\varepsilon > 0$

$\forall u_0 \in H_0^1(\Omega)$ , la solution du problème (\*) vérifie :

$$\|u\|_{H_0^{1-\varepsilon}(\Omega)}^2 \leq C_\varepsilon \int_0^{T_0} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dt dx$$

*Remarque 2)* L'affaiblissement de notre résultat (perte de  $\varepsilon$  régularité), par rapport à celui de G. Lebeau (L) est dû au fait que les hypothèses de contrôle géométrique ne sont plus vérifiées.

*Remarque 3)* Un tel résultat de contrôle est directement lié à la vitesse de propagation infinie de l'opérateur de Schrödinger, il est faux pour l'opérateur des ondes.

## 3 CHANGEMENT D'ECHELLE

Dans ce paragraphe, nous énonçons le Théorème clé qui permet de démontrer le Théorème 1.

Soit  $(e_\nu, \lambda_\nu)$  la base orthonormale de  $L^2(\Omega)$  pour l'opérateur  $\Delta$  avec conditions de Dirichlet. Soient  $\rho > 1, \alpha < \rho^{-1}$ .

On note 
$$E_{k,\rho,\alpha} = \{u = \sum_{\rho^k \alpha \leq \sqrt{\lambda_\nu} < \rho^k \alpha^{-1}} u_\nu e_\nu\}$$

On identifie les solutions du problème

$$ih_k \partial_t - h_k^2 \Delta u = 0$$

(\*\*)  $u|_{t=0} = u_0 \in E_{k,\rho}$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

avec leur donnée initiale  $u_0$  ( $h_k = \rho^{-k}$ ).

On a alors le

*Théorème 2* :  $\exists \rho > 1, \alpha < \rho^{-1}, k_0 > 0; T_0 > 0; \forall v > 0 \exists C; \forall u \in E_{k,\rho,\alpha}$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C \frac{k}{\rho^k} \int_{t=-T_0}^{k T_0} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dt dx$$

Suivant la stratégie de G. Lebeau, le Théorème 2 implique le Théorème 1 :

on pose  $v(t,x) = u\left(\frac{k}{hk}, x\right)$  alors  $v$  est solution de (\*) et  $v_0 \in E_{k,\alpha,\alpha}$  et  $\|v\|_{L^2}^2 \times \rho^{2k} \times \frac{1}{k^2}$ .

(C indépendant de  $k$ ), donc en empilant le Théorème 2 aux temps  $t = 0, t = k T_0, \dots, t = [v \frac{\rho^k}{k}] k T_0$ , on obtient le Théorème 1 pour  $u_0 \in E_{k,\rho,\alpha}; \forall k \geq k_0$ ; Une décomposition de Paley Littlewood permet alors de conclure.

#### 4 REDUCTION DU PROBLEME A UNE ESTIMATION DE DECROISSANCE DE L'ENERGIE

A toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$ , tangentielle près du bord de  $\Omega$ , on associe, au moyen de partitions de l'unité un opérateur  $Op(\varphi)$  par la quantification :

$$Op(\varphi)(u) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^3 \int e^{-i(x-y) \cdot \xi/h} \varphi(x,\xi) u(y) dy d\xi$$

à l'intérieur et :

$$Op(\varphi)(u)(x) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^2 \int e^{-i(x'-y') \cdot \xi'/h} \varphi(x,\xi') u(y',x_n) dy' d\xi'$$

au voisinage du bord si localement  $\Omega$  est défini par  $x_n > 0$ .

On peut alors décomposer l'isométrie (pour la norme  $L^2$ )  $I : u_0 \rightarrow u|_{t=T_0}$  ou  $u$  est solution de (\*\*\*) en deux termes  $I_1 + I_2$ .

Avec  $I_1$  défini par :

$$I_1 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

$$u_0 \rightarrow v|_{t=T_0}$$

où  $v$  vérifie  $(ih\partial_t - h^2 \Delta) v = ih \psi'(t) \text{Op}(\varphi)(u)$

$$v|_{t \leq 0} = 0$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

avec  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ;  $\psi|_{t \leq T_0/3} \equiv 0$ ;  $\psi|_{t \leq 2T_0/3} \equiv 1$  et  $I_2$  est défini comme  $I_1$  en remplaçant  $\text{Op}(\varphi)$  par  $\text{Id} - \text{Op}(\varphi)$ .

Lemme 3 : On peut choisir  $\varphi$  et  $T_1$  de telle manière que

$$i) \|I_2 u\|^2 \leq C h_k \int_{-2T_1}^{2T_1} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dx dt$$

$$ii) \exists \rho > 1, \alpha < \rho^{-1}, k_0; \sigma > 0, A > 0, C < 0, \forall k \geq k_0, \forall u \in E_{k,\rho}.$$

$$\|I_1^{-[A \ln h_k]} u_k\|_{L^2}^2 \leq C h_k^\sigma \|u_k\|_{L^2}^2.$$

On déduit du lemme 3 le Théorème 2.

$$\text{En effet : } \|u_k\|_{L^2}^2 = \|(I_1 + I_2)^N u_k\|_{L^2}^2$$

$$\leq \|I_2 I_1^{N-1} u\| + \|I_1 I_1^{N-1} u\|$$

$$\leq \|I_2 I_1^{N-1} u\| + \|I_1 I_2 I_1^{N-2} u\| + \|I_1^2 I_1^{N-2} u\|$$

or modulo  $O(h)$  les opérateurs  $I_1$  et  $I_2$  sont de norme  $\leq 1$  par l'inégalité de Garding

$$\text{donc } \|u\|_{L^2}^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} \|I_2 I_1^n u\|_{L^2}^2 + \|I_1^N u\|_{L^2}^2 + C N h \|u\|_{L^2}^2$$

pour  $N = -[A \ln h_k]$ , on a donc alors

$$\|u\|_{L^2}^2 (1 + C h_k \ln h_k - C h^\sigma)^2 \leq \sum_{n=0}^{-[A \ln h_k]} C^{-1} h_k \int_{-2T_0}^{2T_0} \int_{\tilde{\partial\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x, n T_0 + t) \right|^2 dt dx \times -[A \ln h_k]$$

donc  $\exists k_0; \forall k \geq k_0, \forall n \in E_{k, \rho, \alpha}$ .

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C k h_k \int_{-2T_0}^{(-[A \ln h_k] + 2) T_0} \int_{\tilde{\partial\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) \right|^2 dt dx$$

nous avons donc démontré le Théorème 2.

*Remarque* : Le lemme 3 est un analogue des résultats de M. Ikawa sur la décroissance exponentielle des solutions de l'équation des ondes :

en effet ;  $I_2$  correspond à la partie de  $u_0$  qui entre les instants  $t = 0$  et  $T_0$  est sortie de la région non contrôlée,  $I_1$  à la partie restée dans cette région.

Il suffit donc de démontrer le lemme 3.

## 5 ESQUISSE DE LA PREUVE DU LEMME 3

*Lemme 4* :  $\exists \varepsilon > 0, \exists \rho > 1, \exists \alpha < \rho^{-1}, T_1 > 0, \varphi \in C_0^\infty(T^*, \mathbb{R}^3)$  tangentielle près du bord tel que si  $\varphi(x, \xi) \neq 1; |\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ , le rayon généralisé issu de  $(x, \xi)$  rencontre  $\tilde{\partial\Omega}$  en temps  $t \in [-T_1, T_1]$  et tel que  $\varphi(x, \xi) \neq 0; x \in \partial\Omega; |\xi \cdot n| < \varepsilon \Rightarrow |\xi| \notin [\alpha, \alpha^{-1}]$ .

Ce lemme est une conséquence de l'hypothèse H1. On démontre alors, en utilisant la méthode de G. Lebeau la partie i) du lemme 3.

Nous allons maintenant indiquer comment démontrer la partie ii) :

Soit  $q \in C_0^\infty(T^*, \mathbb{R}^3)$  ;  $q(x, \xi) \equiv 0$  si  $x \notin \Omega$  ou  $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$  ;  $q(x, \xi) \equiv 1$  si  $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$  ;  $x \in \Omega$  et  $|\xi| \in [\alpha', \alpha'^{-1}]$  ;  $\alpha' < \alpha$  et  $q \equiv 0$  si  $|\xi| \notin [\beta, \beta^{-1}]$  ( $\beta < \alpha'$ ).

On a alors le

*Lemme 3'* :  $\exists k_0, \sigma > 0, A > 0, c > 0; \forall k \geq k_0, \forall n \in E_k$

$$\left\| \Gamma_1^{-[A \ln h_k]} \text{Op}(q) u \right\|_{L^2}^2 \leq C h_k^\sigma \|u\|_{L^2}^2$$

Esquisse de la preuve du lemme 3' :

On démontre ce lemme en construisant une paramétrix pour  $\Gamma_1^{-[A \ln h_k]} \text{Op}(q)$  et en l'estimant suivant la méthode de M. Ikawa pour l'équation des ondes ([I 3]) :

On cherche à résoudre le système

$$(i h \partial_t - h^2 \Delta) u = 0 \quad \forall t \notin \mathbb{N} T_0; t > 0 \text{ dans } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u|_{nT_0^+} = v|_{nT_0^-}; u|_{t=0} = q(x, \xi) e^{-ix \cdot \xi/h}$$

$$(***) \quad (i h \partial_t - h^2 \Delta) v = i h \psi'(t) \text{Op}(\varphi)(u) \quad \forall t \notin \mathbb{N} T_0; \forall x \in \Omega.$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

$$v|_{nT_0^+} = 0$$

et à estimer  $v|_{pT_0^-}$ .

On commence par résoudre le système (\*\*\*) dans  $\mathbb{R}^3$  en cherchant  $u^\emptyset$  et  $v^\emptyset$  sous la forme

$$u^\emptyset = \sum_{i=0}^n h^i u_i^\emptyset e^{-ix \cdot \xi/h}; v^\emptyset = \sum_{i=0}^n h^i v_i^\emptyset e^{-ix \cdot \xi/h}$$

ce qui fournit des équations de transport pour  $u_i$  et  $v_i$  permettant de calculer  $u$  et  $v$ .

On résoud alors le système (\*\*\*) $_{i_0}$  :

$$(i h \partial_t - h^2 \Delta) u^{i_0} = 0 \quad \forall t \notin \mathbb{N} T_0, t > 0; x \in \theta_{i_0}^c$$



$$\begin{aligned} u^{i_0} |_{\partial\theta_i} &= u^\emptyset |_{\partial\theta_i} \\ u^{i_0} |_{nT_0^+} &= v |_{nT_0^-}, \quad u^{i_0} |_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

(\*\*\*)<sub>i\_0</sub> :

$$\begin{aligned} (i h \partial_t - h^2 \Delta) v^{i_0} &= i h \psi'(t) \text{Op}(\varphi) u^{i_0} \\ v^{i_0} |_{\partial\theta_i} &= v^\emptyset |_{\partial\theta_i} \\ v^{i_0} |_{nT_0^+} &= 0 \end{aligned}$$

en cherchant  $u^{i_0}$  et  $v^{i_0}$  sous la forme

$$\begin{aligned} u^{i_0} &= \sum_{j=0}^n h^j u_j^{i_0} e^{-i \varphi^{i_0}(x, \xi)/h} \\ v^{i_0} &= \sum_{j=0}^n h^j v_j^{i_0} e^{-i \varphi^{i_0}(x, \xi)/h} \end{aligned}$$

ou  $\varphi^{i_0}$  vérifie  $|\nabla \varphi^{i_0}(x, \xi)|^2 = |\xi|^2$

et  $\varphi^{i_0} |_{\partial\theta_{i_0}} = x \cdot \xi |_{\partial\theta_{i_0}}$

et  $\frac{\partial \varphi^{i_0}}{\partial n} \Big|_{\partial\theta_{i_0}} = - \frac{\partial}{\partial n} (x \cdot \xi) \Big|_{\partial\theta_{i_0}}$

On réitère ce procédé, ce qui permet de calculer pour  $I = (i_0, \dots, i_m)$  ;  $i_j \neq i_{j+1}$  ;  $i_j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $u^I$  et  $v^I$ .

La solution du problème (\*\*\*) est alors (formellement)

$$\begin{aligned} u &= \sum_{I \in \mathcal{I}} (-1)^{|I|} u^I \\ v &= \sum_{I \in \mathcal{I}} (-1)^{|I|} v^I \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{I} = \{I = (i_0, \dots, i_m) ; m \in \mathbb{N} ; i_j \neq i_{j+1}\} \cup \{\emptyset\}$ .

Il reste alors à estimer  $v |_{pT_0}$ .

Nous avons besoin pour cela de deux lemmes techniques dont l'un découle du calcul explicite de  $u^I$  et l'autre des estimations de M. Ikawa (I) :

*Lemme 5* : Soit  $d = \min_{i \neq j} \text{dist}(\theta_i, \theta_j)$  ;  $D = \text{diamètre}(\tilde{\Omega})$ , alors

$$\forall I \in \mathcal{J} ; \quad \begin{aligned} u_n^I &\equiv 0, \quad \forall t \notin \left[ \frac{\beta d}{2} (|I| - 1), \frac{D}{2\beta} (|I| + 1) \right] \\ v_n^I &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\text{On note } |u|_p^{(\mathcal{U})} = \sup_{\substack{X_1, \dots, X_p \in S^2 \\ x \in \mathcal{U}}} |X_1 \dots X_p u(x)|$$

Nous rappelons un Théorème démontré dans [I 3] :

*Théorème 3* : Soit  $I \in \mathcal{J}$  ;  $I = (i_1, \dots, i_m)$  ;  $i_m \neq i_1$  .

Alors  $\exists ! \gamma = \bigcup_{j=1}^m [x_{i_j}, x_{i_{j+1}}]$  (on pose  $i_{m+1} = i_0$ ) tel que  $x_{i_j} \in \partial \theta_{i_j}$  et  $\gamma$  est une trajectoire de billard.

Pour  $J, I \in \mathcal{J}$ , on notera  $J = rI + s$  si on a  $r \geq 1$   $a \leq s' < |I|$

$$J = (j_1, \dots, j_m) \quad I = (i_1, \dots, i_q)$$

$$\text{avec } (j_1, \dots, j_m) = \underbrace{(i_1, \dots, i_q, i_1, \dots, i_q, \dots, i_q, i_1, \dots, i_s)}_{r \text{ termes}}$$

On dira que  $J$  est primitif si  $\forall I \in \mathcal{J}, J = rI \Rightarrow r = 1$ .

On a alors le

*Lemme 6* :  $\forall J \in \mathcal{J} ; J = rI + \ell ; \forall p, \forall t \notin \mathbb{N} T_0$

$$\begin{aligned} |u^J|_p(\theta_{jm}^c) &\leq C_p \lambda_\gamma^r \\ |v^J|_p(\theta_{jm}^c) &\leq C_p \lambda_\gamma^r \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est la trajectoire associée à  $I$  par le Théorème 3. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} |u|_p(\Omega) &\leq \sum_{Ct \leq |I| \leq \frac{t}{C}} |u^J|_p(\theta_{jm}^c) \\ &\leq \sum_{I \text{ primitif}} \lambda_\gamma^{Ct/|I|} \end{aligned}$$

or si  $I$  correspond à  $\gamma$ , on a exactement 2  $|I|$  éléments de  $\mathcal{J}$  qui correspondent à  $\gamma$  (on peut parcourir  $\gamma$  dans un sens ou dans l'autre et commencer en  $n$  points différents)

$$\text{et} \quad |I| = \mathcal{O}(d_\gamma) \quad \text{et} \quad d_\gamma = \mathcal{O}(|I|)$$

$$\text{donc} \quad |u|_p(\Omega) \leq C \sum_{\gamma \text{ primitif}} d_\gamma \lambda_\gamma^{Ct/d_\gamma}$$

or d'après l'hypothèse  $H_2$

$$\begin{aligned} \sum d_\gamma \lambda_\gamma e^{\alpha d_\gamma} &< +\infty \\ \Rightarrow |u|_p(\Omega) &\leq C_p e^{-Kt} \end{aligned}$$

ce qui permet de démontrer le lemme 3'.

Et comme  $\{x; \forall \xi; |\xi| \in [\alpha', \alpha'^{-1}] q(x, \xi) = 1\}$  contrôle géométriquement  $\Omega$  en temps  $T_2$ , on en déduit par un argument de propagation le lemme 3, quitte à changer  $A$  en  $A' > A$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [BGR] C. Bardos, J.C. Guillot, J. Ralston,  
La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application  
à la théorie de la diffusion.  
Comm. Partial. Diff. Eq. **7** (1982) 905-958.
- [Ge] C. Gérard  
Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement  
convexes.  
Suppl. Bull. SMF **116** (1988).
- [H] L. Hörmander  
The analysis of linear partial differential operators I et III.
- [I 1] M. Ikawa  
Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles.  
Osaka J. of Math., **19** (1982) 459-509.
- [I2] M. Ikawa  
On the pôles of the scattering matrix for two convex obstacles.  
J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987) 69-102.
- [I3] M. Ikawa  
Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies.  
Ann. Inst. Fourier **38**, 2 (1988) 113-146.
- [Li] J.L. Lions  
Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués.  
R.M.A., Masson 1988.
- [S.M] R.B. Melrose, J. Sjöstrand  
Singularities of boundary value problems II.  
Comm. Pure Applied Math. **35** (1982).
- [L] G. Lebeau  
Contrôle de l'équation de Schrödinger.  
à paraître dans Journ. Math. pures et appl.