Frédéric Klopp

Impuretés dans une structure périodique

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A20_0>

Impuretés dans une structure périodique.

par F.Klopp
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques Bat. 425
91405 Orsay
et U.R.A 760 CNRS.

Le problème qui nous intéresse ici est l'étude du spectre d'opérateurs du type suivant:

(1) $P_t = -h^2\Delta + V + t\delta V$

où $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et est L-périodique, L étant un réseau de $\mathbb{R}^n$, $0 \le \delta V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et t est un paramètre mesurant la taille de la perturbation.

Du point de vue de la physique, P_t est un hamiltonien semi-classique associé à une structure cristalline (représentée par V) dans laquelle a été introduite une perturbation (représentée par δV).

Cet opérateur a déja été largement étudié, tant par les physiciens ([C], [LL],...) que par les mathématiciens ([ADH], [DH], [GS], [Sk], [B], ...).

Dans le cas de la limite semi-classique, dans [S2], Simon a étudié la largeur de la premiére bande spectrale de P_0. Ses résultats ont été également obtenus par Outassourt qui, dans [O], a aussi démontré des résultats sur l'existence de valeurs propres pour P_t dans un gap de P_0 ceci pour des perturbations pas trop petites.

Ce travail va surtout s'intéresser à l'existence de valeurs propres pour P_t dans un gap de P_0 dans le cas de très petites perturbations.

Soit L un réseau c'est-à-dire $L = \bigoplus_{1\le j\le n} \mathbb{Z} u_j$ où $(u_j)_{j\in[1,n]}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. On définit: $L^* = \{\alpha' \in (\mathbb{R}^n)^*;\ \forall\ \alpha \in L\ \alpha\cdot\alpha' \in 2\pi\mathbb{Z}\ \}$ et

$\mathbb{T}=(\mathbb{R}^n)^*/L^*$.

On considère l'opérateur de Schrödinger suivant agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$:

(2) $P=-h^2\Delta+V$

avec V satisfaisant:

(H.1): $V\in C^\infty(\mathbb{R}^n;[0,+\infty[)$ telle que: $V(x)=0 \Leftrightarrow x\in L$ et V périodique sur le réseau L c'est-à-dire telle que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tout α dans L: $V(x+\alpha)=V(x)$. On suppose de plus que Hess(V)(0) est définie et positive, où Hess(V) désigne la matrice hessienne de V.

Par périodicité, pour tout $\alpha\in L$, $|\nabla V(\alpha)|=0$ et Hess(V)(α) est définie et positive. Par continuité de V, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour $\delta\in[0,\varepsilon_0[$, on a:

(3) $\{x\in\mathbb{R}^n;\ V(x)-\delta^2\leq 0\}=\cup_{\alpha\in L}U_{\alpha,\delta}$

où $U_{\alpha,\delta}=U_{0,\delta}+\{\alpha\}$ et la famille de compacts $(U_{\alpha,\delta})$ vérifie que si $\alpha\neq\alpha'$ alors $U_{\alpha,\delta}\cap U_{\alpha',\delta}=\emptyset$.

Pour $\alpha\in L$, on définit τ_α: $L^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ par $(\tau_\alpha\varphi)(x)=\varphi(x-\alpha)$. Par l'hypothèse (H.1), on a, pour tout α dans L:

(4) $\tau_{-\alpha}\circ P\circ\tau_\alpha=P$.

On notera, pour $\alpha\in L$, $U_\alpha=U_{\alpha,0}=\{\alpha\}$; on appellera les $(\{\alpha\})_{\alpha\in L}$, les puits de potentiel. On notera $d(\cdot,\cdot)$, la distance associée à la métrique d'Agmon $V(x)dx^2$. On définit: $S_0=\inf_{\alpha\neq 0}(d(\alpha,0))$.

Pour chaque α dans L, on construit un opérateur de référence. Pour ε suffisament petit, on prend θ_0 une fonction positive dans $C_0^\infty(U_{0,\varepsilon})$ telle que, pour $x\in U_{0,\varepsilon/2}$,

(5) $\theta_0(x)=\varepsilon^2/4$.

Si on note $\theta_\alpha=\tau_\alpha(\theta_0)$ alors,

(6) $V+\Sigma_{\alpha\in L}\theta_\alpha\geq\varepsilon^2/4$.

On définit, pour $\alpha \in L$:

(7) $P_\alpha = P + \Sigma_{\beta \neq \alpha} \theta_\beta$

Pour tout α dans L, on sait que P_α est symétrique, borné inférieurement, essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Notons également P_α, son extension auto-adjointe qui a pour domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$. Par un théorème de Persson [P], le spectre de P_α est discret en dessous de $\varepsilon^2/4$.

Par construction, on a, pour tout $\alpha \in L$:

(8) $P_\alpha = \tau_\alpha \circ P_0 \circ \tau_{-\alpha}$,

donc tous les P_α ont le même spectre noté $\sigma(P_0)$.

Des résultats classiques ([HSj], [S1]), nous disent que la première valeur propre de P_0 est simple. De plus, si on la note μ, on sait qu'il existe $h_0>0$, $a>0$ et $\mu_0>0$ tels que, pour $h \in]0,h_0[$:

(9) $\sigma(P_0) \cap [\mu - 2a\cdot h, \mu + 2a\cdot h] = \{\mu\}$

où $\mu = \mu_0 h + O(h^2)$.

On notera φ_0 un vecteur propre normalisé associé à μ.

Notons $F \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, l'espace spectral associé à P et à $[\mu - a\cdot h, \mu + a\cdot h]$ et Π_F la projection orthogonale sur F. On obtient alors

Proposition 1: Supposons (H.1) vérifiée. Alors, il existe $h_0>0$ tel que pour tout $h \in]0,h_0[$, $P_{|F}$ est unitairement équivalent à Ω, un opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ défini pour $u \in L^2(\mathbb{T})$, par $\Omega(u) = \omega \cdot u$ où:

(i) ω est analytique réelle sur $\mathbb{T}$ et analytique dans W(h), un voisinage complexe de $\mathbb{T}$ de la forme $\mathbb{T} + iB(0,1/Ch)$ où C est une constante positive ne dépendant pas de h et B(x,r) désigne la boule de centre x de rayon r dans $\mathbb{R}^n$.

De plus, $(\omega)_{0<h<h_0}$ est bornée dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur W(h).

(ii) $\lim \sup_{h\to 0}[h\log(\sup_{\theta\in\mathbb{T}}|\omega(\theta)-\mu|)]\leq -S_0$

(iii) ω est paire et si $\gamma\in L^*$ alors $\gamma/2$ est un point critique de ω.

(iv) $\omega(\theta)$ est la valeur propre de Floquet du problème périodique.

Esquisse de la preuve: Grace à un travail de Carlsson [Ca], qui étend au cas d'une infinité de puits les constructions de Helffer et Sjöstrand [HSj], on construit une base orthonormale de F notée $(v_\alpha)_{\alpha\in L}$, en projetant φ_0 et ses translatées sur F. Or l'invariance de P par translation (4) nous dit que la matrice de P dans $(v_\alpha)_{\alpha\in L}$ est une matrice de convolution, donc en conjugant par la transformée de Fourier, on obtient l'équivalence unitaire annoncée.

L'analyticité de ω sur un voisinage de $\mathbb{T}$ découle de la décroissance exponentielle de v_α hors du puit $\{\alpha\}$. Cette décroissance exponentielle donne aussi l'estimée (ii).

On remarque que la base des $(v_\alpha)_{\alpha\in L}$ n'est autre que la base des fonctions de Wannier, ce qui nous dit que ω est la valeur propre de Floquet. La parité de ω est alors un résultat connu.

$\square$

Remarque: Ce résultat a déja été démontré d'autre manière séparément par Outassourt [O] et Simon [S2].

Nous allons maintenant nous intéresser à l'opérateur suivant:

(10) $P_t=-h^2\Delta+V+t\delta V=P+t\delta V$

où l'on suppose que δV vérifie:

(H.2): $0\leq\delta V\in C_0^\infty(\mathring{U}_{0,\varepsilon_0})$, $\delta V(0)>0$ et $\|\delta V\|_\infty=1$.

On note: $S_{\delta V}=\inf_{\alpha\neq 0}[d(\mathrm{supp}(\delta V),\alpha)]>0$.

Définissons $F_t\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace spectral associé à P_t et $[\mu-a\cdot h,\mu+a\cdot h]$, et Π_{F_t} la projection spectrale sur F_t. On démontre

Théorème 2: Supposons (H.1) et (H.2) vérifiées. Alors, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_\gamma[$ et pour tout $t\in]-a\cdot h/8,a\cdot h/8[$:

$P_{t|F_t}$ est unitairement équivalent à Ω_t: $L^2(\mathbb{T})\rightarrow L^2(\mathbb{T})$ défini par

$\Omega_t f=\omega\cdot f+b(t)\Pi_0 f+K(t)f$

avec:

(i) $\omega=\omega(\theta)$ la valeur propre de Floquet définie par P dans $[\mu-a\cdot h,\mu+a\cdot h]$.

(ii) Π_0: $L^2(\mathbb{T})\rightarrow L^2(\mathbb{T})$ défini par: $\Pi_0 f=(\mathrm{Vol}(\mathbb{T}))^{-1}\int_{\mathbb{T}} f d\theta$ où $d\theta$ est la mesure de Lebesgue.

(iii) $K(t)$ est un opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ de noyau $k(t,h,\theta,\theta')$ analytique sur $D(0,a\cdot h/8)\times W(h)\times W(h)$, où $W(h)$ est défini dans la Proposition 1. Alors:

$k(t,h,\theta,\theta')=\Sigma_{(\alpha,\beta)\in L\times L}(k_{\alpha,\beta}(t,h)e^{-i(\alpha\cdot\theta-\beta\cdot\theta')})$

avec $k_{\alpha,\beta}(t,h)$ vérifiant pour tout $h\in]0,h_\gamma[$: $k_{\alpha,\beta}(0,h)=0$ pour tout $(\alpha,\beta)\in L\times L$ et uniformément pour tout $|t|<a\cdot h/8$:

$|\partial_t k_{\alpha,\beta}(t,h)|\leq e^{-(1-\gamma)[d(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)+d(\mathrm{supp}(\delta V),U_\beta)]/h}$ si $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ et $|\partial_t k_{0,0}(t,h)|\leq e^{-2(1-\gamma)S_{\delta V}/h}$.

(iv) L'application $b(t)$ réalise une bijection analytique de $D(0,a\cdot h/8)$ dans un voisinage complexe ouvert de 0.

Esquisse de la preuve: On va étudier P_t de la même manière que P. Pour cela on construit des opérateurs de référence $P_{t,\alpha}$ à partir des P_α de la façon suivante:

(11) si $\alpha \neq 0$ alors $P_{t,\alpha}=P_\alpha$ et $P_{t,0}=P_0+t\delta V$

c'est-à-dire que:

(12) $P_{t,\alpha}=P_t+\Sigma_{L\ni\beta\neq\alpha}\tilde{\theta}_\beta$ où $\tilde{\theta}_\beta=\theta_\beta$ si $\beta\neq 0$ et $\tilde{\theta}_0=\theta_0-t\delta V$

Une étude de $P_{t,0}$, nous montre que, pour h assez petit et $|t|<a\cdot h/2$, $\sigma(P_{t,0})\cap[\mu-a\cdot h,\mu+a\cdot h]=\{\mu_t\}$ où μ_t est une valeur propre simple de $P_{t,0}$.

Puis grace à ces opérateurs de référence, en projetant les fonctions de Wannier sur F_t, on construit $(v_{t,\alpha})_{\alpha\in L}$, une base orthonormale de F_t. On écrit alors la matrice de P_t dans cette base. Celle-ci est analytique en t pour $|t|<a\cdot h/4$. La dérivée de cette matrice s'écrit comme une perturbation compacte exponentiellement petite (pour h assez petit) d'une matrice de rang 1. On obtient ainsi l'équivalence unitaire annoncée en conjugant par la transformée de Fourier.

Les proprietés du noyau de K proviennent de la décroissance exponentielle de $v_{t,\alpha}$ hors du puit $\{\alpha\}$.

□

Remarque: Pour t réel, K(t,h) est auto-adjoint et analytique en t. De plus, K(t,h) est compact et si on note:

$\|K\|_\infty=\sup_{(t,\theta,\theta')\in D(0,a\cdot h/8)\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}}|k(t,h,\theta,\theta')|$ alors:

(13) $h\log(\|K\|_\infty)\leq -S_{\delta V}+o(1)$ quand $h\to 0$.

Par le théorème de Weyl, on sait:

(14) $\sigma_{ess}(P_t)\cap[\mu-a\cdot h,\mu+a\cdot h]=\omega(\mathbb{T})=_{déf}[i,s]$.

On va s'intéresser au spectre de P_t contenu dans $[\mu-a\cdot h,\mu+a\cdot h]\setminus\omega(\mathbb{T})$, ceci pour $t\in]0,a\cdot h/8[$, une étude tout à fait symétrique pouvant être menée pour $t\in]-a\cdot h/8,0[$. D'après (14), le spectre de P_t dans $[\mu-a\cdot h,i[\cup]s,\mu+a\cdot h]$ est discret. On démontre la

Proposition 3: Pour h suffisament petit et $t\in]0,a\cdot h/8[$, on a $\sigma(P_t)\cap[\mu-a\cdot h,i[=\emptyset$.

Pour poursuivre cette étude, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur ω, à savoir

(H.3): (i) ω n'admet que les éléments de $((1/2)L^*)/L^*$ comme points critiques et de plus, ceux-ci sont non dégénérés.

(ii) Si $f(h)=\sup_{\theta\in\mathbb{T}}(\omega(\theta))-\inf_{\theta\in\mathbb{T}}(\omega(\theta))=s-i$ alors:

$h\log(f(h))=-S_0+o(1)$ quand $h\rightarrow 0$.

(iii) Soit $\tilde{\omega}(\theta)=(\omega(\theta)-\mu)/f(h)$. Il existe $h_0>0$ et $C>0$ tel que, pour $0<h<h_0$, on ait:

(*) $\tilde{\omega}$ n'atteint son maximum $\tilde{s}$ qu'en un seul point noté θ_s.

(**) $\max_{|\alpha|\leq 3}\sup_{\theta\in\mathbb{T}}|\partial_\theta^\alpha\tilde{\omega}(\theta)|\leq C$ et $|\det[\mathrm{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_s))]|>1/C$.

(***) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta(\varepsilon)>0$ tel que:

$|\tilde{\omega}(\theta)-\tilde{s}|>\delta(\varepsilon)$ si $|\mathrm{dist}(\theta,\theta_s)|>\varepsilon$.

Remarque: On peut montrer que de telles hypothèses sur ω découlent naturellement d'hypothèses de symétrie sur le réseau L.

Notons $D_s(\omega)=|\text{dét}(\mathrm{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_s)))|^{-1/2}$ et $\rho=(\delta V\varphi_0|\varphi_0)$.

On obtient alors les deux théorèmes suivants:

Théorème 4: Supposons (H.1)-(H.3) verifiées et n=1 ou 2. Alors, il existe $h_0>0$ tel que pour $h\in]0,h_0[$, il existe $\lambda(t)$ une fonction croissante analytique réelle sur $]0,a\cdot h/8[$ dans $]s,\mu+a\cdot h]$ qui est valeur propre simple de P_t et qui vérifie:

(1) si $t/f(h) \longrightarrow 0^+$:

(i) si $n=1$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_1(h,t)\cdot(\rho t/f(h))^2$,

(ii) si $n=2$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=\exp(-(1+o(1))\cdot C_2(h,t)\cdot(f(h)/(\rho t)))$,

(2) pour tout $C>1$, il existe $C'>0$ tel que pour $t\in]f(h)/C,a\cdot h/8[$, on a:

$$1/C'\leq\partial_t\lambda(t)\leq 1,$$

(3) si $t/f(h)\longrightarrow +\infty$ et $t/h\longrightarrow 0$: $\lambda(t)=s+(1+o(1))\cdot(\rho t)$.

De plus, $C_n(h,t)$ vérifient que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$ et pour tout $t\in]0,a\cdot h/8[$,

(i) $C_1(h,t)=(2^{1/2}\cdot\pi D_s(\omega)/\mathrm{Vol}\mathbb{T})^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(ii) $C_2(h,t)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T}/(2\pi D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$.

De plus, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$ et pour $t\in]0,a\cdot h/8[$, $\lambda(t)$ est la seule valeur propre de P_t dans $]s+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h})(\lambda(t)-s),\mu+a\cdot h]$.

Remarque: En dimension 1 ou 2, quand $t\longrightarrow 0$, B. Simon ([S3]) a déja obtenu, pour les valeurs propres négatives de $-\Delta+t\delta V$ pour δV négatif et à courte portée, des asymptotiques similaires à celles données en (1).

On définit $I(\lambda)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-1}\int_{\mathbb{T}}(\lambda-\omega(\theta))^{-1}d\theta$ pour $\lambda\in]s,+\infty[$ si $n=1$ ou 2 et pour $\lambda\in[s,+\infty[$ si $n\geq 3$.

Théorème 5: Supposons (H.1)-(H.3) vérifiées et $n\geq 3$. Alors, il existe $h_0>0$ tel que, pour $h\in]0,h_0[$, il existe une constante $T_{\delta V}>0$ et $\lambda(t)$, une fonction croissante analytique réelle sur $]T_{\delta V},a\cdot h/8[$ dans $]s,\mu+a\cdot h]$ qui est valeur propre simple de P_t; elles vérifient:

(1) si $u=(t-T_{\delta V})/f(h) \to 0^+$:

si $n=3$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_3(h,t)\cdot(\rho u)^2$,

si $n=4$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=-(1+o(1))\cdot C_4(h,t)\cdot(\rho u/\log(\rho u))$,

si $n\geq 5$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_n(h,t)\cdot \rho u$,

(2) pour tout $C>1$, il existe $C'>0$ tel que pour $t\in]T_{\delta V}+f(h)/C, a\cdot h/8[$, on a:

$1/C'\leq \partial_t\lambda(t)\leq 1$,

(3) si $(t-T_{\delta V})/f(h)\to +\infty$ et $t/h\to 0$: $\lambda(t)=s+(1+o(1))\cdot(\rho t)$.

De plus, $T_{\delta V}$ et $C_n(h,t)$ vérifient que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$ pour tout $t\in]0,a\cdot h/8[$,

(i) $T_{\delta V}=\rho(I(s))^{-1}\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(ii) $n\geq 5$: $C_n(h,t)=(-\partial_\lambda(I)|_{\lambda=s})^{-1}\cdot I(s)^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(iii) $C_4(h,t)=(\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}(I(s)f(h))^2/(4\pi^2 D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(iv) $C_3(h,t)=(\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}(I(s)f(h))^2/(2^{5/2}\cdot\pi^2 D_s(\omega)))^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$.

Pour $t\in]0,T_{\delta V}[$, on a, $\sigma(P_t)\cap]s,\mu+a\cdot h]=\emptyset$. Si $n\geq 5$, $\lambda(T_{\delta V})=s$ est une valeur propre de $P_{T_{\delta V}}$.

De plus, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $h\in]0,h_\varepsilon[$, il existe une constante positive $\tau_{\delta V}$ vérifiant: $\tau_{\delta V}\geq f(h)\cdot e^{(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}$, telle que, pour $t\in]T_{\delta V},\tau_{\delta V}]$, $\lambda(t)$ est la seule valeur propre de P_t dans $]s,\mu+a\cdot h]$, et pour $t\in]\tau_{\delta V},a\cdot h/8[$, $\lambda(t)$ est la seule valeur propre de P_t dans $]s+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h})(\lambda(t)-s),\mu+a\cdot h]$.

Remarque: En dimension 3 ou plus, quand $t\to 0$, M. Klaus et B. Simon ([KS]) ont obtenus, pour les valeurs propres négatives de $-\Delta+t\delta V$ dans le cas où δV est négatif et à courte portée, des asymptotiques similaires à celles données en (1).

Esquisse de la preuve: Pour prouver les Théorèmes 4 et 5, on utilise d'abord la réduction donnée par le Théorème 3 pour se ramener à l'étude du spectre d'un opérateur $\tilde{\Omega}_t: L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ défini par, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$,

(15) $\Omega_t f = \omega \cdot f + t(\Pi_0 f + K(t) f)$.

Pour étudier $\sigma(\tilde{\Omega}_t) \cap]s, \mu + a \cdot h]$, on applique le principe de Birman-Schwinger à $\tilde{\Omega}_t$ c'est-à-dire:

(16) ($\lambda \in \sigma(\tilde{\Omega}_t) \cap]s, \mu + a \cdot h]$ et λ est de multiplicité m) si et seulement si

($1 \in \sigma(\Gamma_{\lambda,t})$ et 1 est de multiplicité m)

où $\Gamma_{\lambda,t}: L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ défini par, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$,

(17) $\Gamma_{\lambda,t} f = t \cdot ((\lambda - \omega(\theta))^{-1/2} (\Pi_0 + K(t))(\lambda - \omega(\theta))^{-1/2}) f$.

On est alors essentiellement amener à étudier les valeurs propres d'une perturbation compacte exponentiellement petite d'un opérateur de rang 1.

□

Remarque: Il convient également de faire remarquer que, $\lambda(t)$ étant simple, si on note φ_t un vecteur propre unitaire associé à $\lambda(t)$ alors

(18) $\partial_t \lambda(t) = (\delta V \varphi_t | \varphi_t)$.

Alors les Théorèmes 4 et 5 (et leurs démonstrations), nous disent que φ_t est localisée au voisinage de supp(δV) quand $(t - T_{\delta V})/f(h)$ est grand. Par contre, quand $(t - T_{\delta V})/f(h) \longrightarrow 0$, φ_t est localisée au voisinage de supp(δV) en dimension plus grande que 5 alors que dans les dimensions 1 à 4, φ_t se "délocalise".

Remerciements: Je tiens à remercier J. Sjöstrand pour l'aide qu'il m'a apportée durant tout ce travail.

Références:

[ADH] S. Alama, P. Deift, R. Hempel, Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H-\lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$. Comm. Math. Phys., 121, 1989, 291–321.

[B] F. Bentosela, Scattering from impurities in a crystal., Comm. Math. Phys. 46, 1976, 153–166.

[C] J. Callaway, Energy Band Theory., Academic Press, New York/London, 1964.

[Ca] U. Carlsson, An infinite number of Wells in the semi-classical limit, Preprint de l'université de Lund, 1989 (à paraitre dans Asymptotic Analysis).

[DH] P. Deift, R. Hempel, On the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator $H-\lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$. Comm. Math. Phys., 103, 1986, 461–490.

[GS] F. Gesztesy, B. Simon, On a theorem of Deift and Hempel., Comm. Math. Phys. 116, 1988, 503–505.

[HSj] B. Helffer, J. Sjöstrand, Multiple wells in the semi-classical limit 1, Comm. P.D.E 9(4) 1984, 337–408.

[KS] M. Klaus, B.Simon, Coupling constant thresholds in non relativistic quantum mechanics., Ann. of Phys. 130, 1980, 251–281.

[LL] L. Landau, E. Lifschitz, Mecanique quantique, théorie non relativiste, Editions MIR, Moscou, 1966.

[O] A. Outassourt, Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique, J. Funct. Anal. 72, 1987, 65–93.

[P] A. Persson, Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator, Math. Scand. 8, 1960, 143–153.

[S1] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I.

Nondegenerate minima: Asymptotic expansion., Annales I.H.P 38(3), 1983, 295-307.

[S2] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solids., Ann. of Phys. 158(2), 1984,415-420.

[S3] B.Simon, The bound state of a weakly coupled Schrödinger operator in one or two dimensions., Ann. of Phys. 97, 1976, 279-288.

[Sk] M.M. Skriganov, Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators., Proc. of the Steklov Inst. of Math., 2, 1987.