Journées Équations aux dérivées partielles

Jean-Yves Chemin

Analyse 2-microlocale et équations d'Euler incompressible

Journées Équations aux dérivées partielles (1989), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1989____A6_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

ANALYSE 2-MICROLOCALE ET EQUATIONS D'EULER INCOMPRESSIBLE.

J.Y. CHEMIN

Introduction.

Dans ce travail, on s'intéresse au système d'Euler incompressible, c'est à dire au système d'équations suivant dans $\mathbf{R}^{1+d}$:

$$(E)\qquad \begin{cases} \dfrac{D}{Dt}v = -\nabla p \\ \operatorname{div}\, v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

où $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \sum_{i=1}^{d} v_i \partial_{x_i}$.

Ici v est le champ des vitesses des particules du fluide, p est la pression. On suppose que d vaut 2 ou 3. De plus, on introduit la matrice tourbillon $\Omega = dv -^t dv$. Notons dès maintenant que, vu que div $v = 0$, on peut calculer v à partir de Ω par :

$$(0.1)\qquad v(x) = c_d \int \Omega(y) \frac{(x-y)}{|x-y|^d} dy\ .$$

Un fait capital en dimension deux d'espace est que

$$\Omega = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \frac{D}{Dt}\omega = 0 \quad (\omega = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1)\ .$$

Avant toute chose, il convient de relier la pression au champ des vitesses. En différenciant l'équation et en prenant la trace de la relation obtenue, il vient

$$(0.2)\qquad \Delta p = |dv|^2 (= \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} v_j \partial_{x_j} v_i)$$

Dans toute la suite on notera

$$(0.3)\qquad p(v,w) = \Delta^{-1}(dv|\mathrm{dw}) (= \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} v_j \partial_{x_j} w_i)$$

Nous utiliserons dans ce travail les propriétés suivantes de p,

Si v est un champ de vecteurs à divergence nulle, alors on a :

$$(0.4)\qquad \|\nabla p(v,w)\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^\infty} \|w\|_{L^2}\ .$$

$$(0.5)\qquad \text{Si}\quad d = 3, \sigma > 1\ ; \|p(v,w)\|_{C^\sigma} \leq C_\sigma (\|\nabla v\|_{L^\infty} \|w\|_{C^{\sigma-1}\cap L^2} + \|\nabla w\|_{L^\infty} \|v\|_{C^{\sigma-1}})$$

$$(0.6)\qquad \text{Si}\quad d = 2, \sigma > 0; \|\nabla p(v,w)\|_{H^\sigma} \leq C_\sigma (\|\nabla v\|_{L^\infty} \|w\|_{H^\sigma} + \|\nabla w\|_{L^\infty} \|v\|_{H^\sigma})$$

et si, de plus div $w = 0$, alors

$$\|p(v,w)\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L^4}\|w\|_{L^4} \ .$$

Ces propriétés, faciles à démontrer, le sont dans [10]. Notons d'une manière générale que nous ne donnerons ici qu'une idée de la démarche. Pour les démonstrations détaillées, nous renvoyons à [10].

L'objet de ce travail est la description très précise de la régularité de la solution de (E) ; on va démontrer une propriété de régularité 2-microlocale des coefficients du champ des vitesses par rapport à la variété involutive $\Lambda = \{(t,x;\tau,\xi)/\tau + (v|\xi) = 0\}$. Cette propriété de régularité 2-microlocale aura deux conséquences :

- la première est l'inclusion du front d'onde C^∞ des coefficients du champ des vitesses dans Λ.
- la seconde est la régularité des trajectoires de ce champ ; plus précisément, ses trajectoires sont des courbes C^∞.

Cette régularité 2-microlocale est à rapprocher de celle obtenue dans [5] pour les équations scalaires d'ordre 1. La variété involutive Λ était alors la variété caractéristique du linéarisé. Or, la partie principale du système d'Euler incompressible est $(\partial_t + \sum_{i=1}^d v_i\partial_{x_i})Id$, le gradient de la pression s'interprête comme un opérateur pseudodifférentiel non linéaire d'ordre 0.

Le plan sera le suivant :

- dans un premier paragraphe, nous énoncerons quelques théorèmes d'existence pour le système (E).
- dans le deuxième, nous étudierons la régularité 2-microlocale du champ des vitesses.
- dans le troisième, nous en déduirons des propriétés de régularité sur le flot du champ des vitesses.

1) Théorèmes d'existence.

Comme souvent dans ce travail, on distinguera les cas de la dimension deux et celui de la dimension trois.

Théorème 1.1.— *Si $d = 3$, et si $v_0 \in C^r \cap L^2$ avec $r > 1$, alors, il existe $\theta > 0$ tel qu'il existe une unique solution v du système (E) dans $L^\infty([-\theta,\theta];C^r) \cap C([-\theta,\theta];L^2)$.*

On résout le schéma itératif suivant :

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \partial_t v_{n+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^d v_{n,i}\partial_{x_i} v_{n+1} = -\nabla p(v_n, v_{n+1}) \\ v_{n+1|_{t=0}} = v_0 \end{cases}$$

On va démontrer que, pour θ assez petit, ceci définit une suite bornée de $L^\infty([-\theta,\theta];C^r) \cap C([-\theta,\theta];L^2)$ qui est de Cauchy dans $C([-\theta,\theta];L^2)$, ce qui assurera clairement le résultat.

Soit $v_n \in C([-\theta,\theta];C^r)$, un champ de vecteurs à divergence nulle ; on désigne par ψ le flot de v_n, et on désigne par F_v l'application suivante :

$$F_v(w)(t,x) = v_0(\psi(-t,x)) + \int_0^t -\nabla p(v,\tilde{w})(\tau,\psi(\tau-t,x))d\tau \tag{1.4}$$

$$\text{où} \quad \tilde{w}(t,x) = w(t,\psi(-t,x)) \ .$$

D'après (0.5), F_v envoie continûment $C([-\theta,\theta];C^r\cap L^2)$ dans lui même ; de plus, comme

$$\|\psi(t,.)\|_{C^r} \leq 1 + C_r(M)|t| \quad \text{où} \quad M = \|v\|_{L^\infty([-\theta,\theta];C^r)} \ ,$$

il en résulte que, pour $\theta \leq C_r(M), F_v$ est contractante dans $C([-\theta,\theta];C^r\cap L^2)$; d'où l'existence d'une unique solution de (1.3) dans cet espace. Il vient alors

$$\|v_{n+1}\|_{L^\infty([-\theta,\theta];C^r\cap L^2)} \leq \|v_0\|_{C^r\cap L^2}\frac{1+C_r(M)\theta}{1-C_r(M)\theta} \tag{1.5}$$

d'où le résultat en prenant classiquement $M = 2\|v_0\|_{C^r\cap L^2}$ et θ tel que $1+C_r(M)\theta \leq 2(1-C_r(M)\theta)$.

Reste à démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est une suite de Cauchy dans $C([-\theta,\theta];L^2)$. En effet, le fait que div $v_n = 0$ pour tout n assure, par intégration par parties standard :

$$\frac{1}{2}\partial_t\|v_{n+2}-v_{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla v_n\|_{L^\infty}\|v_{n+1}-v_n\|_{L^2}\|v_{n+2}-v_{n+1}\|_{L^2} \tag{1.6}$$

d'où le théorème.

Remarquons que les théorèmes d'existence habituels (voir par exemple le survey de A. Majda dans [12]), supposent $v_0 \in H^s$ avec $s > \frac{5}{2}$. Avec ce théorème, dont la démonstration utilise les caractéristiques des champs, on a voulu souligner une parenté qui apparaît à nouveau au deuxième paragraphe, entre le système d'Euler et les équations scalaires quasilinéaires du premier ordre.

Cas de la dimension deux.

Dans ce cas, l'hypothèse $v_0 \in L^2$ est trop forte. En effet, soit $v(x) = (-x_2f(r), x_1f(r))$, où $r = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, un calcul trivial montre que div $v = 0$ et que $\sum_{i=1}^2 v_i\partial_{x_i}v = -\nabla g$ avec $g(r) = \int_0^r \rho f^2(\rho)d\rho$. Il en résulte que v est une solution stationnaire de (E). De plus, il est aisé de vérifier que $\omega(v)(r) = 2f(r) + rf'(r)$.

Soit $f(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho\omega(\rho)d\rho$ avec $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, positive.

Il est clair que $|v(r)| = \frac{C}{r}$ pour r assez grand, donc v n'est pas dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Le bon cadre consiste donc à étudier des perturbations L^2 de telles solutions stationnaires.

Définition 1.2.— *On appelle tourbillon stationnaire (régulier) tout champ de vecteur σ de $\mathbf{R}^2$ tel que $\sigma(x) = (-x_2f(r), x_1f(r))$ avec $\omega(\sigma)(r) \in C_0^\infty(\mathbf{R}\setminus\{0\})$.*

Remarquons qu'il est trivial de vérifier que $\sigma \in C^\infty$ et $\nabla\sigma \in H^\infty$.

Théorème 1.3.— *Soient σ un tourbillon stable (régulier), et $v_0 \in L^2$ telle que $\omega(v_0) \in L^\infty \cap L^q$ avec $q < 2$; il existe une unique v dans $C^1_*(\mathbf{R}^3) \cap C(\mathbf{R}\,; L^2)$ telle que $v_{|t=0} = v_0$ et $\sigma + v$ soit solution de (E).*

Remarques :

(a) Si $\tilde{v}_0$ est un champ de vitesses tel que $\omega(\tilde{v}_0) \in L^\infty_0$ (c'est par exemple le cas des plaques de tourbillon, ou vortex patches, où $\omega(\tilde{v}_0)$ est la fonction caractéristique d'un ouvert borné), il existe un tourbillon stationnaire tel que $\tilde{v}_0 - \sigma \in L^2$.

(b) Par rapport au cas de la dimension trois, on exige beaucoup plus de décroissance des dérivées ; mais beaucoup moins de régularité, (v_0 n'est pas nécessairement lipschitzienne).

(c) Dans [13], Yudovich démontre le même résultat dans le cas du système d'Euler sur un ouvert borné.

Démonstration : On suppose préalablement que v_0 appartient à H^s avec $s > 2$, et on résout l'itération suivante :

$$\partial_t v_{n+1} + \sum_{i=1}^{2}(\sigma_i + v_{n,i})\partial_{x_i} v_{n+1} = -\nabla p(\sigma + v_n, \sigma + v_{n+1}) + \nabla p(\sigma,\sigma) \tag{1.7}$$

$v_{n+1_{|t=0}} = v_0$. Les techniques standard assurent l'existence et l'unicité d'une solution continue à valeurs H^s, à temps petit, grâce à (0.6). Dans le cas où $\sigma = 0$, la solution est globale (voir [2]). Ici, on utilise une inégalité du type de celle de Beale-Kato-Majda, (voir [3]), démontré dans [9] :

$$\|\nabla_x \int \omega(y)\frac{(\overline{x-y})}{|x-y|^2}dy\|_{L^\infty} \leq C\{\|v\|_{L^\infty} + (1 + \log^+(\|\nabla v\|_{H^s}/\|\omega\|_{L^\infty}))\|\omega\|_{L^\infty}\}$$

avec $s > \frac{n}{2}$ et $\overset{+}{\mathrm{Log}}(X) = \sup(\log X, 0)$.

L'estimation hyperbolique, jointe au fait que $\frac{D}{Dt}\omega = 0$ assure alors l'existence globale d'une solution $C(\mathbf{R}; H^s)$.

Soit $(v_{0,n})_{n\in\mathbf{N}} \subset H^s$ telle que $v_{0,n} \xrightarrow{L^2} v_0$, et $\|\omega(v_{0,n})\|_{L^\infty} + \|\omega(v_{0,n})\|_{L^q} \leq C$. Il existe alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset C(\mathbf{R}; H^s)$ solution de :

$$\partial_t v_{n+1} + v_n \nabla v_{n+1} = -\nabla p_n \tag{1.8}$$

et telle que :

$$\|\omega(v_n)\|_{L^\infty} + \|\omega(v_n)\|_{L^q} \leq C \tag{1.9}$$

Il en résulte que (v_n) est une suite bornée de $\bigcap_{2\leq p<+\infty} L^\infty(\mathbf{R}; W^{1,p}) \cap C(\mathbf{R}; L^2)$ et $\|p_n\|_{L^\infty(\mathbf{R};L^2)} \leq C$.

Pour démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $C(\mathbf{R}; L^2)$, on suit la méthode de Yudovich (voir [13]) :

Par intégration par parties et inégalité de Hölder, on obtient :

$$\frac{1}{2}\partial_t \|(v_n - v_{n'})(t,.)\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla v_n(t,.)\|_{L^{p'}} \|v_n - v_{n'}\|_{L^\infty} \|(v_n - v_{n'})(t,.)\|_{L^2}^{2/p}$$

D'après (1.9) $\|v_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq C$, d'où en posant $\frac{1}{p} = 1 - \lambda$, il vient :

$$\frac{1}{2}\partial_t \|v_n - v^s_{n'}(t,.)\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla v_n\|_{L^{1/\lambda}} C^{2\lambda} \|v_n - v_{n'}(t,.)\|_{L^2}^{2(1-\lambda)} \tag{1.10}$$

La théorie de Calderon-Zygmund (voir par exemple [11]) assure que l'on a :

$$\|\nabla v_n\|_{L^{1/\lambda}} \leq C_1 \lambda^{-1} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \geq \frac{1}{q} \tag{1.11}$$

d'où, en posant $\|(v_n - v_{n'})(t,.)\|_{L^2}^2 = z$, il vient $z' \leq C_1 \lambda^{-1} C^{2\lambda} z^{1-\lambda}$ et, par intégration $z(t) \leq ((z(0))^\lambda + C_2 t)^{\frac{1}{\lambda}}$; vu que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans L^2, on a le théorème.

2. Régularité 2-microlocale de la solution.

Elle est décrite par le

Théorème 2.1.—

(a) Si $d = 3$ et si $v_0 \in L^2 \cap C^r$ avec $r > 1$, alors la solution v de (E) vérifie $(\frac{D}{Dt})^j v \in$ Lip $([-\theta, \theta] \times \mathbf{R}^3)$ pour tout entier j et tout $\varepsilon > 0$.

(b) Si $d = 2$ et si $v_0 \in \sigma + L^2$, $\omega(v_0) \in L^\infty \cap L^q$ avec $q < 2$, (σ étant un tourbillon stationnaire), alors la solution v de (E) vérifie $(\frac{D}{Dt})^j v \in C^{1-\varepsilon}(\mathbf{R}^3)$ pour tout entier j et tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration :

Nous l'esquisserons uniquement dans le cas $d = 3$. On introduit les espaces suivants :

$$\sigma > 0 \bar{\mathcal{V}}^{\sigma,k} = \{u \in L^\infty([-\theta,\theta]; C^\sigma \cap L^2) / \forall j \in \{1, \cdots, k\} (\frac{D}{Dt})^j u \in L^\infty[-\theta,\theta], C^\sigma \cap L^2\}$$

$$\bar{\mathcal{V}}^{0,k} = \{u \in L^\infty([-\theta,\theta]; L^2) / \forall j \in \{1, \cdots, k\} (\frac{D}{Dt})^j u \in L^\infty([-\theta,\theta]; L^2)\}$$

$$\sigma > 0 \underline{\mathcal{V}}^{\sigma,k} = \{u \in L^\infty([-\theta,\theta]; C^\sigma) / \forall j \in \{1, \cdots, k\} (\frac{D}{Dt})^j u \in L^\infty[-\theta,\theta], C^\sigma\}$$

On procède par récurrence : Supposons que, pour tout entier $j \leq k$, on ait $(\frac{D}{Dt})^j v \in L^\infty([-\theta,\theta]; C^r \cap L^2)$. On observe alors très facilement que, pour tout $j \leq k$, et tout $\sigma > 0$, on a

$$\underline{\mathcal{V}}^{\sigma,j} \bar{\mathcal{V}}^{0,j} \subset \underline{\mathcal{V}}^{0,j} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}^{\sigma,j} \underline{\mathcal{V}}^{\sigma,j} \subset \underline{\mathcal{V}}^{\sigma,j} . \tag{2.1}$$

Le point important (et plus délicat) est que, si $a \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ telle que $|\partial^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha$

$$(1+|\xi|^2)^{(m-|\alpha|)/2},$$

alors :

(2.2) $\quad a(D)\underline{\mathcal{V}}^{\sigma,j} \subset \underline{\mathcal{V}}^{\sigma-m,j}$ pour tout j, et tout $\sigma > 0$ tel que $\sigma - m > 0$

(2.3) $\quad$ si $m \leq 0$ et $\sigma > 0$, alors $a(D)\bar{\mathcal{V}}^{\sigma,k} \subset \bar{\mathcal{V}}^{\sigma-m,k}$

La démonstration de ce point nécessite l'usage du paraproduit de Bony (voir [4]). En effet, T désignant un paraproduit sur $\mathbf{R}^3$, on démontre que $\bar{\mathcal{V}}^{\sigma,j}$ (resp.$\underline{\mathcal{V}}^{\sigma,j}$) est l'ensemble des u de $L^\infty([-\theta,\theta]; C^\sigma \cap L^2)$(resp $L^\infty[-\theta,\theta]; C^\sigma$) tel que

$$(\partial_t + \sum_{i=1}^{3} T_{v_i}\partial_{x_i})^j u \in L^\infty([-\theta,\theta]; C^\sigma \cap L^2)(\text{resp } L^\infty[-\theta,\theta]; C^\sigma)$$

Ce type de technique a été développée par S. Alinhac (voir [1], et par l'auteur (voir [5], [6], [7], et [8]) pour l'étude de la propagation de singularités conormales dans les systèmes ou équations hyperboliques non semi linéaires. Le cas où nous sommes ici rajoute la variable t, qui apparaît comme un paramètre, ce qui modifie peu les techniques. (voir [10] pour les détails).

Il résulte facilement de (2.1-3) que, si $v \in \bar{\mathcal{V}}^{r,k}$ alors $-\nabla\Delta^{-1}|dv|^2$ aussi, d'où $\frac{D}{Dt}v \in \bar{\mathcal{V}}^{r,k}$; d'où $v \in \bar{\mathcal{V}}^{r,k}$.

Il reste maintenant à démontrer que l'on a, pour tout k

$$(P_k)\underline{\mathcal{V}}^{r,k} \subset \tilde{\mathcal{V}}^k = \{u \in \text{Lip}\ ([-\theta,\theta]\times\mathbf{R}^3)/\forall j \leq k-1, (\frac{D}{Dt})^j u \in Lip([-\theta,\theta]\times\mathbf{R}^3)\}\ .$$

On procède bien sûr par récurrence :

Supposons $w \in \underline{\mathcal{V}}^{r,1}$.On a alors $\partial_t w + v\nabla w \in L^\infty([-\theta,\theta]; C^{r-1})$.
Or $\nabla w \in L^\infty([-\theta,\theta]; C^{r-1})$ donc $\partial_t w \in L^\infty([-\theta,\theta]; C^{r-1}) \subset L^\infty([-\theta,\theta]\times\mathbf{R}^3)$; d'où $P(1)$.

Supposons (P_k) ; soit $w \in \underline{\mathcal{V}}^{r,k+1}$; il vient alors, d'après (P_k)

$$\partial_t w + v\nabla w \in \underline{\mathcal{V}}^{r,k} \subset \tilde{\mathcal{V}}^{k-1} \quad \text{d'où} \quad (P_{k+1}),$$

et ainsi le théorème.

Corollaire 2.2.— *Sous les hypothèses du théorème 2.1, alors*

$$WF(v) \subset \Lambda = \{(t,x;\tau,\xi)/\tau + (v|\xi) = 0\}$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit d'appliquer le théorème 2.2.2 de [5].

3. Régularité du flot d'une solution du système (E).

Proposition 3.1.— *Soit v un champ de vecteurs $C^{1-\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^{1+d})$; alors, si $(\frac{D}{Dt})^j v \in C^{1-\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^{1+d})$ pour tout entier j et tout $\varepsilon > 0$, si α est une courbe C^1 solution de $\alpha'(t) = v(t, \alpha(t))$ alors α est lisse.*

Avant de démontrer cette proposition, nous rappelons qu'un champ de vecteurs $C^{1-\varepsilon}$ n'a pas nécessairement la propriété d'unicité de la solution.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de régulariser v. Soit $\chi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^{1+d})$, valant 1 près de 0, on pose $v_\lambda = \chi(\lambda D)v$. On procède par récurrence : soit (R_k) : $\alpha \in C^{k-\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \forall \varepsilon > 0$.

(R_2) est vraie d'après l'équation vérifiée par α.

Supposons $(R_k), k \geq 2$. Posons $\alpha_\lambda(t) = \int_0^t v_\lambda(\tau, \alpha(\tau))d\tau$. D'après (R_k), on a :

$$\alpha_\lambda^{(k)} = (\frac{D}{Dt})^{k-1} v_\lambda(t, \alpha(t)) \ .$$

D'après [5], on a $\|(\frac{D}{Dt})^{k-1} v_\lambda\|_{C^{1-\varepsilon}} \leq C$; d'où

$$\alpha_\lambda^{(k)} \quad \text{est borné dans} \quad C^{k+1-\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$$

d'où la proposition.

Corollaire 3.2.—

(a) Sous les hypothèses du théorème (2.1) (a), le flot ψ de la solution ψ est $C^\infty([-\theta, \theta]; C^r(\mathbf{R}^3))$;

(b) Sous les hypothèses du théorème 2.1 (b), le flot ψ de la solution v appartient, pour tout $\theta > 0$, à $C^\infty([-\theta, \theta]; C^{e^{-c_1 \theta}})$.

Démonstration : Le point (a) est clair d'après la proposition 3.1. Le point (b) résulte de l'argument donné par Yudovich dans [13], que nous rappelons brièvement. Vu que $v \in L^\infty(\mathbf{R}; C^1_*)$ il existe $C_1 > 0$ telle que :

$$|v(t,x) - v(t,y)| \leq C_1 |x-y|(1 + |\log|x-y||) \ .$$

Soit z_1 et z_2 deux solutions de $z'(t) = v(t, z(t))$. Si $z_1(0) - z_2(0)$ est assez petit, on a, pour t assez petit :

$$\frac{d}{dt}|z_1 - z_2|^2 \leq C_1 |z_1 - z_2|^2 \log|z_1 - z_2|^2$$

d'où $|z_1(t) - z_2(t)| \leq |z_1(0) - z_2(0)|^{e^{-c_1 t}}$ d'où l'existence d'un flot et la régularité annoncée dans le corollaire, d'après la proposition 3.1.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires. Annales Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série 21 1988 p.91-133.

[2] C. Bardos, Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en deux dimension. Journ. Math. Analysis and Appl. (1972) p.769-790.

[3] J.T. Beale, T. Kato, et A. Majda, Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. Comm. Math. Phys. 94, 1984, p.61-66.

[4] J.M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires Annales Scien. Eco. Norm. Sup. 4ème série 14, 1981, p.209-246.

[5] J.Y. Chemin, Calcul paradifférentiel précisé et applications à des équations aux dérivées partielles non linéaires. Duke Math Journal vol.56 n°3 1988, p.431-469.

[6] J.Y. Chemin, Régularité de la solution d'un problème de Cauchy fortement non linéaire à données singulières en un point. Prépublication de l'Ecole Polytechnique, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[7] J.Y. Chemin, Evolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires. Prépublication de l'Ecole Polytechnique, à paraître dans l'American Journal of Math.

[8] J.Y. Chemin, Evolution d'une singularité ponctuelle dans un fluide compressible. Prépublication de l'Ecole Polytechnique 1989.

[9] J.Y. Chemin, Remarques sur l'apparition de singularités dans les écoulements eulériens compressibles. Prépublication de l'Ecole Polytechnique 1989.

[10] J.Y. Chemin, En préparation.

[11] R. Coifman et Y. Meyer, Au-delà des opérateurs pseudodifferentiels. Astérisque 1978.

[12] A. Majda, Vorticity and the Mathematical Theory of Incompressible Fluid Flow. CPAM 39 1986 S.187-S220.

[13] V.I. Yudovich, Non stationary flow of an ideal incompressible liquid. Zh. Vych. Mat 3, 1963 p.1032-1066 (en russe).