JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ÉRIC LEICHTNAM

Régularité microlocale pour des problèmes de Dirichlet non linéaires non caractéristiques d'ordre deux à bord peu régulier

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A21_0>

REGULARITE MICROLOCALE POUR DES PROBLEMES DE DIRICHLET NON LINEAIRES NON CARACTERISTIQUES D'ORDRE DEUX A BORD PEU REGULIER

Eric LEICHTNAM

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
45 rue d'Ulm
Paris

Ce texte est l'introduction d'un article à paraître au Bulletin de la Société Mathématique de France.

Dans [5] BONY a étudié la régularité microlocale des solutions réelles d'une équation non linéaire générale au-delà des chocs et en dessous de l'interaction. Dans [21] M. TOUGERON a étudié, en autres, la réflexion des singularités (en dessous de l'interaction) pour des problèmes aux limites non linéaires non caractéristiques à bord C^∞ (voir aussi [1]). La notion de front d'onde d'une sous-variété de régularité Sobolev (ou Hölderienne) limitée étant définie dans [12], l'objet de cet article est d'étudier, en dessous de l'interaction (voir cependant §7 et §8) le comportement (réflexion, diffraction, rayons glissants) des singularités microlocales d'une solution réelle d'un problème de Dirichlet d'ordre deux non linéaire non caractéristique au voisinage d'un bord peu régulier. Pour obtenir nos résultats nous redresserons le bord peu régulier (voir section 4) introduisant ainsi dans l'équation des termes peu réguliers à régularité microlocale additionnelle; nous paralinéariserons l'équation, nous utiliserons les espaces $H^{s,s'}$ définis par HÖRMANDER [8] et le calcul paradifférentiel tangentiel développé dans [21] dont nous rappellerons quelques résultats dans la section 3.

Dans la section 2 nous reprenons (def. 2.1) la notion exposée dans [21] de régularité microlocale en un point du bord (non caractéristique) et énonçons nos résultats : théorèmes 2.5, 2.7, 2.10 et 2.13. Le théorème 2.5 découle des résultats de [21] et étudie la réflexion des singularités par un bord peu régulier. Le théorème 2.7 étudie la diffraction des singularités, il précise dans les espaces de Sobolev et étend au cas non linéaire le résultat établi (à partir d'IVRII [9]) dans le chapitre 24 de [8] dans le cas des singularités C^∞ et d'un bord régulier. La preuve du théorème 2.7 est exposée dans la section 5, nous suivons de près la preuve donnée dans [8] et l'adaptons au cas paradifférentiel. Nous supposerons que la projection sur la base du champ hamiltonien du symbole principal de l'équation linéarisée ne s'annule pas, cette hypothèse (vérifiée par l'opérateur des ondes) nous permettra de ne pas consommer de dérivées en x (voir lemme 24.4.3

de [8] et lemme 5.2). Le théorème 2.10 étudie le cas des rayons glissants ayant un contact d'ordre limité avec le bord, il précise dans les espaces de Sobolev et étend au cas non linéaire le résultat de Melrose-Sjöstrand [15] dans le cas des singularités C^∞ et d'un bord régulier. La preuve du théorème 2.10 est exposée dans la section 6, nous suivons de près la preuve donnée dans [15] et l'adaptons au cas paradifférentiel.

Pour ce qui est des résultats relatifs à l'interaction pour des équations semi-linéaires hyperboliques, le travail de BEALS [2] montre qu'en dimension supérieure à deux il est nécessaire de faire certaines hypothèses sur la régularité des solutions dans le passé pour limiter "l'étalement" des singularités dans l'avenir. Une condition appropriée est celle de "conormalité" par rapport à certaines hypersurfaces. Il a été prouvé dans BONY [6], [7], MELROSE-RITTER [14] que la régularité est préservée pour certaines interactions d'ondes conormales. Guidés par les travaux de BONY nous définissons dans la section 7 le concept de sous-variété V de classe $H^{s,k}_\Lambda$, V ayant des singularités de type "conormal" par rapport à une hypersurface Λ $(\subset V)$ de classe $H^{s+k-1/2}$. Ceci nécessite au préalable l'étude d'algèbres de fonctions $H^{s,k}_{\Lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient des propriétés d'invariance par difféomorphisme, Λ_1 désignant une hypersurface de classe $H^{s+k-1/2}$ de $\mathbb{R}^n$.
Le théorème 2.13 considère le cas d'une solution u assez régulière d'une équation quasi-linéaire d'ordre deux et d'un bord $\partial\Omega$ de classe $H^{s,\infty}_\Lambda$. Si $u|_{\partial\Omega}$ est de classe $H^{s,\infty}_\Lambda$ et si Λ est inclus dans la zone elliptique du symbole principal de l'équation linéarisée alors le théorème 2.13 affirme (sous des hypothèses convenables) que les singularités de $\partial\Omega$ et $u|_{\partial\Omega}$ ne produiront aucune singularité hors du conormal de Λ dans la solution u . Dans la section 8, on prouve le théorème 2.13 en travaillant dans des cartes locales, en utilisant un argument de commutation analogue à celui de [5] et en invoquant les théorèmes 2.7 et 2.10.
Enfin le cas où les singularités du bord sont incluses dans la zone hyperbolique du symbole principal peut être traité à l'aide de [16].

§2. Enoncé des résultats.

Soit Ω un ouvert à bord de $\mathbb{R}^n$ (localement) défini par une inéquation $y_1 \geq f(y')$ où y' désigne $(y_2,\ldots,y_n)$, f appartient à l'espace de Sobolev H^s_{loc} avec $s > 4 + n/2$. Nous considérons une solution réelle u de classe $H^s_{loc}(\Omega)$ de l'équation du second ordre $F(y,\partial^\alpha u) = 0$ dans Ω où $F(y,z_\alpha)$ $|\alpha| \leq 2$ est une fonction réelle C^∞. Nous supposerons toujours que l'opérateur différentiel linéarisé de $F(y,\partial^\alpha u)$:

$$(1) \qquad \widetilde{F}(y,D_y)v(y) = \sum_{|\alpha|\leq 2} (\partial_{z_\alpha} F)(y,\partial^\beta u(y))\partial^\alpha v(y)$$

est non caractéristique en tout point de $\partial\Omega$ et que son symbole principal $p(y,\xi)$ est de type principal réel : p est réel et $dp \neq 0$ sur $p^{-1}(0)$. Soit $\alpha^o = (f(x_o'),x_o',\xi_o') = (x_o,\xi_o')$ un point de $T^*\partial\Omega \smallsetminus 0$, on dit que α^o n'est pas dans le front d'onde d'ordre $H^{s''}$ de $\partial\Omega$ (noté $WF_{H^{s''}}\partial\Omega$, voir [12]) où $s'' \leq 2s-2-n/2$ s'il existe un opérateur pseudo-différentiel A d'ordre 0 elliptique en (x_o',ξ_o') tel que $Af \in H^{s''}$ (on dit alors que f est microlocalement de classe $H^{s''}$ en α^o ce qu'on note $f \in H^{s''}_{\alpha^o}$), une telle propriété ne dépend pas du choix de la carte car $s'' \leq 2s - \frac{n-1}{2} -1$ (voir [12]). La proposition suivante est empruntée à M. TOUGERON ([21]), elle permet de définir de manière invariante (pour u) la notion de régularité microlocale jusqu'au bord au point $\alpha^o \in T^*\partial\Omega$. Posons $\chi_1(x_1,x') = (x_1+f(x'),x')$ où x' désigne $(x_2,\ldots,x_n)$; dans le système de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ Ω et $\partial\Omega$ sont respectivement définis par $x_1 \geq 0$ et $x_1 = 0$.

Proposition et définition (M. TOUGERON) 2.1.

S'il existe un opérateur pseudo-différentiel tangentiel $A \in T^0(\overline{\mathbb{R}}^n_+$ (cf. [15]) d'ordre 0, proprement supporté, elliptique en (x_o,ξ_o') et tel que $A(u\circ\chi_1)$ $(x_1,\ldots,x_n)$ appartienne à $H^{s'}_{loc}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ avec $s' \leq s''$ alors cette propriété est vraie dans toute autre carte de bord (définie par un graphe) de $\partial\Omega$ relative à $\alpha^o \notin WF_{H^{s''}}(\partial\Omega)$. En ce cas on dit que u est microlocalement de classe $H^{s'}$ au point α^o, ce qu'on note $u \in H^{s'}_{\alpha^o}$.

Remarque 2.2. Le théorème d'inversion microlocale de [12] permet alors de voir qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que u soit microlocalement de classe $H^{s'}$ aux points $(y_1, y', {}^t\chi_1^{-1'}(y) . (\xi_1, \xi'))$ tels que $\xi_1 \in \mathbb{R}$, y' et ξ' soient dans des petits voisinages de x'_o et ξ'_o , et $0 < y_1 - f(y') < \varepsilon$.

Preuve. Voir appendice à la fin de l'article.

Maintenant nous rappelons quelques définitions géométriques (cf. [8], [15]) pour les points du bord. Notons j^* la surjection naturelle de $T^*_{x_o}\mathbb{R}^n$ sur $T^*_{x_o}\partial\Omega$, son noyau est le conormal $N^*_{x_o}\partial\Omega$. Notons $p(y,\xi)$ le symbole principal de l'opérateur linéarisé (1) et H_p le champ hamiltonien de p , il est de classe C^2 car $s > 4+n/2$. Soit η_o un point de $N^*_{x_o}\partial\Omega\setminus 0$, $p(x_o,\eta_o)$ est non nul car $\partial\Omega$ est non caractéristique.

Ω [resp. $\partial\Omega$] étant définis par $\varphi \geq 0$ [resp. $= 0$] où φ est de classe C^1 rappelons la classique :

Définition 2.3. Soit $\alpha^o \in T^*_{x_o}\partial\Omega\setminus 0$ et ξ_o un antécédent de α^o par j^* . α^o est dit :

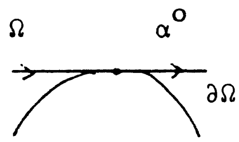
a) point elliptique (au sens de Melrose [13]) si le trinôme $Q(\lambda) = p(x_o, \xi_o + \lambda\eta_o)$ n'a aucune racine réelle.

b) point hyperbolique si $Q(\lambda)$ possède deux racines réelles distinctes.

c) point glancing si $Q(\lambda)$ possède une racine réelle double λ_1 ; et si de plus $H_p^2 . \varphi(x_o, \xi_o + \lambda_1\eta_o) > 0$, α^o est dit point de diffraction.

Remarque 2.4. 1°) Dans le cas b), si λ_1 et λ_2 désignent les deux racines réelles, il y a (dans $\overset{\circ}{\Omega}$) deux demi-bicaractéristiques issues respectivement de $(x_o, \xi_o+\lambda_1\eta_o)$ et $(x_o, \xi_o+\lambda_2\eta_o)$. Par abus nous dirons qu'elles sont "issues de α^o" α^o est l'image par j^* de ces deux points.

2°) Dans le cas c) où α^o est point de diffraction, les deux demi-bicaractéristiques (dans $\overset{\circ}{\Omega}$) se raccordant en $(x_o, \xi_o+\lambda_1\eta_o)$ y ont un contact d'ordre 1. On peut parler d'un seul rayon (rasant) "issu de α^o" :



Le théorème suivant découle des résultats de M. TOUGERON et étudie le comportement de la solution réelle u dans les régions elliptiques et hyperboliques

Théorème 2.5. Soient $s' \leq s''$ des réels inférieurs ou égaux à $2s-2-n/2$. supposons que $u|_{\partial\Omega}$ soit de classe H^s et que α^o ne soit pas dans le front d'onde d'ordre $H^{s''}$ de $\partial\Omega$ ni dans celui d'ordre $H^{s'}$ de $u|_{\partial\Omega}$ (cette expression a un sens, voir [12]). Alors on a :

1°) Si α^o est un point elliptique et $s' = s''$ alors $u \in H^{s'}_{\alpha^o}$ (def. 2.1).

2°) Si α^o est un point hyperbolique, $s' \leq s''-1$, et u est microlocalement de classe $H^{s'}$ (au voisinage de x_o) sur un demi-arc de bicaractéristique de p issu de α^o , alors $u \in H^{s'}_{\alpha^o}$.

Remarque 2.6. Dans le cas 2°), la remarque 2.2 et le théorème de propagation de singularités de J.M. BONY ([5]) montrent que u est microlocalement de classe $H^{s'}$ sur l'autre demi-bicaractéristique "issue de α^o" (tant qu'elle ne rencontre pas le bord).

Le théorème suivant étudie le comportement de la solution $(H^s_{loc}$, $s > 4+n/2$

réelle u au voisinage d'un point de diffraction, il précise le résultat établi dans le chapitre 24 de [8] (singularités microlocales C^∞ , bord régulier) dans les espaces de Sobolev et l'étend au cas non linéaire.

Théorème 2.7. Soient s' et s'' des réels tels que $1+s' \leq s'' \leq 2s-2-n/2$. Supposons que $u|_{\partial\Omega}$ soit de classe H^s et considérons un point de diffraction α^o qui ne soit pas dans le front d'onde d'ordre $H^{s''}$ de $\partial\Omega$ ni dans celui d'ordre $H^{s'}$ de $u|_{\partial\Omega}$. Supposons que, dans un petit voisinage de x_o , u soit microlocalement de classe $H^{s'}$ en un point (à l'intérieur de Ω) d'une demi-bicaractéristique de p issue de α^o . Enfin supposons que la projection sur la base de $H_p(x_o,\xi_o+\lambda_1\eta_o)$ soit non nulle, λ_1 étant le réel de la def. 2.3.c). Alors $\forall\varepsilon > 0$, $u \in H^{s'-\varepsilon}_{\alpha^o}$.

Remarque 2.8. La dernière hypothèse est satisfaite par l'opérateur des ondes (par exemple). Sur l'autre demi-bicaractéristique (tant qu'elle ne rencontre pas le bord) u est microlocalement de classe $H^{s'-\varepsilon}$ $\varepsilon > 0$.

Dans la section 6 nous démontrons le théorème 2.10 qui traite le cas des rayons glissants, il précise le résultat établi dans [15] (singularités microlocales C^∞ , bord régulier) dans les espaces de Sobolev et l'étend au cas non linéaire.

Hypothèses 2.9. Nous supposerons $s > 4+n/2$, que $u|_{\partial\Omega}$ et $\partial\Omega$ sont microlocalement de classe $H^{s''}(s'' \leq 2s-2-n/2)$ hors d'un ensemble Z conique fermé inclus dans la zone elliptique du symbole principal p de l'opérateur linéarisé, et que dp et la 1-forme fondamentale ω de $T^*\overline{\Omega}$ sont linéairement indépendantes sur $\Sigma(p) = p^{-1}(0) \cap T^*\overline{\Omega}\setminus 0$. Rappelons que $\partial\Omega$ est non caractéristique pour p , nous supposerons que les restrictions à $T^*\overline{\Omega}|_{\partial\Omega}$ de dp et ω sont linéairement indépendantes sur $\Sigma(p)$ et que H_p est au plus tangent à $\partial T^*\Omega\setminus 0$ en $p = 0$ à l'ordre $s-1-n/2$ (exclu), ceci signifie que si Ω est définie localement par une inéquation $\varphi(x) \geq 0$ où φ est H^s et si $\alpha^o \in T^*\partial\Omega\setminus 0$ est un quelconque point de glancing (définition 2.3) alors il existe un entier naturel $k < s-1-n/2$ tel qu'au point $(x_o,\xi_o+\lambda_1\eta_o)$ (notation de 2.3) $H_p^j\varphi$ est nul pour $j \leq k-1$ et $H_p^k\varphi$ est non nul. Cette dernière hypothèse permet de montrer (voir [8] ou [15]) que le champ H_p définit un flot dont les courbes sont appelées bicaractéristiques généralisées. En suivant de près [15] nous démontrerons le :

Théorème 2.10. Soit s' un réel strictement inférieur à $s''-1$. Supposons que u soit microlocalement de classe $H^{s'}$ (voir définition 2.1) en un point d'un arc Γ de bicaractéristique généralisée et que Γ ne contienne aucun point de diffraction. Alors en tout point de Γ ,u est microlocalement de classe $H^{s'}$.

Remarque 2.11. Comme $s''-2 \leq 2s-4-n/2$ nous nous ramènerons à une équation para-différentielle tangentielle où le second membre est microlocalement de classe $H^{s''-2}$ sur un voisinage de Γ , dans l'énoncé précédent il y a donc une perte de $1+\varepsilon$ par rapport à la régularité du second membre.

Dans la section 7 nous étudions des algèbres de fonctions $H^{s,k}_{\Lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient des propriétés d'invariance par difféomorphisme et ont une régularité de "type conormal" (voir [6]) par rapport à une hypersurface Λ_1 de $\mathbb{R}^n$ de classe $H^{s+k-1/2}$. Ceci nous permet de définir de manière invariante le concept de sous-variété V de classe $H^{s,k}_{\Lambda}$ (définition 7.10). Dans la section 8 nous démontrons un résultat d'analyse globale, avant de l'énoncer nous introduisons quelques notations.

Notations 2.12. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $H^{s,+\infty}_{\Lambda}$ (voir def. 7.10) par rapport à une hypersurface C^∞ Λ . Considérons une fonction u de classe $H^s_{loc}(\overline{\Omega})$ $s > 4+n/2$ solution d'une équation quasi-linéaire d'ordre 2 $Pu = 0$ et telle que $u|_{\partial\Omega}$ soit de classe $H^{s,\infty}_{\Lambda}$ (def. 7.12). Nous supposerons que le conormal de Λ est inclus dans la zone elliptique du symbole principal p de l'équation linéarisée et que p vérifie toutes les hypothèses 2.9. Alors nous démontrerons le :

Théorème 2.13. Supposons que chaque bicaractéristique (maximale) généralisée de p possède un point en lequel u est microlocalement de classe C^∞ et qu'en chaque point de diffraction la projection sur la base de H_p est non nulle. Alors u est de classe C^∞ à l'intérieur de Ω et même microlocalement de classe C^∞ en tout point de $T^*\partial\Omega\setminus 0$ qui n'appartient pas au conormal de Λ .

Remarque 2.14. Donnons un exemple. Soit $\alpha(x_1,\dots,x_{n-1})$ une fonction de classe $H^{s,\infty}_{x_1=o}$ (voir [6]) de hessienne définie positive en tout point, et telle que les gradients de α et $(x_2,\dots,x_{n-1}) \to \alpha(0,x_2,\dots,x_{n-1})$ soient de norme > 1 . Désignons par Ω l'ouvert à bord de $\mathbb{R}^n$ défini par $t \geq -\alpha(x)$ et considérons une fonction u de classe $H^s(\overline{\Omega})$ où $s > n/2 + 4$ vérifiant dans $\overline{\Omega}$ une équation du type :

$$(2) \qquad \partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j}^2 u + F(t,x,u,\nabla u) = 0$$

où F est de classe C^∞ . Nous supposerons aussi $u|_{\partial\Omega} \in H^{s,\infty}_\Lambda$ et u de classe C^∞ pour tout $t \ll 0$. Comme la hessienne de α est définie positive les points glancing sont en fait des points de diffraction. Enfin le long de toute bicaractéristique généralisée t est une fonction monotone, donc toute bicaractéristique rencontrera une région où u est C^∞ . Le théorème 2.13 dit alors que u est C^∞ à l'intérieur de Ω .

Bibliographie.

[1] A. ALABIDI : "Réflexion transverse des singularités pour un problème aux limites non linéaires d'ordre 2". Thèse de 3ème cycle, Rennes 1984.

[2] M. BEALS : "Self-spreading and strength of singularities for solutions to semi-linear wave equations", Ann. of Math. 118 (1983), 187-214.

[3] M. BEALS : "Nonlinear wave equations with data singular at one point", Contemp. Math. 27 (1984), 83-95.

[4] J. BERNING et M. REED : "Reflection of singularities of one-dimensional semi-linear wave equations at boundaries", J. Math. An. Appl. 72 (1979), 635-653.

[5] J.-M. BONY : "Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires", Ann. Scien. de L'école Norm. Sup. 14 (1981).

[6] ―――――― : "Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires", Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, exp. no.2, 1981-82.

[7] ―――――― : "Interactions des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires", Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, exp. no. 10, 1983-84.

[8] L. HÖRMANDER : "The Analysis of Linear Partial Differential Operators III", Springer 1985.

[9] V. IVRII : "Wave fronts for solutions of boundary value problems for a class of symmetric hyperbolic systems". Sibirian Math. J. 21, (1981) 527-534.

[10] G. LEBEAU : "Inégalités relatives aux deuxièmes microlocalisations et applications à la diffraction", Thèse d'Etat, Orsay, 1983.

[11] E. LEICHTNAM : "Interactions de singularités pour une classe d'équations à caractéristiques doubles", à paraître aux Annales de l'Institut Fourier", 1985.

[12] ―――――― : "Front d'onde d'une sous-variété; applications aux équations aux dérivées partielles non linéaires", à paraître aux Communications in Partial Differential Equations, 1985.

[13] R. MELROSE : "Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems", Duke Math. J. 42. 4 (1975), 605-635.

[14] R. MELROSE et N. RITTER : "Interaction of non linear progressing waves for semi linear wave equations", Annals of Math. 121 (1985) 187-213.

[15] R. MELROSE et J. SJÖSTRAND : "Singularities of boundary value problems I", Comm. in pure and applied Math., Vol. XXXI (1978) 593-617.

[16] G. METIVIER et M. BEALS : "Progressing wave solutions to certain nonlinear mixed problems", preprint 1985.

[17] Y. MEYER : "Remarques sur un théorème de J.-M. BONY, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo n°1 (1980) 1-20.

[18] M. OBERGUGGENBERGER : "Propagation of singularities for semi-linear mixed hyperbolic systems in two variables, Ph.D. thesis, Duke Univ., 1981.

[19] J. RAUCH : "Singularities of solutions to semi-linear wave equations", J. Math. Pures et Appl. 58 (1979), 299-308.

[20] J. RAUCH et M. REED : "Propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations in one space variable, Ann. of Math. 111 (1980) 531-552.

[21] M. TOUGERON : "Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires", Thèse d'Etat, 1985.