JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MICHEL BONY

Solutions globales bornées pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann en dimension 1 d'espace

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A16_0>

SOLUTIONS GLOBALES BORNEES POUR LES MODELES DISCRETS DE L'EQUATION DE BOLTZMANN, EN DIMENSION 1 D'ESPACE.

par J.-M. BONY

Dans un modèle tridimensionnel des équations de la cinétique des gaz on se donne une famille finie $(C_i)_{i\in I}$ de vecteurs vitesse de $\mathbb{R}^3$, les fonctions inconnues $u_i(X,t)$ représentant la densité de molécules animées de la vitesse C_i , au point $X\in\mathbb{R}^3$, et à l'instant t .

On admet que seules les interactions binaires entre molécules jouent un rôle, et que le nombre de couples de molécules de vitesses C_i et C_j transformées après interaction en molécules de vitesse C_k et C_ℓ dans un petit volume autour de (X,t) est égal à $A^{ij}_{k\ell}\, u_i\, u_j\, d^3X\, dt$, où les constantes $A^{ij}_{k\ell}$ sont données (voir [3]).

On est donc amené à résoudre le problème de Cauchy.

$$(1)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + C_i.\nabla u_i = \sum_{j,k,\ell} (A^{k\ell}_{ij}\, u_k\, u_\ell - A^{ij}_{k\ell}\, u_i\, u_j)$$

$$(2)\qquad u_i(X,0) = u^o_i(X)$$

La signification physique des $A^{ij}_{k\ell}$, et la conservation de l'énergie et du moment cinétique imposent :

$$(3)\qquad A^{ij}_{k\ell} = A^{ji}_{k\ell} = A^{ij}_{\ell k} \geqslant 0 \ .$$

$$(4)\quad A^{ij}_{k\ell} \neq 0 \Rightarrow C_i + C_j = C_k + C_\ell \text{ et } |C_i|^2+|C_j|^2 = |C_k|^2 + |C_\ell|^2 \ .$$

Si on pose $X = (x,y,z)$, et si on suppose que les u^o_i ne dépendent que de x , il résulte de l'unicité que les solutions ne dépendent également que de x .

C'est ce problème unidimensionnel que nous nous poserons par la suite, dans $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+$:

$$(5)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j,k,\ell \in I} (A_{ij}^{k\ell} u_k u_\ell - A_{k\ell}^{ij} u_i u_j) .$$

$$(6)\qquad u_i(x,0) = u_i^o(x) \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} .$$

Les c_i représentent la première composante des C_i . Les $A_{k\ell}^{ij}$ vérifient (3) et (4') :

$$(4')\qquad A_{k\ell}^{ij} \neq 0 \Rightarrow c_i + c_j = c_k + c_\ell .$$

Sous ces hypothèses, nous avons le résultat général suivant :

<u>Théorème</u> 1. On suppose que les u_i^o sont positives, sommables et bornées. Alors, il existe une et une seule solution u , appartenant à $L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$, du problème de Cauchy (5) (6). On a en outre une estimation :

$$(7)\qquad \sup_{i,x,t} u_i(x,t) \leqslant [\sup_{i,x} u_i^o(x)] \, . \exp(a+b\mu^2 \log\mu)$$

où a et b ne dépendent que de l'équation, et où μ désigne la masse totale :

$$(8)\qquad \mu = \sum_i \int u_i^o(x)dx .$$

Un cas particulier intéressant est celui des modèles droite-gauche. On suppose que I est réunion disjointe de deux sous-ensembles D et G tels que

$$(9)\qquad i \in D \text{ (resp.G)} \Rightarrow c_i \geqslant 0 \text{ (resp.} \leqslant 0).$$

On suppose en outre que les interactions ne se produisent qu'entre particules se déplaçant dans des directions différentes :

$$(10)\qquad A_{k\ell}^{ij} \neq 0 \Rightarrow (i,j) \text{ et } (k,\ell) \in (D \times G) \cup (G \times D).$$

De nombreux modèles, notamment les projections unidimensionnelles du modèle de Maxwell-Broadwell, rentrent dans ce cadre.

Théorème 2. Pour un modèle droite-gauche, l'estimation (7) du théorème 1 peut être remplacée par

$$(7') \qquad \sup_{i,x,t} u_i(x,t) \leq [\sup_{i,x} u_i^o(x)] \exp(b\mu).$$

Bien entendu, compte tenu de la propagation à vitesse finie, on a existence globale pour des données de Cauchy localement bornées. Si celles-ci sont bornées, la solution au point (x,t) ne dépend que des données de Cauchy sur l'intervalle $[x-Ct,x+Ct]$, dont la masse est bornée par $C^{te}t$. On a donc le corollaire suivant.

Corollaire. On suppose que les u_i^o sont positives et bornées. Il existe alors une unique solution u appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$ du problème de Cauchy (5) (6), et on a

$$(11) \qquad \sup_{i,x} u_i(x,t) \leq \exp(\alpha+\beta t^2 \log t).$$

En outre, pour les modèles droite-gauche, on a

$$(11') \qquad \sup_{i,x} u_i(x,t) \leq \exp(\alpha+\beta t).$$

Remarque. Il existe une littérature abondante sur ce sujet (voir [2] et sa bibliographie). Pour des données de masse petite, l'existence de solutions globales bornées a été démontrée en toute dimension par Illner [5] (voir aussi [7][6][4]). Pour le modèle de Broadwell unidimensionnel, l'existence de solutions globales est due à Crandall-Tartar [8], et le caractère borné de celles-ci (sans borne explicite toutefois) est dû à J.T. Beale [1].

Remarque. Nous ne faisons aucune hypothèse de microréversibilité [i.e. $A_{k\ell}^{ij} = A_{ij}^{k\ell}$], et n'utilisons donc pas l'inégalité d'entropie qui en résulterait. Nous utiliserons par contre des arguments (tendance à la séparation des molécules) spécifiques à des données de masse finie dans un ouvert non borné (voir la remarque suivant le lemme 3). Le lecteur pourra vérifier que nos démonstrations deviennent extrêmement simples dans le cas où on suppose les c_i distincts.

2. ESTIMATION DU TERME D'INTERACTION.

Il est bien connu (voir[8]) que le problème de Cauchy (5), (6) admet localement en t une unique solution positive bornée, et que l'on a propagation à vitesse finie. Si T^* est le temps d'existence de la solution, il suffit donc de montrer que les u_i sont bornée sur $\mathbb{R} \times [0,T^*[$ pour prouver du même coup que $T^* = +\infty$. Le théorème d'existence locale étant valable dans C^∞, le lecteur pourra même supposer, pour prouver les estimations, que les $u_i(x,t)$ sont C^∞ et a support borné pour chaque t.

Le lemme suivant, qui fournira une estimation du terme d'interaction, jouera un rôle capital.

<u>Lemme</u> 3. Sous l'une des conditions (a) ou (b) ci-dessous, on a

(12) $$\iint_{\mathbb{R}\times [0,T^*[} u_i(x,t)u_j(x,t)dx\, dt \leqslant C^{te}(\mu^2+\mu)$$

a) $$c_i \neq c_j$$

b) Il existe k et ℓ tels que

(13) $$A^{ij}_{k\ell} \neq 0 \quad \text{et} \quad c_k < c_i = c_j < c_\ell .$$

a) Sous cette hypothèse,(12) résulte du fait que la quantité :

(14) $$L(t) = \Sigma\Sigma \iint (c_i-c_j)\, \mathrm{Sgn}(y-x)u_i(x,t)u_j(y,t)dx\, dy$$

est majorée en valeur absolue par $C^{te}\ \mu^2$, et a pour dérivée

$$L'(t) = -\ 2\Sigma\Sigma\ (c_i-c_j)^2 \int u_i(x,t)u_j(x,t)dx .$$

Il suffit d'intégrer $L'(t)$ entre 0 et T^* pour obtenir le résultat.

b1) Soit $c \in \mathbb{R}$, et $E = \{\alpha \in I \,|\, c_\alpha = c\}$. On pose

(15) $$K(t) = \sum_{\alpha\in E} \int u_\alpha(x,t)dx .$$

La fonction K reste comprise entre 0 et μ, et on a donc, pour $T < T^*$

(16) $$\left| \int_{[0,T]} K'(t)dt \right| = \left| \iint_{[0,T]\times\mathbb{R}} F(x,t)dx\, dt \right| \leqslant \mu$$

avec

$$(17) \qquad F(x,t) = \sum_{\alpha\in E;\beta,\gamma,\delta\in I} (A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}\, u_\gamma u_\delta - A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\, u_\alpha u_\beta)$$

Dans cette somme, les termes correspondant à $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in E^4$ se détruisent par symétrie. Il est impossible, d'après (4'), que trois seulement des indices appartiennent à E . Nous regroupons enfin, dans le membre de droite de (17), en une même fonction G les termes faisant intervenir un produit $u_i u_j$ avec $c_i \neq c_j$, et en une même fonction P(x,t) [resp.N(x,t)] les termes positifs [resp négatifs] restants. On a

$$(18) \qquad F(x,t) = G(x,t) + P(x,t) - N(x,t)$$

$$(19) \qquad P(x,t) = \Sigma A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} u_\gamma u_\delta \ ; \ c_\alpha = c \ , \ c_\gamma = c_\delta \neq c \ , \ c_\beta \in I$$

$$(20) \qquad N(x,t) = \Sigma A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} u_\alpha u_\beta \ ; \ c_\alpha = c_\beta = c \ , \ c_\gamma \neq c, \ c_\delta \neq c$$

$$(21) \qquad \iint_{\mathbb{R}\times[0,T^*]} |G(x,t)|\, dx\, dt \leqslant C^{te} \mu^2$$

d'après la partie a) du Lemme.

b2) On démontrera b) par la récurrence suivante. On suppose (12) établi pour tous les quadruplets (i,j,k,ℓ) vérifiant (13) et $c_k < c$, et on cherche à l'établir pour les quadruplets vérifiant (13) et $c_k = c$.

Dans les termes constituant (20), on a $c_\gamma + c_\delta = 2c$ d'après (4'), et on a donc $c_\gamma < c$ ou $c_\delta < c$. L'hypothèse de récurrence assure donc que

$$(22) \qquad \iint_{\mathbb{R}\times[0,T^*]} N(x,t)\, dx\, dt \leqslant C^{te}(\mu^2+\mu) \ .$$

On déduit donc de (18), (16), (21), (22) que l'intégrale de P(x,t) sur $\mathbb{R}\times[0,T]$ admet une borne du même type. D'autre part, dans la somme (19) figurent tous les quadruplets (i,j,k,ℓ) vérifiant (13) et $c_k = c$, d'où le résultat.

Remarque. Une fois le théorème 1 démontré, ce lemme assurera en général (en écartant des modèles pathologiques) que les termes d'interaction au membre de droite de (5) sont intégrables sur $\mathbb{R}\times[0,\infty[$. Il en résulte facilement (voir par exemple [1]) qu'il existe des $\varphi_i \in L^1(\mathbb{R})$ tels que

$$\| u_i(.,t) - \varphi_i(.-c_i t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 .$$

Le cas $c_i \neq c_j$ correspond au cas où $\varphi_i(x-c_i t)\varphi_j(x-c_j t)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^2)$. Cela serait faux pour $c_i = c_j$ avec $\varphi_i(.)\varphi_j(.) \neq 0$, mais un tel comportement asymptotique est rendu impossible sous l'hypothèse b) du lemme : on aurait en permanence des interactions $(i,j) \to (k,\ell)$.

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Il sera commode de poser

$$\tilde{u}_i(x,t) = \sum_{c_\alpha = c_i} u_\alpha(x,t) \tag{23}$$

$$M(t) = \sup_{i,x,s\leqslant t} \tilde{u}_i(x,t) \tag{24}$$

$$\Delta(t_1,t_2) = \Sigma\Sigma \iint_{\mathbb{R}\times[t_1,t_2]} u_i(x,t)u_j(x,t)dx\, dt \tag{25}$$

la somme étant étendue aux (i,j) vérifiant l'une des conditions du lemme 3.

<u>1er étape</u>. Pour $t_1 < t_2 < T^*$, nous allons estimer $M(t_2)$ à partir de $M(t_1)$. Soient i et $B = (x_2,t_2')$ tels que $\tilde{u}_i$ atteigne la valeur $M(t_2)$ au point B . Soit A le point $(x_2-c_i(t_2'-t_1),t_1)$. Soit $E = \{\alpha | c_\alpha = c_i\}$, on a

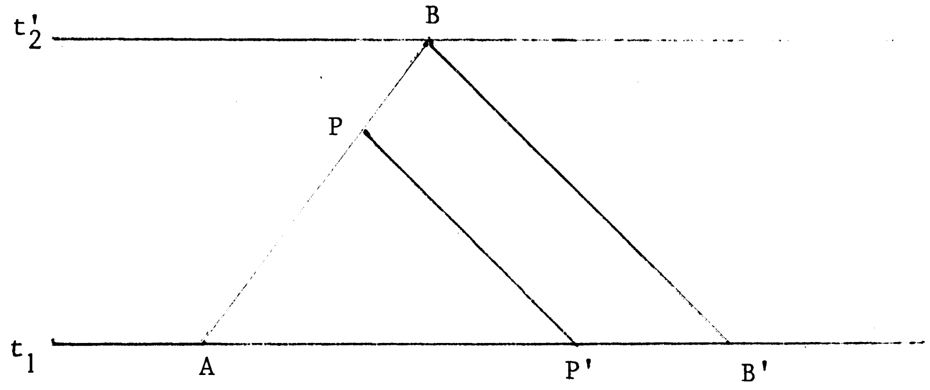
$$M(t_2)\leqslant M(t_1) + \int_{AB} \sum_{\alpha\in E;\beta,\gamma,\delta} (A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}u_\gamma u_\delta - A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}u_\alpha u_\beta). \tag{26}$$

Les quadruplets $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ayant exactement trois indices dans E sont tels que $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = 0$ d'après (4'). Dans (26), la somme a donc lieu sur

$$(E\times E\times E\times E) \cup (E\times E^c\times E\times E^c) \cup (E\times E^c\times E^c\times E) \cup (E\times I\times E^c\times E^c).$$

Par symétrie, les sommes correspondant aux trois premiers sous-ensembles sont nulles. Il ne reste que les termes à indice dans $E\times I\times E^c\times E^c$, dont nous ne retiendrons que la partie positive.

$$M(t_2)\leqslant M(t_1) + C^{te} \sum_{c_\gamma\neq c_i} \sum_{c_\delta\neq c_i} \int_{AB} u_\gamma u_\delta \quad . \tag{27}$$



Pour $P \in AB$, soit P' [resp.B'] le point où la caractéristique rétrograde, pour la vitesse c_γ , issue de P [resp.B] coupe $t = t_1$. Le même argument que précédemment nous donne

(28) $$\tilde{u}_\gamma(P) \leqslant \tilde{u}_\gamma(P') + \Sigma A_{pq}^{rs} \int_{PP'} u_r u_s$$

où la somme ne concerne que des quadruplets avec $c_p = c_\gamma$, $c_r \neq c_\gamma$, $c_s \neq c_\gamma$. Si $A_{pq}^{rs} \neq 0$, le couple (r,s) vérifie donc l'une des conditions du lemme 3.

Si on pose

(29) $$v_\gamma(P) = \tilde{u}_\gamma(P') \;;\; w_\gamma(P) = \Sigma A_{pq}^{rs} \int_{PP'} u_r u_s \quad ,$$

on a, en utilisant $c_\gamma \neq c_i$:

(30) $$\|v_\gamma\|_{L^1(AB)} \leqslant C^{te} \|\tilde{u}_\gamma\|_{L^1(AB')} \leqslant C^{te}\,\mu$$

(31) $$\|w_\gamma\|_{L^1(AB)} \leqslant C^{te}\, \Sigma \|u_r u_s\|_{L^1(ABB')} \leqslant C^{te}\,\Delta(t_1,t_2)$$

En revenant à (27), et en y majorant $u_\gamma u_\delta$ par $v_\gamma v_\delta + u_\gamma w_\delta + w_\gamma u_\delta$, on obtient

(32) $$M(t_2) \leqslant M(t_1) + C_1 M(t_1)\mu + C_2 \Delta(t_1,t_2) M(t_2) \; .$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de l'équation.

2ème étape. On construit une suite $0 = t_o < t_1 < t_2 \dots < t_N = T^*$ de telle sorte que $C_2\Delta(t_k,t_{k+1}) \leqslant 1/2$, ce qui est réalisable d'après le lemme 3, avec $N = O(\mu+\mu^2)$. On a d'après (32)

$$M(t_{k+1}) \leqslant 2(1+C_1\mu)M(t_k)$$

et donc $M(T^*) \leqslant [2(1+C_1\mu)]^N M(0)$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

4. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

On introduit la quantité suivante

$$d(x,t) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{i\in D} u_i(x,t)dx \; . \tag{33}$$

On a $\partial d/\partial x = \sum_{i\in D} u_i$ et $\partial d/\partial t = -\sum_{i\in D} c_i u_i$, en utilisant (10). Pour $K > 0$ convenable, posons

$$S(t) = \sup_{x\in \mathbb{R},j\in G} e^{Kd(x,t)}\, \tilde{u}_j(x,t) \tag{34}$$

où $\tilde{u}_j$ est défini par (23). Nous allons montrer que $S(t)$ (et la quantité analogue obtenue en échangeant D et G dans (33) et (34)) décroit avec t. L'exponentielle dans (34) étant comprise entre 1 et $K\mu$, il en résultera

$$\operatorname{Sup} \tilde{u}_j(x,t) \leqslant e^{K\mu} \sup \tilde{u}_j(x,0)$$

et donc le théorème 2.

D'après un argument classique, pour prouver que $S(t)$ est décroissante, il suffit de montrer que l'on a $\partial/\partial t(e^{Kd}\tilde{u}_j) \leqslant 0$ pour tout (x,t,j) où la valeur $S(t)$ est atteinte. Nous nous placerons désormais en un tel point, et poserons $E = \{\alpha \mid c_\alpha = c_j\}$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{Kd}\tilde{u}_j) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_j\frac{\partial}{\partial x}\right)(e^{Kd}\tilde{u}_j) = e^{Kd}\,\phi \tag{35}$$

en posant

$$\phi(x,t) = -K\sum_{\alpha\in E,i\in D}(c_i-c_\alpha)u_\alpha u_i + 2\Sigma(A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}u_\gamma u_\delta - A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}u_\alpha u_\beta) \tag{36}$$

où la seconde somme est étendue à $E\times D\times G\times D$.

La valeur $S(t)$ étant atteinte pour l'indice j , on a , pour $(\gamma,\delta) \in G \times D$:

$$u_\gamma u_\delta \leqslant \sum_{\alpha \in E, i \in D} u_\alpha u_i ,$$

et donc le résultat lorsque $c_j < 0$ (les $(c_i - c_\alpha)$ sont alors strictement positifs), pour K assez grand.

Il reste à examiner le cas $c_j = 0$. Nous noterons alors D_o (resp.G_o) l'ensemble des i appartenant à D (resp.G) vérifiant $c_i = 0$. On a $E = G_o$ et

$$(36') \qquad \phi(x,t) = - K \sum_{\alpha \in G_o, i \in D} c_i u_\alpha u_i + 2\Sigma (A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} u_\gamma u_\delta - A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} u_\alpha u_\beta)$$

la seconde somme ne portant que sur des quadruplets vérifiant soit $c_\delta > 0$, soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in G_o \times D_o \times G_o \times D_o$ en vertu de (4') et (10). Par symétrie, la somme de ces derniers termes est nulle, tandis que les autres s'estiment par

$$K \sum_{\alpha \in G_o} c_\delta u_\alpha u_\delta$$

pour K assez grand, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

N.B. L'auteur tient à remercier F. Golse et A. Majda qui, au cours de ces journées E.D.P., lui ont signalé d'une part que la partie a) du Lemme 3 fait partie des résultats non publiés mais connus dans des contextes divers (il faut citer semble-t-il Tartar, Varadhan, Golse et l'analogie avec la fonctionnelle de Glimm pour les chocs) d'autre part l'existence d'une prépublication récente de J.T. Beale "Large time behavior of discrete velocity Boltzmann equations". Ce dernier, sous des hypothèses voisines de celles de notre théorème 1 (avec des restrictions sur les données de Cauchy en cas de vitesses multiples et en supposant la microréversibilité) prouve que les solutions sont bornées, sans obtenir toutefois une borne explicite en fonction des normes L^1 et L^∞ des données de Cauchy.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.T. BEALE, "Large-time behaviour of the Broadwell model" Comm. Math. Physics.

[2] H. CABANNES, "The discrete model of the Boltzmann equation"

[3] R. GATIGNOL, Lect. Notes in Physics, 36 (1975) Springer

[4] K. HAMDACHE, "Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Boltzmann à répartition discrete de vitesses" J. Meca. theor. appl. 3 (1984) 761-785.

[5] ILLNER, "Global existence for discrete velocity models of the Boltzmann equation in several dimensions", J. Meca. theor. appl. 1 (1982) 611-622.

[6] S. KAWASHIMA, "Global solution of the initial value problem for a discrete velocity model". Proc. Japan Acad., 57 (1981) 19-24.

[7] T. NISHIDA, M. MIMURA, "On the Broadwell's model for a simple discrete velocity gas". Proc. Japan Acad., 50, (1974) 812-817.

[8] L. TARTAR, "Existence globale pour un système hyperbolique semi-linéaire de la théorie cinétique des gaz" Sém. Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique (1975-76) n°1.

***

J.M. BONY
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 - PALAISEAU Cedex