

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CLAUDE BARDOS

GILLES LEBEAU

JEFF RAUCH

**Contrôle et stabilisation pour l'équation des ondes**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1987), p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1987\\_\\_\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A13_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Contrôle et Stabilisation pour  
l'équation des ondes.  
par G. LEBEAU

C. Bardos

Centre de Mathématiques Appliquées

Ecole Normale Supérieure 45 Rue d'Ulm Paris 75005

et Département de Mathématiques Université de Paris 13 Av. J.B. Clément

93430 Villetaneuse

G. Lebeau

Département de Mathématiques

Université de Paris Sud

Bat. 425 91405 Orsay

J. Rauch

Mathematics Department

University of Michigan

Ann. Arbor Michigan MI 48109



I. Introduction.

On se propose de montrer comment des notions sophistiquées concernant la propagation des singularités (plus précisément les méthodes introduites par Melrose et Sjöstrand [13]) s'avèrent être les bons outils pour résoudre des problèmes de contrôle et de stabilisation.

Pour fixer les idées on considèrera deux problèmes modèles pour l'équation des ondes à coefficients constants. Le fait que les coefficients soient constants introduit des simplifications dans les notations, mais aucune simplification dans la démonstration et le résultat est bien sûr valable pour des opérateurs à coefficients  $C^\infty$ .

Selon l'usage  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbf{R}^d$ , de frontière  $\partial\Omega$  régulière (analytique pour simplifier les démonstrations).  $\square$  désigne l'opérateur des ondes :

$$(1) \quad \square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u.$$

$\Gamma$  est une partie ouverte non vide de  $\partial\Omega$  et  $T$  un nombre positif fini.

La contrôlabilité exacte consiste à construire, pour toute donnée de Cauchy  $(u_0, u_1)$  du problème (1) une fonction  $g_{u_0, u_1}(x, t)$  définie sur  $\Gamma \times ]0, T[$  et telle que la solution du problème mixte :

$$(2) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1$$

$$(3) \quad u|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma) \times ]0, T[} = 0$$

$$(4) \quad u|_{\Gamma \times ]0, T[} = g_{u_0, u_1}(x, t)$$

vérifie à l'instant  $T$  la condition :

$$(5) \quad u(x, T) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, T) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

$g$  est le " contrôle " ; il ramène au repos la vibration initiale.

Dans cette construction le premier problème consiste à donner des conditions suffisantes (elles sont pratiquement nécessaires) sur  $\Gamma$  et  $T$  pour assurer l'existence (bien entendu il n'y a pas unicité) d'au moins une fonction  $g$  telle que la solution de (2) (3) (4) vérifie la relation (5).

La stabilisation s'introduit par exemple en considérant le problème d'évolution :

$$(6) \quad \square u = 0, \quad u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1.$$

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial n}, \lambda(x) > 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbf{R}_t^+$$

$$(8) \quad u|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbf{R}_t^+} = 0.$$

Dans (8)  $\lambda(x)$  désigne une fonction positive, mesurable et bornée.

En multipliant l'équation (6) par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et en intégrant sur  $\Omega$  on obtient la relation :

$$(9) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + |\nabla_x u|^2) dx + \int_{\partial\Omega} \lambda(x) |\frac{\partial u}{\partial n}|^2 d\sigma = 0$$

On introduit l'espace  $E_0$  des couples

$$f = (u, v) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0, v \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme d'énergie :

$$\|f\| = \|(u, v)\| = \int_{\Omega} (|\nabla_x u|^2 + |\frac{\partial u}{\partial t}|^2) dx.$$

L'application  $(u_0, u_1) \rightarrow (u, \frac{\partial u}{\partial t})$  définie par (6), (7), (8) est décrite par un semi groupe fortement continu à contraction dans  $E_0$ , noté  $Z(t)$ , car il présente un certain degré de parenté avec le semi groupe de Lax et Phillips [8]. On montre (cf. Iwasaki [7]) que, si  $\lambda(x)$  est strictement positif sur une partie non vide de  $\partial\Omega$ , toute solution de (6), (7), (8) converge vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. Le problème de la stabilisation consiste à donner des conditions suffisantes sur  $\Gamma$  pour que  $\|Z(t)\|$  décroisse exponentiellement lorsque  $t$  tend vers l'infini.

L'objet de cet exposé est de montrer que les problèmes de controlabilité exacte et de stabilisation sont équivalents à une condition géométrique sur le flot hamiltonien brisé. En gros la controlabilité exacte est équivalente au fait que toute bicaractéristique rencontre  $\Gamma \times ]0, T[$  et la stabilisation est équivalente à l'existence d'un temps fini  $T$  pour lequel la propriété précédente soit vraie.

Les problèmes de contrôle et de stabilisation proviennent des oscillations de grandes structures (robots, antennes de satellites, stations spatiales etc...). Leur étude nous a été suggérée par J.L. Lions. Dans certains cas particuliers des conditions satisfaisantes ont été établies par un certain nombre d'auteurs. Les démonstrations reposent toujours sur des estimations globales obtenues à l'aide de multiplicateurs inspirés par les travaux de Morawetz (cf. Chen [1], Lagnese [10], Lasiccka et Triggiani [11]). L'avantage de ces méthodes est de nécessiter peu de régularité sur les coefficients et de donner des valeurs explicites aux constantes intervenant dans les calculs. On peut ainsi les généraliser à des problèmes dans des ouverts peu réguliers (cf. Grisvard [3]). L'utilisation des bicaractéristiques nécessite au contraire des coefficients  $C^\infty$  et une frontière très régulière (l'hypothèse  $\partial\Omega$  analytique simplifie un peu la discussion) ; par contre une analyse à

l'aide de la propagation des singularités conduit à des résultats beaucoup plus précis et à une meilleure compréhension du problème. Ces résultats peuvent se transposer aux systèmes hyperboliques. L'idée d'utiliser, dans la stabilisation, les propriétés de propagation apparaît pour la première fois dans le travail de J. Rauch et M. Taylor [15] consacré à un modèle très simplifié, (qui évacue les difficultés liées aux conditions aux limites).

## II. Le flot Hamiltonien brisé.

Il apparaîtra dans la démonstration que les points diffractifs ne peuvent pas être utilisés ni pour le contrôle ni pour la stabilisation. Pour préciser cette situation nous explicitons quelques notions. On désigne par  $M$  la variété  $\Omega \times \mathbf{R}_t$  et par  $\Sigma_b \subset T^*(\partial M) \cup T^*(M)$  l'ensemble des points  $(p,q) = \{(x,t),(\xi,\tau)\}$  satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

$$(i) \quad x \in \Omega \text{ et } (\tau,\xi) \text{ vérifie la relation } |\tau|^2 = |\xi|^2$$

$$(ii) \quad x \in \partial\Omega \text{ et } (\tau,\xi) \text{ vérifie la relation } |\tau|^2 \geq |\xi|^2$$

$\Sigma_b$  est feuilleté par l'ensemble des rayons  $C^\infty$  (rayons qui portent les singularités  $C^\infty$ ). Cet ensemble est formé des rayons se réfléchissant sur  $\partial\Omega$  selon les lois de l'optique géométrique, des rayons rasants, tangents à  $\partial\Omega$  en un point, des rayons glissants sur  $\partial\Omega$  et enfin de tout rayon obtenu par des raccords  $C^\infty$  des objets précédents pourvu qu'en un point de raccord la tangente au rayon sorte de  $\Omega$  (cf. figure 1).

Définition I. On dit qu'un ensemble  $\Gamma \times ]0,T[ \subset \partial\Omega \times ]0,T[$  contrôle géométriquement l'ouvert  $\Omega$  (en abrégé possède la propriété  $C G(\Omega)$ ) si tout rayon  $C^\infty$ ,  $\gamma \subset \Sigma_b$  rencontre  $\Gamma \times ]0,T[$  en au moins un point non diffractif. On dit qu'un point  $m \in \gamma \cap \partial M$  est diffractif si dans un voisinage de  $m$  on a  $\gamma \setminus \{m\} \subset \Omega$  (cf. figure 1), et  $\gamma$  est un segment de droite au voisinage de  $m$ .

Remarque 1. La notation rayon  $C^\infty$  est traditionnelle, elle signifie que  $\gamma$  porte les singularités  $C^\infty$ , mais pas que la courbe  $s \rightarrow \gamma(s)$  est une application  $C^\infty$ . Un rayon se réfléchissant selon les lois de l'optique géométrique est bien sur un rayon brisé.

### III. Le contrôle exacte du problème de Dirichlet.

Pour  $s \geq 0$  on désigne par  $E_s(\Omega)$  l'espace  $(H^{s+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H^s(\Omega)$  et par  $E_{-s}(\Omega)$  son dual. On note  $\|\cdot\|_s$  les normes correspondantes.

Ces espaces sont invariants par la résolution de l'équation des ondes avec conditions aux limites de Dirichlet.

On a alors les Théorèmes suivants.

Théorème 1. Si tout rayon  $C^\infty$  rencontre  $\Gamma \times ]0, T[$  en au moins un point non diffractif, alors les assertions suivantes sont vraies :

(i) Toute distribution prolongeable solution de

$$\square u = 0, \quad u|_{\partial\Omega \times ]0, T[} = 0$$

dont la dérivée normale  $\frac{\partial u}{\partial n}$  appartient à  $L^2(\Gamma \times ]0, T[)$  appartient en fait à  $E_0$  et on a la relation :

$$(1) \quad \|u\|_0^2 \leq C \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt$$

(ii) Toute solution engendrée par une donnée initiale  $(u_0, u_1) \in E_{-1}$  est exactement contrôlable par au moins une distribution  $g$  à support dans  $\Gamma \times ]0, T[$  appartenant à  $L^2(\Gamma \times ]0, T[)$  ; plus précisément il existe  $g$  telle que la solution du problème  $\square u = 0$ , dans  $\Omega \times \mathbf{R}_t$ ,  $u(\alpha, 0) = u_0(x)$ ,  $\partial_t u(\alpha, 0) = u_1(\alpha)$

$$u|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma) \times ]0, T[} = 0, \quad u|_{\Gamma \times ]0, T[} = g.$$

vérifie  $u(x, T) = \partial_t u(x, T) \equiv 0$ .

(iii) Toute distribution prolongeable  $u$ , solution de  $\square u = 0$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  est exactement contrôlable, par une distribution  $g$  à support dans  $\Gamma \times ]0, T[$ . Plus précisément il existe  $g$  telle que la solution  $v(x, t)$  du problème

$$\square v = 0, \quad v(x, 0) = \partial_t v(\alpha, 0) \equiv 0$$

$$v(v, t)|_{\Gamma \times ]0, T[} = g, \quad v(x, t)|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma) \times ]0, T[} = 0$$

vérifie la relation

$$(u+v)(x, T) = \partial_t(u+v)(x, T) \equiv 0.$$

Théorème 2. Si toute distribution prolongeable est exactement contrôlable alors on a la propriété

(iv) Il n'existe pas de rayon  $\gamma$  ne rencontrant pas  $\Gamma \times ]0, T[$ .

Prouvons d'abord le Théorème 2. En effet si  $\gamma$  est un rayon ne rencontrant pas  $\bar{\Gamma} \times [0, T]$ , on peut construire une solution du problème  $\square u = 0$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  qui soit singulière le long de  $\gamma$  et  $C^\infty$  ailleurs. La singularité ne sera pas affectée par la superposition d'une fonction  $v$  solution de

$$\square v = 0, \quad v|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma) \times ]0, T[} = 0, \quad v|_{\Gamma \times ]0, T[} = g.$$

$$v(x, 0) = \partial_t v(x, 0) = 0$$

En conséquence on ne peut pas ramener  $u$  à zéro par l'action d'un contrôle agissant sur  $\Gamma \times ]0, T[$ .

Remarque 1. Les points (i), (ii), (iii) du Théorème 1 et (iv) du théorème 2 sont presque équivalents, il le deviennent complètement si on exclut des situations pathologiques créées par des points diffractifs ou si on impose que ces assertions restent valables lorsqu'on fait subir au problèmes des petites perturbations conve-nables.

Le point (i) du théorème 1 est l'essentiel de notre travail et fera l'objet de la Proposition 1. On déduit le point (ii) du point (i) par un argument de dualité (du à Lions [9]) et appelé méthode HUM. Comme  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  est compact on peut, en utilisant le fait que toute distribution est d'ordre fini, ramener par régularisation (par exemple en prenant un nombre suffisant de primitives de  $u$  par rapport à  $t$ ) la preuve de (iii) à l'assertion (ii).

Remarque 2. En introduisant un champ de vecteurs  $\varphi$  qui coïncide sur  $\partial\Omega$  avec la normale extérieure et en multipliant  $\square u = 0$  par  $\varphi \cdot \nabla u$  on obtient (Il est essentiel de tenir compte de la condition  $u|_{\partial\Omega} = 0$ ) la relation :

$$(2) \quad \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt$$

$$\leq \int_{\partial\Omega \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \leq C \|u\|_0^2.$$

Le point (i) du Théorème 1 apparaît donc comme une réciproque de (2) ; dans le cas où  $\Gamma = \partial\Omega$  tout entier on peut obtenir facilement cette réciproque en multipliant successivement l'équation  $\square u = 0$  par  $u$  et par  $x \cdot \nabla u$  puis en intégrant par partie en combinant les résultats (cf. J.L. Lions [19] pour les détails et les références).

Remarque 2. sous les hypothèses du Théorème 1 l'expression

$$(3) \quad \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt = \|u\|_\Gamma^2$$



fournit pour  $E_0$  une norme équivalente. On peut cependant construire des exemples (utiliser Holmgren) pour lesquels la relation  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma \times ]0, T[} = 0$  implique la nullité de la solution du problème  $\square u = 0$ ,  $u \Big|_{\partial \Omega} = 0$ . On définit ainsi sur  $E_0$  une norme à l'aide de (3). On note  $F$  le complété de cet espace et  $F^*$  son dual. En se limitant, pour simplifier au cas où  $\Omega$  est convexe (on évite la propagation analytique le long des rayons rasants) on voit que les singularités analytiques microlocales se propagent le long de tout rayon et ne peuvent pas être détruites par un contrôle agissant sur une région que le rayon ne rencontre pas.  $F^*$  est d'après Lions l'espace des solutions exactement contrôlables. Il en résulte qu'il est contenu dans l'espace des solutions qui sont microlocalement analytique le long de tout rayon ne rencontrant pas  $\Gamma \times ]0, T[$  et que  $F$  son dual n'est même pas un espace de distributions. Il serait d'ailleurs intéressant de caractériser plus précisément ces espaces. Un cas particulier a déjà été étudié par Haraux [4].

Proposition 1. On suppose que tout rayon  $\gamma$ ,  $C^\infty$  rencontre  $\Gamma \times ]0, T[$  en au moins un point non diffractif ; alors si  $u$  est une solution de

$$\square u = 0, \quad u \Big|_{\partial \Omega \times ]0, T[} = 0$$

qui vérifie la relation :

$$\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma \times ]0, T[),$$

$u$  appartient à  $E_0$  et on a :

$$(1) \quad \int_{\Omega \times ]0, T[} (|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + |\nabla_x u|^2) dx dt \\ \leq C \int_{\Gamma \times ]0, T[} |\frac{\partial u}{\partial n}|^2 d\sigma dt$$

où  $C$  désigne une constante convenable.

Remarque 3. Compte tenu de la conservation de l'énergie le second membre de (1) définit bien une norme équivalente sur l'espace  $E_0$ .

La démonstration de la proposition 1 se fait en plusieurs étapes. Le lemme 1 est un résultat de relèvement microlocal, le lemme 2 est un résultat de propagation microlocale. On désignera ensuite par  $G$  l'espace des distributions prolongeables  $u$  solution du problème :

$$(2) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t, \quad u \Big|_{\partial \Omega \times \mathbf{R}_t} = 0$$

dont la trace vérifie  $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma \times ]0, T[)$ .

Sous les hypothèses de la proposition 1 l'expression

$$(3) \quad \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt = \|u\|_G^2$$

définit sur  $G$  une norme (lemme 3).  $G$  coïncide algébriquement avec  $E_0$  et  $E_0$  s'injecte continument dans  $G$ . On montre finalement que  $G$  est complet ce qui avec le théorème de graphe fermé termine la démonstration.

Pour toute distribution prolongeable  $u$  définie dans  $M$ , vérifiant  $\square u = 0$ , on note  $\bar{u}$  le prolongement de  $u$  à  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_t$  qui vérifie  $\square \bar{u} = \varphi_1 \otimes \delta_{\partial M} + \varphi_0 \otimes \delta'_{\partial M}$  et  $\bar{u} \equiv 0$  dans le complémentaire de  $\bar{M}$ .

Lemme 1. Soit  $m = (p, q) \in \Sigma_b$ ,  $p \in \partial M$  un point non diffractif et  $u$  une distribution prolongeable. On suppose que dans un voisinage de  $p$   $u$  possède les propriétés suivantes :

(i)  $u$  est solution du problème

$$(4) \quad \square u = 0 \text{ dans } M \cap \mathcal{U}, \quad u|_{\partial M \cap \mathcal{U}} = 0.$$

(ii)  $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial M \cap \mathcal{U})$ .

alors microlocalement au voisinage de  $m$   $\bar{u}$  appartient à  $H^1(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t)$ .

La démonstration de ce lemme, basé sur les méthodes de Sjöstrand et Melrose [13] est omise et fera l'objet d'un article détaillé.

Sur  $T^*(\partial M) \cup T^*(M)$  on introduit l'espace de Sobolev microlocal  $H_p^1$  défini comme suit :

(i) Si  $p \in T^*(M)$  on utilise la définition microlocale usuelle.

(ii) Si  $p \in T^*(\partial M)$  on dira que  $u \in H_p^1$  si les conditions suivantes sont réalisées : Il existe un changement de coordonnées transformant, localement  $M$  en l'ouvert  $\{(y, z) \mid y > 0, z \in \mathbf{R}^d\}$  et un opérateur  $B(y, z, \zeta')$  tangential elliptique d'ordre 1 microlocalement au voisinage de  $p$  tel que l'on ait :

$$(5) \quad \int_0^a |B(y, \cdot, \cdot)u|^2 dz dy < + \infty$$

On remarque (cf. Melrose Sjöstrand [13]) que sur l'ensemble des solutions de l'équation  $\square u = 0$ , ces définitions sont indépendantes des changements de coordonnées et du choix de l'opérateur  $B$ .

En utilisant les résultats de [13] on démontre ensuite le :

Lemme 2. Soit u une solution du problème :

$$\square u = 0 \text{ dans } M, u|_{\partial M} = 0.$$

Soit  $\gamma$  un rayon  $C^\infty$  alors si en un point  $p_0 \in \gamma$  on a  $u \in H_{p_0}^1$ , on a également en tout point  $p \in \gamma$  la propriété  $u \in H_p^1$ .

Des lemmes 1 et 2 on déduit le

Corollaire 1. On suppose que  $\Gamma \times ]0, T[$  contrôle géométriquement M, alors toute distribution prolongeable u solution du problème

$$\square u = 0 \text{ dans } M,$$

qui vérifie les conditions

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla_{x'} u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}_t \times \partial M)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma \times ]0, T[)$$

appartient, pour tout  $\bar{T}$  fini à l'espace  $H^1(]-\bar{T}, \bar{T}[ \times \Omega)$ .

Dans (i)  $\nabla_{x'}$  désigne les dérivées selon les directions tangentielles à  $\partial \Omega$ . Pour démontrer ce corollaire on se ramène au cas où sur  $\partial M$  u est nul en utilisant la régularité du problème mixte

$$\square u = 0, u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0), u|_{\partial M} = g.$$

(cf. Lions Magenes [19] ou Chazarain et Piriou [18]).

On utilise ensuite le lemme 1, le lemme 2 et l'hypothèse géométrique pour conclure.

Lemme 3. Sous les hypothèses de la proposition 1, l'expression

$$(6) \quad \|u\|_G = \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt$$

définit bien une norme sur l'espace des distributions prolongeables solution du problème :

$$(7) \quad \square u = 0 \text{ dans } M, u|_{\partial M} = 0.$$

Démonstration. On désigne par  $N$  l'espace des  $u$  vérifiant (7) et telles que  $\|u\|_G = 0$ .

On remarque que si  $u \in N$  il en est de même de  $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$  quelque soit  $k$ . On en déduit

que  $N$  est un sous espace de dimension finie (appliquer le corollaire 1 à  $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ ). Ce

sous espace est invariant par l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

En introduisant le polynome minimal de cet endomorphisme on conclut que les  $u \in N$  sont solutions d'une équation différentielle ordinaire en  $t$ . Ainsi  $u \in N$  est nul non seulement sur  $\Gamma \times ]0, T[$ , mais aussi sur  $\Gamma \times \mathbf{R}_t^+$ . On conclut en utilisant le théorème d'Holmgren ou le résultat de Rauch et Taylor [14].

Ainsi  $G$  est un espace normé qui coïncide (algébriquement) avec  $E_0$ . De plus  $E_0$  s'injecte continument dans  $G$ . Il suffit donc de montrer que  $G$  est complet. Le seul point délicat consiste à prouver que le complété de  $G$  est un espace de distribution, ce qui ne se produit pas (cf. Remarque 3) si l'hypothèse de contrôle géométrique n'est pas satisfaite. Ainsi en utilisant cette hypothèse on prouve que  $\hat{G}$  complété de  $G$  s'injecte continument dans  $E_{-1}$  et qu'il coïncide avec  $E_0$  ce qui achève la démonstration.

#### IV. La stabilisation.

Pour éviter des difficultés techniques on considérera la situation suivante : on suppose que la frontière (toujours régulière) de  $\Omega$  est formée d'une réunion finie de parties connexes  $\partial\Omega_i$  et  $\partial\Omega_j$ . On pose  $\Gamma = \cup \partial\Omega_j$  (cf. figure 3) ; et on considère le problème d'évolution suivant :

$$(1) \quad \square u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbf{R}_{t^+}, \quad (u(x,0), \partial_t u(x,0)) = (u_0(x), u_1(x))$$

$$(2) \quad u|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbf{R}_{t^+}} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbf{R}_{t^+}$$

Dans (3) on suppose que  $\lambda(x)$  est une fonction mesurable, aucune autre régularité n'est ici nécessaire ! Vérifiant, avec deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  finies et positives la relation

$$(4) \quad \alpha < \lambda(x) < \beta \quad \forall x \in \Gamma.$$

Comme cela a été dit dans l'introduction les solutions de (1), (2), (3) sont décrites par un semi groupe  $Z(t)$  fortement continu, à contraction ( $\|Z(t)\| \leq 1$ ) dans l'espace d'énergie

$$E_0^\Gamma = \{(u,v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) / u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0\}$$

muni de la norme usuelle note  $\| \cdot \|_0$ .

On a alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. On suppose que  $\forall T > 0$  il existe un rayon  $C^\infty \gamma$  ne rencontrant pas  $\Gamma \times ]0, T[$  alors

(i)  $\forall \epsilon > 0$  et  $\forall T > 0$  il existe une donnée initiale  $f = (u_0, u_1)$  de norme 1, telle que l'on ait

$$(5) \quad (1 - \epsilon) \leq \|Z(t) f\|, \quad \forall t \quad 0 \leq t \leq T$$

(ii) Le rayon spectral de  $Z(t)$  est 1 et la portion de spectre contenue dans le cercle  $|z| = 1$  est du spectre continu.

Théorème 2. On suppose qu'il existe  $T$  tel que  $\Gamma \times ]0, T[$  contrôle géométriquement le problème. Alors il existe  $\alpha > 0$  tel que l'on ait :

$$(6) \quad \|Z(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \quad \forall t > 0$$

Pour prouver le point (i) du théorème 1 on introduit une solution du problème  $\square u = 0$  dans  $M$   $u|_{\partial M} = 0$   $C^\infty$  en dehors de  $\gamma$  mais singulière sur  $\gamma$  et n'appartenant pas à l'espace  $E_0^\Gamma$ .

On désigne par  $\rho_\epsilon(t)$  une fonction régulière convergeant vers  $\delta(t)$ , et on pose  $u_\epsilon = (\rho_\epsilon * u) / \|\rho_\epsilon * u\|_0$ .

Enfin on retranche à  $u_\epsilon$  la solution du problème mixte.

$$\square v_\epsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_t^+, \quad v_\epsilon(x,0) = \partial_t v_\epsilon(x,0) = 0$$

$$\partial_t v_\epsilon + \lambda(x) \partial_n v_\epsilon = \partial_t u_\epsilon + \lambda \partial_n u_\epsilon \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}_t^+$$

On obtient ainsi un exemple pour le point (i) du théorème 1. Bien entendu cette construction s'inspire de la preuve donnée par Taylor [16] du résultat de Ralston [12]. Les autres points du théorème 1 se démontrent comme dans la théorie du scattering (cf. Lax et Phillips [8]).

Pour prouver le théorème 2 on commence par introduire l'espace  $G$  des solutions du problème :

$$(7) \quad \square u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_t^+, \quad u|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbf{R}_t^+} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma \times \mathbf{R}_t^+} = 0$$

qui vérifient la condition :

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma \times ]0, T[)$$

muni de la norme correspondante :

Comme on a  $0 < \alpha < \lambda(x) < \beta$  on déduit de la relation,  $\partial_t u + \lambda(x) \partial_n u = 0$  que  $\partial_t u$  appartient aussi à  $L^2(\Gamma \times ]0, T[)$  ; en utilisant l'ellipticité de l'opérateur  $\square$  dans la direction  $\tau = 0$ , on en conclut que  $u|_{\Gamma \times ]0, T[}$  appartient en fait à  $H^1(\Gamma \times ]0, T[)$ . On utilise le corollaire III.1 pour conclure que  $u$  appartient à l'espace  $H^1(\Omega \times ]0, T[)$ .

La relation :

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla_x u|^2) dx = - \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma$$

implique que  $(u(x,0), \partial_t u(x,0)) \in E_0^\Gamma$ .

Ainsi l'espace  $G$  s'identifie algébriquement avec l'espace des solutions initialement d'énergie finie. En adaptant la méthode du §III on obtient enfin la relation :

$$(10) \quad \|u(.,0)\|_0^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt$$

qui combinée avec (9) redonne :

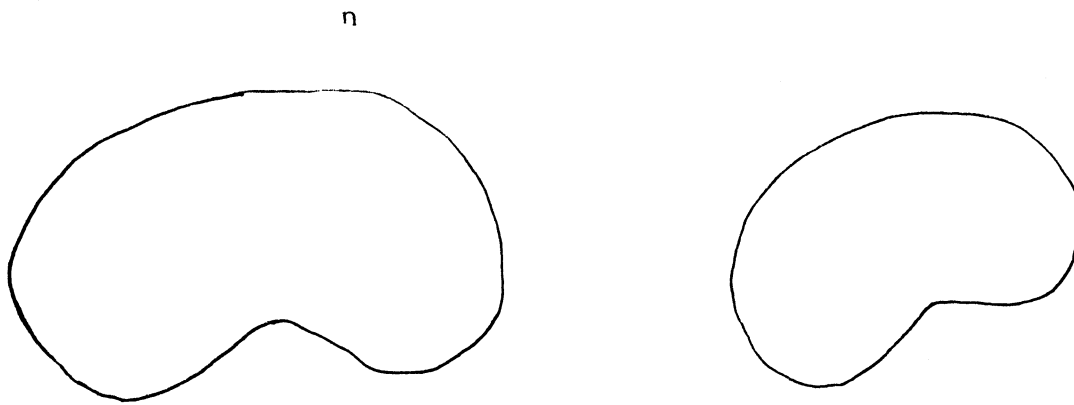
$$(11) \quad \|u(.,T)\|_0^2 \leq (1-C) \|u(.,0)\|_0^2$$

et achève la démonstration du Théorème 2.

Remarque 1. Comme au §III ce ne sont que les éventuels rayons rasants qui empêchent les théorèmes 1 et 2 d'être complémentaires. Ils deviennent absolument complémentaires si on exige que les hypothèses restent vraies sous de petites perturbations du domaine.

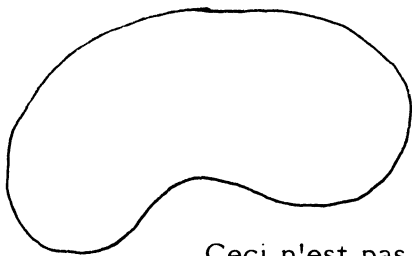
Remarque 2. La décomposition de  $\partial\Omega$  en deux parties disjointes a été faite pour éviter d'avoir à analyser la propagation en un point où  $\lambda(x)$  s'annule. Il est vraisemblable que les résultats restent vrais soit si  $\lambda$  passe en  $x_0$  d'une valeur strictement positive à la valeur zéro, soit si  $\lambda$  s'annule comme  $|x - x_0|$ . Un cas particulier, avec des hypothèses globales et une méthode de multiplicateurs, a été résolu par Zuazua [17].

Remarque 3. L'analogie avec le scattering peut être poursuivie et il serait intéressant de considérer un ouvert  $\Omega$  percé de deux obstacles convexes et de choisir la stabilisation sur le contour extérieur de  $\Omega$  (cf. figure 2 ). On peut conjecturer que dans cette situation le spectre du générateur de  $Z(t)$  se comporte comme dans les exemples traités par Ikawa [5,6] et Gérard [2].



Rayon rasant (point diffractif).

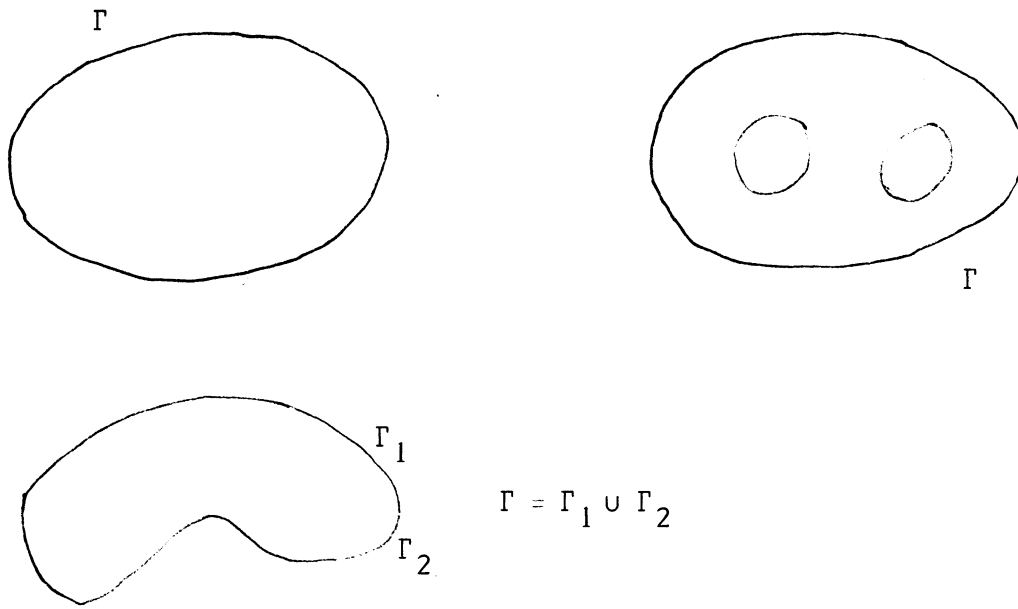
4 configurations possibles de rayons  $C^\infty$



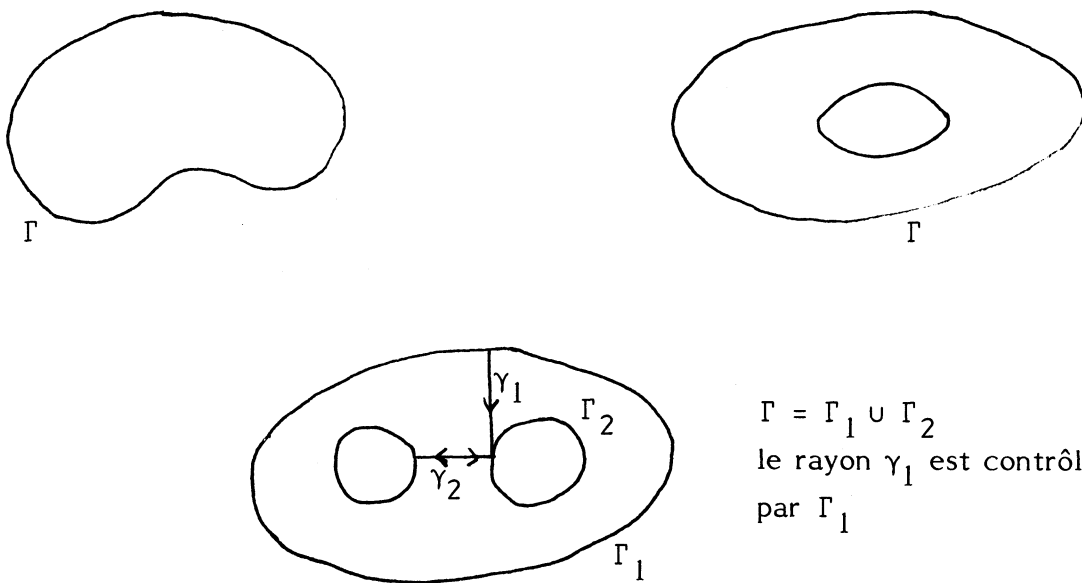
Ceci n'est pas un rayon  $C^\infty$

figure 1. Exemples de rayons

Exemples de régions  $\Gamma$  telles  $\Gamma \times ]0, T[$  ne possède, pour aucun  $T$ , la propriété  $C G(\Omega)$



Exemples de régions  $\Gamma$  telles que, pour au moins un  $T$  assez grand,  $\Gamma \times ]0, T[$  possède la propriété  $C G(\Omega)$ .



Les rayons  $\gamma_2$  correspondants aux deux flèches sont tous deux contrôlés par  $\gamma_2$ .

figure 2.



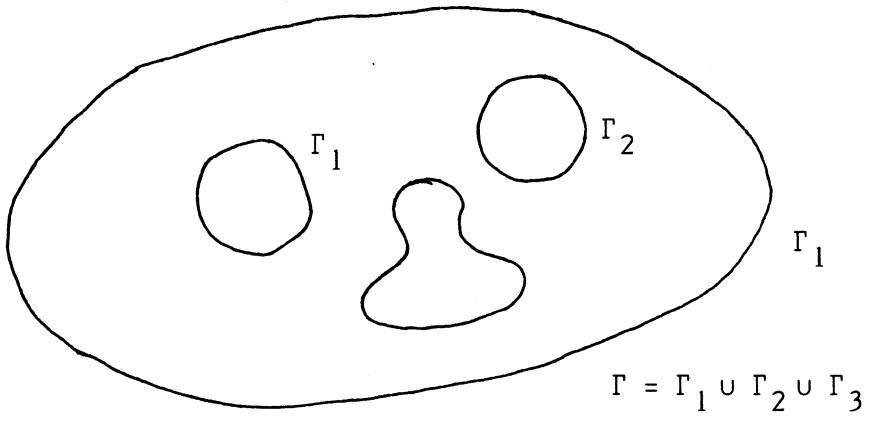


figure 3.

## Bibliographie

- [1] G. Chen : Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain. J.M.P.A. 58 (9) (1979), 249-274.
- [2] C. Gérard : Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes. Prépublication 86T.34 Département de Mathématiques Bat. 425 Université de Paris Sud 91405 Orsay.
- [3] P. Grisvard : Contrôlabilité exacte dans les polygones et les polyèdres note C.R.A.S. (1987).
- [4] A. Haraux : Communication personnelle.
- [5] M. Ikawa : Decay of solution of the wave equation in the exterior of two convex obstacles. Osaka J. Math. 19 (1982), 459-509.
- [6] M. Ikawa : Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis. Osaka J. Math. 22 (1985), 657-689.
- [7] N. Iwasaki : Local decay of solutions for symmetric hyperbolic systems with dissipative and coercive boundary conditions in exterior domains. publ. RIMS Kyoto U. 5 (1969), 193-218.
- [8] P. Lax et R. Phillips : Scattering theory Academic Press 1967.
- [9] J.L. Lions : Exact controllability and perturbations for distributed systems Von Neumann Lecture, Boston SIAM meeting July 1986.
- [10] J. Lagnese : Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation. J. Diff. Equations 50 (2) (1983), 163-182.
- [11] J. Lasiecka et R. Triggiani : Uniform exponential energy decay in a bounded region with  $L^2(0,T ; L^2(\Omega))$ -feedback control in the Dirichlet boundary condition. A paraître au J. Diff. Equations.
- [12] J. Ralston : Solutions of the wave equation with Localised Energy. Comm. Pure and Appl. Math. 31 (1969) 807-823.
- [13] R. Melrose et J. Sjöstrand : Singularities of boundary value problems I, Comm. Pure and Appl. Math. 22 (1978), 593-617.
- [14] J. Rauch et M. Taylor : Penetration into shadow region and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems. Indiana University Mathematics J. 22 (1972), 277-285.
- [15] J. Rauch et M. Taylor : Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains. Indiana University Mathematics J. 24 (1974), 79-86.
- [16] M. Taylor : Pseudodifferential Operators Princeton University Press ; 1980.
- [17] E. Zuazua : Communication personnelle.
- [18] J. Chazarain - A. Piriou : Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles. Gauthiers-Villars (1981).
- [19] J.L. Lions - E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1-2. Dunod