

YVES COLIN DE VERDIÈRE

**Comportement asymptotique du spectre des bouteilles magnétiques**

*Journées Équations aux dérivées partielles*, n° 1 (1985), p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1985\\_\\_1\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985__1_A2_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU SPECTRE  
DES BOUTEILLES MAGNETIQUES

Exposé de Yves COLIN DE VERDIERE

---

Ce résumé fournit une présentation très sommaire de résultats en cours de rédaction ([CV 4]). On trouvera dans [CV 3] une étude du cas bidimensionnel.

L'origine de mon intérêt pour ce problème est due à mon ami Jacques VEY qui attira mon attention sur l'article [A-H-S]. Ce n'est que récemment à la suite d'une interaction avec J.-P. DEMAILLY lors de mon exposé [CV 2] que nous avons débloqué la situation. Il a ainsi de son côté obtenu les résultats de [DY 1], [DY 2]. J'ai réussi à trouver le comportement asymptotique du spectre de certaines bouteilles magnétiques sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ .

1. - BOUTEILLES MAGNETIQUES.

Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne (pas nécessairement complète),  $B$  une 2-forme réelle fermée sur  $X$  telle que la classe de cohomologie de  $B/2\pi$  est entière. Il existe alors un fibré en droites complexes  $L$  au-dessus de  $X$  muni d'une structure hermitienne et d'une connexion hermitienne  $\nabla$  dont la courbure est  $iB$ . Localement, sur un ouvert  $U$  de  $X$ ,  $L = \mathbb{C} \times U \xrightarrow{\text{pr}_2} U$  et  $|(z, x)| = |z|$ . La connexion  $\nabla$  est donnée par  $\nabla_X f = df(X) - i\alpha(X)f$  où  $\alpha$  est une 1-forme réelle sur  $U$  telle que  $d\alpha = B$ . On introduit alors sur  $C_0^\infty(X; L)$  la forme quadratique  $q(f) = \int_X \|\nabla f\|^2 dx$  où la norme  $\|\cdot\|$

est la norme d'application linéaire  $\forall f(x) : T_x X \rightarrow L_x$ . Si  $(e_i(x))$  est un champ local de repères orthonormés, on a :  $q(f) = \sum_{i=1}^d \int_X |\nabla_{e_i} f|^2 dx$ . Cette forme quadratique est fermable sur  $L^2(X;L)$  et on lui associe par le procédé de Friedrich's un opérateur autoadjoint  $H_B$  : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique  $B$ .

Si  $X = \mathbb{R}^d$  et  $\alpha = \sum_{j=1}^d a_j dx_j$ , on a :

$$H_B = \sum_{j=1}^d \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2 = \sum_{j=1}^d X_j^2$$

avec  $[X_j, X_k] = ib_{j,k}$ ,  $B = \sum_{j,k} b_{j,k} dx_j \wedge dx_k$ .

Remarques. Si  $\alpha_1 = \alpha + df$  est une autre primitive de  $B$ , on obtient un opérateur  $H'$  unitairement équivalent à  $H$ ;  $H_{-B}$  est antiunitairement équivalent à  $H_B$ .

On dit que  $(X, B)$  est une bouteille magnétique si les deux conditions suivantes sont réalisés :

(B<sub>1</sub>)  $H_B$  est essentiellement autoadjoint avec comme domaine  $C_0^\infty(X;L)$ .

(B<sub>2</sub>)  $H_B$  est à résolvante compacte.

On peut voir dans [A-H-S] des conditions suffisantes pour que  $(\mathbb{R}^d, B)$  soit une bouteille magnétique et une étude de la nécessité de certaines de ces conditions dans [D1] et [I]. A notre connaissance le problème des bouteilles magnétiques dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  n'a pas été abordé.

## 2. - ENONCE D'UN RESULTAT.

Donnons maintenant notre résultat sur les bouteilles magnétiques sur  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $r \leq d/2$  le rang maximum de la 2-forme  $B(x)$  : en

tout point il existe une base orthonormée telle que

$$B(x) = b_1(x) dx_1 \wedge dx_2 + b_2(x) dx_3 \wedge dx_4 + \dots + b_r(x) dx_{2r-1} \wedge dx_{2r}$$

avec  $0 \leq b_1(x) \leq \dots \leq b_r(x)$ . Les  $(b_i(x))$  sont déterminés sans ambiguïté par l'écriture ponctuelle précédente. Notons alors

$B = \sum b_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$  le champ magnétique de  $\mathbb{R}^d$  et faisons les hypothèses suivantes qui impliquent  $(B_1)$  et  $(B_2)$  :

$$(B_3) \quad \text{il existe } m > 0 \text{ tel que } \sum_{i,j} |b_{ij}(X)| \geq c^{te} (1 + \|X\|)^m$$

$$(B_4) \quad \text{pour le même } m \text{ et pour tout multi-indice } \alpha \text{ de longueur } |\alpha| \leq 2, \text{ on a : } |D^\alpha b_{ij}(x)| \leq c^{te} (1 + \|X\|)^{m-|\alpha|}.$$

Notons alors  $\frac{u}{\text{sh}u}$  la fonction naturelle prolongée par 1 en  $u = 0$ , on a le :

**THEOREME.** Sous les hypothèses  $(B_3)$  et  $(B_4)$ , si on note  
 $Z_B(t) = \text{Tr}(e^{-tH_B}) (= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tE_n})$  où  $(E_n)$  est la suite des valeurs propres de  $H_B$ , on a :

$$Z_B(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^r \left( \frac{t b_j(x)}{\text{sh} t b_j(x)} \right) dx.$$

En particulier, cela permet par le théorème taubérien de Karamata d'obtenir l'équivalent de la fonction  $N_B(\lambda) = \text{Card}\{n \mid E_n \leq \lambda\}$ .

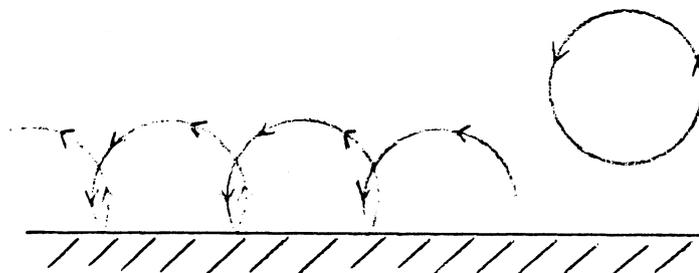
La preuve de ce théorème s'appuie sur :

(a) des estimations précises sur le spectre de  $H_B$  dans un cube de  $\mathbb{R}^d$  avec des conditions de Dirichlet.

(b) la méthode classique ([R-S] p.260 et suivantes) du découpage en cubes (pavage de  $\mathbb{R}^d$ ), puis remplacement dans chaque cube de  $B$  par le champ constant ayant pour valeurs la valeur de  $B$  au centre du cube. Les estimations  $(B_4)$  sont nécessaires pour majorer la différences entre les 2 formes quadratiques obtenues.

### 3. - ESTIMATIONS DANS LES CARRÉS.

Il est assez simple de prouver que l'opérateur de Schrödinger  $H_{B_0}$  dans  $\mathbb{R}^2$  correspondant à un champ constant non nul  $B_0 dx \wedge dy$ , admet un spectre discret  $E_n = (2n+1) |B_0|$ , chaque espace propre  $\mathfrak{H}_n$  étant de dimension infinie ; il n'en est plus de même déjà dans le demi-plan avec les conditions de Dirichlet : le spectre de  $H_{B_0}$  y est alors égal à  $[B_0, +\infty[$  : on ne peut pas utiliser la méthode des images à cause de la figure suivante qui représente les trajectoires d'une particule classique dans un champ constant, avec réflexion au bord du demi-plan :



Les trajectoires qui rencontrent le bord ne se referment pas bien.

Dans un carré, on peut cependant calculer le spectre avec des données au bord périodiques si  $B_0 R^2 \in 2\pi\mathbb{Z}$  ( $R$  = longueur du côté du carré) : il existe alors un fibré  $L$ , sur le tore  $\mathbb{R}^2 / (R\mathbb{Z})^2$ , de courbure  $B_0 dx \wedge dy$ . Le spectre est alors formé des  $(2n+1)|B_0|$  ( $n \geq 0$ ) avec une multiplicité constante  $\frac{|B_0|R^2}{2\pi}$ , cela permet d'obtenir le résultat crucial suivant : ici

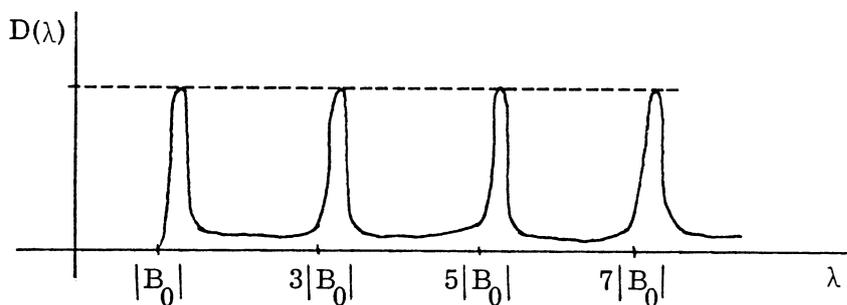
$$T(\lambda) = \text{Card}\{n \geq 0 \mid 2n+1 < \lambda\},$$

et  $N_{B_0, R}(\lambda)$  est la fonction de dénombrement spectral pour le problème de Dirichlet sur un carré de côté  $R$  :

THEOREME. Il existe une constante C universelle telle que pour tout  $A \in ]0, R/2]$  , on ait :

$$\frac{|B_0| (R-A)^2}{2\pi} T\left(\left(\lambda - \frac{C}{A^2}\right)/|B_0|\right) \leq N_{B_0, R}(\lambda) \leq \frac{|B_0| R^2}{2\pi} T(\lambda/|B_0|) .$$

De ce théorème résulte en particulier l'allure de la densité régularisée de valeurs propres lorsque  $R \gg 1$  :



#### BIBLIOGRAPHIE

- [A-H-S] J. AVRON, I. HERBST et B. SIMON : Schrödinger Operators with magnetic fields I, Duke Math. J. 45 (1978), pp. 847-883.
- [CV 1] Y. COLIN DE VERDIERE : Calcul du spectre de certaines nil-variétés compactes de dimension 3 . Séminaire Grenoble-chambéry 83-84 (exposé n° 5).
- [CV 2] Y. COLIN DE VERDIERE : Minorations de sommes de valeurs propres et conjecture de Polya, Séminaire Grenoble-Chambéry 84-85 (à paraître).
- [CV 3] Y. COLIN DE VERDIERE : L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques bidimensionnelles. Prépublications de l'Institut Fourier n° 33 (1985).
- [CV 4] Y. COLIN DE VERDIERE : L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques (en cours de rédaction).
- [D] A. DUFRESNOY : Un exemple de champ magnétique dans  $\mathbb{R}^V$  , Duke Math. J. 50 (1983), pp. 729-734.
- [DY 1] J.-P. DEMAILLY : Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la  $d''$ -cohomologie. C.R.A.S. (à paraître).
- [DY 2] J.-P. DEMAILLY : Même titre (soumis aux Annales de l'Institut Fourier).

- [I] A. IWATSUKA: Magnetic Schrödinger Operators with compact Resolvent. Preprint 1985.
- [M] F. MICHAU : Comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique (thèse de 3ème cycle, Grenoble 1982).
- [R-S] REED-SIMON : Methods of modern mathematical physics IV.