

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN DUCHON

RAOUL ROBERT

**Évolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume.
Estimations a priori et résultats d'existence**

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A9_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EVOLUTION D'UNE INTERFACE PAR
CAPILLARITE ET DIFFUSION DE VOLUME.
ESTIMATIONS A PRIORI et RESULTATS D'EXISTENCE.

Jean DUCHON et Raoul ROBERT

I. M. A. G.
B. P. n° 68
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
FRANCE

INTRODUCTION

Nous considérons le problème d'évolution d'interface suivant : à l'instant t , Ω_t est un domaine du plan dont la frontière Γ_t se déplace à une vitesse (mesurée suivant la normale extérieure ν) égale à $-\frac{\partial K}{\partial \nu}$, dérivée normale d'une fonction harmonique dans Ω_t dont la valeur au bord est égale à la courbure K de Γ_t . Ceci est un modèle du phénomène de corrosion par capillarité et diffusion de volume (cf. [1], [5]).

Nous nous proposons, d'une part d'établir des estimations a priori sur la solution dans le cas où Γ_t est un graphe de fonction (estimations impliquant notamment que pour une condition initiale convenable, le maximum $m(t)$ de la pente de Γ_t reste borné au cours du temps) ; d'autre part de montrer l'existence d'une solution (globale ou locale en temps) lorsque la donnée initiale est une courbe corde-arc vérifiant une certaine condition de régularité (courbes appelées "2-smooth" par S. Semmes [6]).

La technique de démonstration consiste à faire apparaître la solution comme point fixe d'un opérateur contractant à partir d'une formulation intrinsèque de l'équation d'évolution. Pour ce faire, on ramène

l'étude de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \nu}$ à celle de noyaux associés à l'interface Γ_t .

Nous remercions Michel Zinsmeister pour ses références et sa conversation agréable et instructive.

§ 1. ECRITURE DE L'EQUATION ET NOTATIONS.

Nous ne considérerons que des courbes rectifiables que nous supposerons paramétrées par l'abscisse curviligne :

$$\Gamma = \{z(s) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} .$$

Nous supposerons que ces courbes vérifient la condition corde-arc, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|s - \sigma| \leq \gamma |z(s) - z(\sigma)| .$$

On notera

$$z'(s) = e^{i\varphi(s)} .$$

Si Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne, on a $|\varphi(s)| \leq \alpha < \pi/2$ et Γ est corde-arc avec $\gamma = \frac{1}{\cos \alpha}$.

Notons Ω l'ouvert situé à gauche de Γ , $\tau = e^{i\varphi}$ le vecteur unitaire tangent, $\nu = -ie^{i\varphi}$ le vecteur normal sortant et $n = -\nu$.

Nous désignerons par $\frac{\partial f}{\partial \nu}(s)$ la trace dérivée normale, convenablement définie, au point $z(s)$ de Γ , de la solution U du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{dans } \Omega , \\ U(z(s)) = f(s) . \end{cases}$$

Enfin pour Γ suffisamment régulière, on notera $K(s) = \varphi'(s)$ la courbure de Γ au point $z(s)$, de sorte que :

$$\frac{d\tau}{ds} = Kn .$$

Décrivons maintenant l'évolution de l'interface.

Nous supposons l'interface infinie Γ_t donnée par la représentation paramétrique régulière $\tilde{z}(t, \sigma)$, σ étant une abscisse curviligne sur Γ_t .

Nous allons montrer qu'on peut se ramener à prendre à chaque instant l'origine de l'abscisse curviligne sur une même trajectoire orthogonale aux Γ_t . Cela revient à chercher une fonction $h(t)$ telle qu'en effectuant le changement de variable admissible $(t, \sigma) \rightarrow (t, s)$, $s = \sigma - h(t)$, la nouvelle représentation paramétrique $z(t, s) = \tilde{z}(t, s+h(t))$ vérifie :

$$(0) \quad \frac{\partial z}{\partial t}(t, 0) \cdot \frac{\partial z}{\partial s}(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

et donc :

$$\frac{dh}{dt}(t) = - \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}(t, h(t)) \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma}(t, h(t)).$$

Cette équation différentielle assure l'existence d'une solution locale unique $h(t)$ pour toute donnée initiale. Nous supposons désormais Γ_t paramétrée par une telle représentation $z(t, s)$.

L'équation d'évolution de Γ_t s'écrit alors :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, s) \cdot \nu(t, s) = - \frac{\partial K}{\partial \nu}(t, s).$$

Calculons $\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot K_n = K \frac{\partial K}{\partial \nu}$$

(car $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \tau = 0$), ce qui, avec (0), donne :

$$\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau = \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial \nu} d\sigma$$

d'où $z(t, s)$ vérifie :

$$(E z) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial K}{\partial v} v + \left(\int_0^s K \frac{\partial K}{\partial v} d\sigma \right) \tau , \\ z(0, s) = z_0(s) . \end{cases}$$

Dérivant cette équation par rapport à s (en remarquant que $\frac{\partial v}{\partial s} = K\tau$), on obtient :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(- \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial K}{\partial v} - K \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial v} d\sigma \right) v ,$$

or $\frac{\partial \tau}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} v$, on obtient donc l'équation en φ :

$$(E \varphi) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial K}{\partial v} = K \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial v} d\sigma , & K = \frac{\partial \varphi}{\partial s} , \\ \varphi(0, s) = \varphi_0(s) . \end{cases}$$

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de cette équation. Il nous arrivera fréquemment de désigner par D l'opérateur de dérivation par rapport à s .

§ 2. ESTIMATIONS A PRIORI.

Afin d'éviter des justifications fastidieuses, les manipulations qui suivent pour obtenir les estimations sont à prendre formellement (elles n'ont de sens qu'en supposant la solution du problème d'évolution suffisamment régulière et plate à l'infini).

On suppose donc pour la suite de ce paragraphe que $z(t, s)$ est une solution ad hoc.

Estimation 1.

Notons $L(\varphi) = \int (1 - \cos \varphi(t, s)) ds$, $L(\varphi)$ mesure "l'allongement" de la courbe Γ_t par rapport à l'axe réel. Calculons :

$$\frac{dL}{dt} = \int \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} ds ,$$

soit, en utilisant (E φ) et en intégrant par parties en remarquant que $\sin \varphi K = \frac{\partial}{\partial s}(1 - \cos \varphi)$:

$$\frac{dL}{dt} = - \int K \frac{\partial K}{\partial v} ds .$$

D'où

$$(1) \quad \frac{dL}{dt} + E = 0 ,$$

en posant $E = \int_{\Omega_t} K \frac{\partial K}{\partial v} ds = \int_{\Omega_t} (\nabla C)^2 dx$, où $C(t, x)$ désigne la fonction harmonique sur Ω_t dont la valeur au bord sur Γ_t est $K(t, s)$ (cf. par exemple [2] pour un cadre convenable pour ce problème de Dirichlet).

(1) implique $\frac{dL}{dt} \leq 0$ d'où L décroît avec le temps.

Estimation 2.

On calcule

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla C)^2 dx - \int (\nabla C)^2 \frac{\partial K}{\partial v} ds .$$

On a :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla C)^2 dx = 2 \int_{\Omega_t} \nabla C \cdot \nabla \frac{\partial C}{\partial t} dx = 2 \int \frac{\partial K}{\partial v} \frac{\partial C}{\partial t} ds .$$

Calculons $\frac{\partial C}{\partial t}$ sur Γ_t :

sachant que $K(t, s) = C(t, z(t, s))$, on obtient

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla C \cdot \frac{\partial z}{\partial t} .$$

En utilisant l'équation (Ez), l'équation en K obtenue en dérivant (E φ) par rapport à s et l'égalité $(\nabla C)^2 = \left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2$ sur Γ_t , on obtient finalement :

$$(2) \quad \frac{dE}{dt} + 2Q = 2 \int \left(K \frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 ds + \int \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^3 ds - \int \left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial K}{\partial v} ds ,$$

où on note $Q = \int \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 ds$.

Exploitation des estimations (1) et (2).

En supposant que $z(t, s)$ est une solution "convenable" du problème d'évolution pour $t \in [0, T]$, on pose $m(t) = |\operatorname{tg} \varphi(t, \cdot)|_\infty$, où $|f|_p$ désigne la norme d'une fonction f dans L^p , $1 \leq p \leq \infty$.

On va montrer que si $m(0)$, $L(0)$, $E(0)$ sont assez petits, $m(t)$, $L(t)$, $E(t)$ restent bornés sur $[0, T]$.

Dans ce but, on va majorer les termes de droite de l'estimation (2) à l'aide des quantités m, L, E, φ . La lettre c désignera diverses constantes et $c(m)$ diverses fonctions de m continues et croissantes.

Examinons le premier terme :

$$\int \left(K \frac{\partial K}{\partial v} \right)^2 d\sigma \leq \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_\infty^2 |K|_2^2.$$

Par interpolation, on a :

$$|K|_2 \leq |\varphi|_2^{1/3} \left| \Lambda^{1/2} K \right|_2^{2/3},$$

où Λ^s est défini par transformation de Fourier :

$$\widehat{\Lambda^s f(\xi)} = |2\pi\xi|^s \widehat{f(\xi)}.$$

Comme on a, d'après [2], $\left| \Lambda^{1/2} K \right|_2^2 \leq (m + \sqrt{1+m^2})E$ et $|\varphi|_2 \leq cL^{1/2}$, il vient $|K|_2^2 \leq c(m)L^{1/3}E^{2/3}$.

D'autre part :

$$\left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_\infty \leq \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_2^{1/2} \left| \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial K}{\partial v} \right|_2^{1/2}.$$

Introduisons maintenant K^* , trace sur Γ_t de C^* fonction harmonique conjuguée de C , on a $\frac{\partial K}{\partial v} = \frac{\partial K^*}{\partial s}$

$$\text{et } \left| \frac{\partial K^*}{\partial s} \right|_2 \leq \left| \Lambda^{1/2} K^* \right|_2^{2/3} \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} K^* \right|_2^{1/3}.$$

Or on a également, d'après [2],

$$\left| \Lambda^{1/2} K^* \right|_2^2 \leq (m + \sqrt{1+m^2})E,$$

$$\text{d'où } \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_{\infty} \leq c(m) E^{1/6} Q^{1/3},$$

$$\text{et } \int \left(K \frac{\partial K}{\partial v} \right)^2 ds \leq c(m) L^{1/3} Q^{2/3}.$$

Le deuxième terme est alors immédiat :

$$\left| \int \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)^3 ds \right| \leq \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_{\infty} \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_2^2 \leq c(m) E^{5/6} Q^{2/3}.$$

Et le troisième terme se traite grâce à l'inégalité de Payne-Weinberger (cf. [4]) :

$$\left| \frac{\partial K}{\partial s} \right|_2 \leq \left(m + \sqrt{m^2 + \sqrt{1+m^2}} \right) \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_2,$$

et on obtient :

$$\left| \int \left(\frac{\partial K}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial K}{\partial v} ds \right| \leq \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_{\infty} \left| \frac{\partial K}{\partial s} \right|_2^2 \leq c(m) E^{5/6} Q^{2/3}.$$

D'où finalement (2) donne :

$$\frac{dE}{dt} + 2Q \leq c(m) \left[L^{1/3} E Q^{2/3} + E^{5/6} Q^{2/3} \right],$$

soit en appliquant l'inégalité de Young :

$$\frac{dE}{dt} + 2Q \leq c(m) (E+2Q) [E^{1/2} + E + L].$$

Posons $M = L+E$ et additionnons cette inégalité avec (1), il vient :

$$(3) \quad \frac{dM}{dt} \leq [c(m)(M+M^{1/2}) - 1] (E+2Q).$$

Par ailleurs, on a :

$$|\varphi|_{\infty} \leq |\varphi|_2^{1/2} |K|_2^{1/2},$$

d'où il vient :

$$|\varphi|_{\infty} \leq c(m + \sqrt{1+m^2})^{1/6} M^{1/2}$$

et comme $m = \text{tg} |\varphi|_{\infty}$, on a :

$$(4) \quad \frac{\text{Arctg } m}{(m + \sqrt{1+m^2})^{1/6}} \leq c M^{1/2}.$$

On déduit facilement de (3) et (4) que si la condition initiale est choisie telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 < m^* , \\ c(m^*)(M_0 + M_0^{\frac{1}{2}}) < 1 , \\ c M_0^{\frac{1}{2}} < \frac{\text{Arctg } m^*}{(m^* + \sqrt{1+m^{*2}})^{1/6}} , \end{array} \right.$$

où m^* est la valeur où la fonction $\frac{\text{Arctg } m}{(m + \sqrt{1+m^2})^{1/6}}$ atteint son maximum ;
alors sur $[0, T]$, on a $m(t) \leq m^*$ et $M(t) \leq M_0$.

§ 3. RESULTATS D'EXISTENCE.

On note $V^{\frac{1}{2}} = V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions u localement intégrables telles que $\frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \in L^2(ds d\sigma)$. On vérifie facilement que $V^{\frac{1}{2}}$ est l'espace des distributions tempérées u telles que \hat{u}' soit localement intégrable avec $\int |\xi|^{-1} |\hat{u}'|^2 d\xi < +\infty$. Et on notera

$$|u|_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \right|_{L^2(ds d\sigma)} = |\Lambda^{\frac{1}{2}} u|_2 .$$

THEOREME 1 (existence locale). - Pour toute courbe corde-arc Γ_0 avec $\varphi_0 \in V^{\frac{1}{2}}$, il existe $T > 0$ et $\varphi(t, s) \in L^\infty(0, T; V^{\frac{1}{2}}) \cap C([0, T]; \mathcal{D}')$ avec $t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \in L^\infty(0, T; L^2)$, solution de (E φ) .

THEOREME 2 (existence globale). - Il existe $\mu > 0$ tel que si $|\varphi_0|_{\frac{1}{2}} \leq \mu$, il existe $\varphi(t, s) \in L^\infty(0, \infty; V^{\frac{1}{2}}) \cap C([0, \infty[; \mathcal{D}')$ avec $t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \in L^\infty(0, \infty; L^2)$, solution de (E φ) .

On met (E φ) sous la forme $\mathcal{J}\psi = \psi$, où $\mathcal{J}\psi(t) = \int_0^t N_{t-\theta} * F(\varphi(\theta)) d\theta$ avec $\hat{N}_t(\xi) = e^{-t|2\pi\xi|^3}$, $\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \psi(t)$

et $F(\varphi) = K \int_0^S K \frac{\partial K}{\partial v} ds + D \left(\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda \right) K$, $K = D\varphi$.

On montre que \mathcal{J} est contractant sur une boule de l'espace W_T des fonctions $\psi(t,s)$ telles que ψ et $D^2\psi$ appartiennent à $C([0, T[; L^2)$ avec $|\psi(t)|_2 \leq ct^{1/6}$ et $|D^2\psi(t)|_2 \leq ct^{-1/2}$, muni de la norme

$$\|\psi\| = \sup_{0 < t < T} \max \left\{ t^{-1/6} |\psi(t)|_2, t^{1/2} |D^2\psi(t)|_2 \right\} ;$$

$T > 0$ assez petit pour l'existence locale, $T = +\infty$ pour l'existence globale.

Pour cela, on estime $\|\mathcal{J}\psi\|$ et $\|\mathcal{J}\psi_1 - \mathcal{J}\psi_2\|$ suivant

$$|D^j \mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq \int_0^t |D^j N_{t-\theta}|_1 |F(\varphi(\theta))|_2 d\theta ,$$

$$|D^j (\mathcal{J}\psi_1(t) - \mathcal{J}\psi_2(t))|_2 \leq \int_0^t |D^j N_{t-\theta}|_1 |F(\varphi_1(\theta)) - F(\varphi_2(\theta))|_2 d\theta$$

en remarquant que

$$|D^j N_{t-\theta}|_1 = a_j (t-\theta)^{-j/3} .$$

D'autre part, on a :

PROPOSITION 1. - Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que l'on ait

$$(I) \quad |F(\varphi)|_2 \leq \epsilon R^{5/3} \quad \text{dès que} \quad |\varphi|_{\frac{1}{2}} \leq \rho \quad \text{et} \quad |D^2\varphi|_2 \leq R ,$$

$$(II) \quad |F(\varphi_1) - F(\varphi_2)|_2 \leq \epsilon (R^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_2 + R^{2/3} |D^2(\varphi_1 - \varphi_2)|_2)$$

si φ_1 et φ_2 sont comme φ ci-dessus avec en outre $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^2$.

PROPOSITION 2. - Soit Γ_0 une courbe corde-arc avec $\varphi_0 \in V^{\frac{1}{2}}$. Il existe c et $\rho > 0$ tels que l'on ait :

$$(I') \quad |F(\varphi)|_2 \leq c R^{5/3} \quad \text{si} \quad |\varphi - \varphi_0|_{\frac{1}{2}} \leq \rho \quad \text{et} \quad |D^2\varphi|_2 \leq R ,$$

$$(II') \quad |F(\varphi_1) - F(\varphi_2)|_2 \leq c (R^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_2 + R^{2/3} |D^2(\varphi_1 - \varphi_2)|_2) .$$

Si φ_1 et φ_2 sont comme φ ci-dessus avec en outre $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^2$.

Appliquant la proposition 1, on obtient le théorème 2. En effet, on a :

$$\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \psi(t) ,$$

$$\text{d'où } |\varphi(t)|_{\frac{1}{2}} \leq c |\varphi_0|_{\frac{1}{2}} + |\psi(t)|_2^{3/4} |D^2 \psi(t)|_2^{1/4} \leq c |\varphi_0|_{\frac{1}{2}} + r$$

$$\text{si } \|\psi\| \leq r ;$$

$$\text{et } |D^2 \varphi(t)|_2 \leq |\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi_0|_2 |\Lambda^{3/2} N_t|_1 + |D^2 \psi(t)|_2 \leq (c |\varphi_0|_{\frac{1}{2}} + r) t^{-\frac{1}{2}} .$$

Il est alors facile de trouver $r > 0$ tel que la boule de rayon r de W_∞ soit conservée par \mathcal{J} , avec en outre $\|\mathcal{J}\psi_1 - \mathcal{J}\psi_2\| \leq \delta \|\psi_1 - \psi_2\|$, $\delta < 1$.

Pour l'existence locale, on applique la proposition 2, en remarquant que $N_t * \varphi_0 \rightarrow \varphi_0$ dans $V^{\frac{1}{2}}$. D'autre part, utilisant la densité de \mathcal{B} dans $V^{\frac{1}{2}}$, on a $|D^2(N_t * \varphi_0)|_2 = o(t^{-\frac{1}{2}})$. Alors \mathcal{J} devient contractant sur la boule de rayon r de W_T pour r et T assez petits.

La preuve des propositions repose sur une expression de $\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda$ à l'aide d'opérateurs intégraux :

$$\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda = (Y - HX) \left(\frac{1}{2} H + X \right)^{-1} D ,$$

où H est la transformation de Hilbert et X et Y sont donnés par les parties réelle et imaginaire du noyau

$$Z(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sigma - s} - \frac{z'(s)}{z(\sigma) - z(s)} \right) .$$

Pour une courbe corde-arc avec $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$, ce noyau appartient à $L^2(ds d\sigma)$: on peut le voir par exemple en posant $\sigma = s + h$, prenant la transformée de Fourier de $z(s+h) - z(s) - hz'(s)$, et appliquant Plancherel. L'opérateur Z défini par $Zf(s) = \int Z(s, \sigma) f(\sigma) d\sigma$ est donc compact, donc aussi X et Y .

On obtient l'expression de $\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda$ en étudiant le potentiel de simple couche de densité $g \in L^2(\Gamma)$:

$$\mathbb{S}g(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int \text{Log} \left| \frac{z(\sigma) - \zeta}{z(\sigma) - \zeta_0} \right| g(\sigma) d\sigma ,$$

calculant

$$\lim_{\zeta \rightarrow z(s)} \nabla \mathbb{S}g(\zeta) \cdot \nu(s) = -\frac{1}{2}g(s) + Yg(s)$$

(limite non tangentielle dans Ω), ainsi que

$$\frac{d}{ds} \mathbb{S}g(z(s)) = \frac{1}{2}Hg(s) + Xg(s) .$$

La solution U du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{dans } \Omega , \\ U(z(s)) = f(s) , \end{cases}$$

si $Df \in L^2$, s'écrit $U = \mathbb{S}g + c$ où $g = (\frac{1}{2}H+X)^{-1}Df$. L'existence de $(\frac{1}{2}H+X)^{-1}$ résulte de l'alternative de Fredholm.

La majoration des différents termes de $|F(\varphi)|_2$ et $|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)|_2$ dans les propositions 1 et 2, nécessite une estimation de la constante corde-arc pour φ voisin de 0 ou de φ_0 dans $V^{\frac{1}{2}}$ (calcul simple).

D'autre part, il faut estimer $(\frac{1}{2}H+X)^{-1}$, ce qui se fait par perturbation au voisinage de $(\frac{1}{2}H+X_0)^{-1}$ en écrivant

$$(\frac{1}{2}H+X)^{-1} = (I + (\frac{1}{2}H+X_0)^{-1}(X-X_0))^{-1} (\frac{1}{2}H+X_0)^{-1}$$

et en majorant $\|X-X_0\|_{op}$ pour $|\varphi - \varphi_0|_{\frac{1}{2}}$ petit :

LEMME 1. - Si Γ_0 et Γ sont corde-arc de constantes γ_0, γ avec $\varphi - \varphi_0 \in V^{\frac{1}{2}}$, alors

$$\|Z-Z_0\|_{op} \leq c\gamma\gamma_0 |\varphi - \varphi_0|_{\frac{1}{2}} .$$

Pour le démontrer, on écrit

$$2\pi(Z-Z_0)(s, s+h) = \frac{h}{z(s+h)-z(s)} \cdot \frac{h}{z_0(s+h)-z_0(s)} \int_0^1 T_\lambda(s, h) d\lambda$$

où
$$T_\lambda = \frac{1}{h} \left(e^{i\varphi(s+\lambda h)} e^{i\varphi_0(s)} - e^{i\varphi(s)} e^{i\varphi_0(s+\lambda h)} \right) ,$$

et on estime $\left| T_\lambda \right|_{L^2(ds dh)}$ en fonction de $\left| \varphi - \varphi_0 \right|_{\frac{1}{2}}$.

Les estimations (I) et (I') résultent alors d'une majoration de

$\|DZ\|_{op}$:

LEMME 2. - Soit Γ corde-arc de constante γ avec $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$
et $D\varphi \in V^{\frac{1}{2}} \cap L^\infty$. Alors

$$\|DZ\|_{op} \leq \left| \frac{\partial Z}{\partial s} \right|_{L^2(ds d\sigma)} \leq c(\gamma) |D\varphi|_{\frac{1}{2}} + c(\gamma) |D\varphi|_\infty |\varphi|_{\frac{1}{2}}.$$

Pour les estimations (II) et (II'), il faut en outre majorer

$\|DZ_1 - DZ_2\|_{op}$:

LEMME 3. - Soit Γ_1 et Γ_2 corde-arc de constante $\leq \gamma$
avec $\varphi_1, \varphi_2 \in V^{\frac{1}{2}}$ de norme $\leq \beta$, $D^2\varphi_1, D^2\varphi_2 \in L^2$ de norme
 $\leq R$ et $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^2$. Alors

$$\|DZ_1 - DZ_2\|_{op} \leq c(\gamma, \beta) (R |\varphi_1 - \varphi_2|_2 + R^{-1/3} |D^2(\varphi_1 - \varphi_2)|_2),$$

où $c(\gamma, \beta)$ tend vers 0 avec β .

Certains détails paraîtront dans [3], où l'existence locale est prouvée pour une courbe initiale Γ_0 lipschitzienne ($|\varphi_0|_\infty < \frac{\pi}{2}$) avec $\varphi_0, D^2\varphi_0 \in L^2$.

REFERENCES.

- [1] L. COUDURIER, N. EUSTATHOPOULOS, J.C. GJOUD, P. DESRE,
Corrosion intergranulaire du cuivre par le plomb liquide
sous l'effet des forces capillaires.
Journal de Chimie physique, 3, 1977, p. 289-294.
- [2] J. DUCHON, R. ROBERT, Quelques inégalités pour les potentiels
sur un domaine lipschitzien. A paraître.
- [3] J. DUCHON, R. ROBERT, Evolution d'une interface par capillarité
et diffusion de volume, I existence locale en temps.
A paraître, Ann. I.H.P., Analyse non linéaire.
- [4] Y. MEYER, Théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens
d'après G.C. Verchota.
Séminaire GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ, 1982-83, n° 5.
- [5] W.W. MULLINS, Grain boundary grooving by volume diffusion.
Transactions of the metallurgical society of AIME, 218,
1960, p. 354-361.
- [6] S.W. SEMMES, The Cauchy integral and related operators on smooth
curves.
Thèse, Washington Univ., Saint Louis, 1983.
- [7] C. POMMERENKE, Univalent functions,
Vanderhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.