Journées Équations aux dérivées partielles

Antonio Bove

Problème de Cauchy pour des opérateurs fuchsiens

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A4_0>

CONFERENCE N° IV

PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS FUCHSIENS

par A. Bove

On se propose de donner dans cet exposé certain résultats contenus dans le travail [4] , concernant l' existence, l' unicité et la propagation des singularités pour des solution du probléme de Cauchy (pdC) associé à une classe d' opérateurs fuchsiens.

1. Le résultat principal

Soit M une varieté C^∞ de dimension n sans bord (ou, à la fois, $M = R^n$), m un entier positif et k $1,2,..,m$. On considère un opérateur differentiel

$$(1.1)\quad P(t,x,D_t,D_x) = t^k\, P_m(t,x,D_t,D_x) + t^{k-1}\, P_{m-1}(t,x,D_t,D_x) + \dots +$$

$$+ P_{m-k}(t,x,D_t,D_x),$$

où

a) P_{m-j} est un opérateur d' ordre m-j à coefficients C^∞, défini sur $R_t \times M$

b) P_m est (homogène d' ordre m) strictement hyperbolique par rapport à t; on dèsigne par $\tau = \lambda_j(t,x,\xi)$ les racines en τ de l' équation $P_m(t,x,\tau,\xi) = 0$, $j = 1,..,m$ (les λ_j seront appelées les "racines hyperboliques de P").

Un tel P sera appelé fuchsien hyperbolique d' ordre m et poids m-k. On associe à P le polynôme indiciel (reduit):

$$(1.2)\quad I_p(x,\zeta) = \sum_{j=0}^{k} (\sqrt{-1})^{j-m}\, P_{m-j}(0,x,1,0)\,\zeta(\zeta-1)\dots(\zeta-(k-j-1)),$$

$$x\in M,\quad \zeta\in\mathbb{C},$$

et on dit que P vérifie la <u>condition de Fuchs</u> si

$$(1.3)\quad I_p(x,\zeta)\neq 0,\ \forall\, x\in M,\ \forall\,\zeta\in Z_+=\{0,1,\dots\}.$$

Pour un opérateur fuchsien hyperbolique de poids m-k on s' interesse au pdC suivant

$$(1.4)\quad \begin{cases} Pu = f & ,\ \text{dans}\ R\times M \\ \partial_t^j u\big|_{t=0} = g_j & ,\ \text{dans}\ M,\ j=0,1,..,m-k-1 \end{cases}$$

(il n' y a pas des données de Cauchy si k=m).
Le pdC (1.4) a été étudié par nombreux auteurs, soit dans le cas analytique, soit dans le cas C^∞. En supposant que les coefficints sont analytiques en x, Baouendi et Goulaouic [1] ont donné des théorèmes du type Cauchy-Kowalewski et Holmgren pour des classes plus générales d' opérateurs. Dans le cadre hyperfonctions (1.4) a été étudié de façon très précise par Tahara [10] et, du point de vue microlocal, par Kashiwara-Oshima [7] et Ōaku [9]. Dans le cadre C^∞, les opérateurs fuchsiens hyperboliques ont été étudié, du point de vue microlocal, par B.L.P. [3] et par Tahara, pour ce qui concerne le pdC (1.4) où les données sont lisses [11], [12].

Ici on s' interesse à des résultats d' existence, unicité et propagation des singularités quand les données sont des distributions. De façon plus précise, on suppose que $g_j \in \mathcal{D}'(M)$ et que f est une distribution régulière sur $R \times M$, c' est à dire $f \in C^\infty(R; \mathcal{D}'(M))$ et $WF(f) \cap N_t^* M = \emptyset$, $t \neq 0$, où $N_t^* M = \{(t,x,\tau,0) \in T^*(R\times M) \mid \tau \neq 0\}$ désigne le fibré conormal à la section $\{t\} \times M$ (on écrit $f \in \mathcal{D}'_r(R \times M)$) Dès que la surface $\{t = 0\}$ est caractéristique pour l' opérateur P, on va utiliser une notion adaptée de WF (voir Chazarain [5] et Melrose - Sjöstrand [8]). On dit qu' un point $(x, \xi) \in T^* M \setminus 0$ n' est pas dans le $\partial WF(f)$ s' il existe un opd classique $B(x,D_x)$, d' ordre zero, qui est elliptique près du point (x, ξ) et tel que $B(x,D_x) f \in C^\infty( ]-\varepsilon, \varepsilon[\times M)$, pour quelque $\varepsilon > 0$, suffisamment petit. Nous posons

$$(1.5) \qquad \widetilde{WF}(f) = \partial WF(f) \cup WF(f|_{\{t\neq 0\}\times M}).$$

On obtient alors le théorème suivant:

<u>Théorème</u>. Soit P un opérateur fuchsien hyperbolique de poids m-k dans $R \times M$, vérifiant la condition de Fuchs (1.3). Alors pour toute $f \in \mathcal{D}'_r(R \times M)$ et toute $g_j \in \mathcal{D}'(M)$, $j = 0,1,..,m-k-1$, il existe une distribution régulière unique u, qui resout (1.4). En plus on peut décrire les singularités de u comme suit:

i) $$\partial WF(u) \subset \partial WF(f) \cup \bigcup_{j=0}^{m-k-1} WF(g_j);$$

ii) $$WF(u|_{\{t\neq 0\}\times M}) \subset \{(t,x,\tau,\xi) \mid t\neq 0,\ (t,x,\tau,\xi) \in WF(f)\} \cup$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} \{(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi) \mid \exists s,\ \tfrac{s}{t} \in]0,1[,\ \exists (y,\eta) \in T^*M\setminus 0,$$
$$(s,y,\lambda_j(s,y,\eta),\eta) \in WF(f),\ (x,\xi) = \Phi_j^{t-s}(y,\eta)\} \cup$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} \{(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi) \mid t\neq 0,\ \exists (y,\eta) \in \partial WF(f) \cup$$
$$\bigcup_{\ell=0}^{m-k-1} WF(g_\ell),\ (x,\xi) = \Phi_j^{t}(y,\eta)\},$$

Φ_j^s étant le flot hamiltonien associé au facteur $\tau - \lambda_j(t,x,\xi)$, $j=1,..,m$;

iii) $WF(u) \cap N_o^* M = WF(f) \cap N_o^* M$

iv) Soit $x_o \in M$ et supposons que

a) $WF(f) \cap \pi^{-1}(0,x_o) = \emptyset$ ($\pi : T^*(R\times M)\setminus 0 \longrightarrow R\times M$ étant la projection canonique),

b) $(x_o, \xi_o) \in \bigcup_{j=0}^{m-k-1} WF(g_j)$, $\xi_o \neq 0$,

alors il existe au moin un indice $j\in\{1,..,m\}$ tel que ou bien $WF(u|_{\{t>0\}\times M})$ ou bien $WF(u|_{\{t<0\}\times M})$ contient un petit arc de la courbe bicaractéristique correspondante à $\tau - \lambda_j(t,x,\xi)$ et sortante du point $(0,x_o, \lambda_j(0,x_o,\xi_o),\xi_o)$.

2. Idée de la démonstration

La preuve du théorème est faite en construisant un parametrixe à gauche et à droite pour le problème de Cauchy (1.4). D' Abord on doit faire quelques préparations.

Soit $R : \mathcal{D}'(M) \longrightarrow \mathcal{D}'_r(R \times M)$, tel que

$$(2.1) \qquad \partial_t^j Rv|_{t=0} = \begin{cases} v & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } j>0 \end{cases}, \quad \widetilde{WF}(Rv) = \partial WF(Rv) \subset WF(v).$$

En posant $v(t,x) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{t^j}{j!} (Rg_j)(t,x)$, on a $u = v + t^{m-k}w$, où

$w\in\mathcal{D}'_r(R\times M)$ est une distribution régulière convenable. Si l' on applique P à w on obtient $\widetilde{P}w = f - Pv$, où $\widetilde{P}(t,x,D_t,D_x) =$

$= \sum_{j=0}^{m} t^{m-j} P_{m-j}(t,x,D_t,D_x)$, est un opérateur hyperbolique fuchsien

de poids 0 et $I_{\widetilde{P}}(x,\zeta) = (\zeta-(k-m)).(\zeta-(k-m-1))\ldots(\zeta+m)\, I_P(x,\zeta)$;
on note que pour $\widetilde{P}$ il n' y a pas des données de Cauchy sur $t = 0$

et que $\widetilde{WF}(f-Pv) \subset \widetilde{WF}(f) \cup \bigcup_{j=0}^{m-k-1} WF(g_j)$.

Il est clair alors qu' il suffit de démontrer le théorème pour
" une equation " $Pu = f$, où P a poids 0 et qu' un tel P peut
s' écrire de la façon suivante:

(2.2) $$P(t,x,D_t,D_x) = P'(t,x,t\partial_t,D_x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{h=0}^{m-j} t^{m-j-h} A_{m-j-h,j}(t,x,D_x)(t\partial_t)^h ,$$

les $A_{m-j-h,j}$ étant des opérateurs différentiels convenables.
Dès que la condition de Fuchs est satisfaite on peut calculer toutes

les traces de u à partir de celles de f : $\partial_t^j u|_{t=0} =$

$= \sum_{r=0}^{j} L^P_{j-r,j}(x,D_x)(\partial_t^r f|_{t=0})$, où $L^P_{j-r,j}$ est un opérateur

différentiel d' ordre j-r et $L^P_{o,r} = 1/I_P(x,j)$. On pose alors

$v_p(t,x) = \sum_{j=0}^{p-1} (t^j/j!)\, R(\partial_t^j u|_{t=0})$ et l' on a $u - v_p = t^p w_p$,

$f-Pv_p = t^p h_p$, w_p, h_p étant des distributions régulières convenables.
Il en résulte que $P(t^p w_p) = t^p P'(t,x,t\partial_t + p,D_x)\, w_p = t^p h_p$,

c' est à dire qu' on peut se borner à résoudre l' équation:

(2.3) $P(t,x,t\partial_t+p,D_x)\, u = f,\ f\in\mathcal{D}'_r\,(R\times M),\ p\in Z_+$ assez grand.

On a le lemme suivant:

Lemme 1. Le problème (2.3) est équivalent mod. $C^\infty(R\times M)$ à un système $N\times N$ ($N = m(m+1)/2$) de la forme

(2.4) $$\mathcal{P}\vec{u} = (I_N t\partial_t - tA(t,x,D_x) - B(t,x,D_x))\,\vec{u} = \vec{f} \quad \text{sur} \quad R\times M,$$

où $\widetilde{WF}(\vec{f}) = \widetilde{WF}(f)$ et $A(t,x,D_x)$, $B(t,x,D_x)$ sont des matrices $N\times N$ d' opd d' ordre 1,0 resp., ayants les proprietés suivantes:

i) le symbole principal de A, $\sigma_1(A)(t,x,\xi)$, est diagonal et ses valeurs propres sont les racines hyperboliques de P.

ii) Re $\sigma_0(B)(t,x,\xi) \le -I_N$, pour tout $(x,\xi)\in T^*M\setminus 0$.

L' example suivant montre comment on peut faire la réduction du Lemme 1.

Example. On se donne l' opérateur hyperbolique fuchsien de poids 0 ($M = R^n$):

$$P(t,x,t\partial_t+p,D_x) = (t\partial_t+p)^2 + t^2 \sum_{j=1}^n D^2_{x_j} + a(t,x)(t\partial_t+p) + + t\sum_{j=1}^n b_j(t,x)D_{x_j} + c(t,x) \quad ,$$

où $a,b_j,c \in C^\infty(R_t\times R^n_x)$, $p\in Z_+$. Soit $\gamma\in \mathbb{C}\setminus Z_+$, $Z(t,x,D_x) = \pm\, i\,|D_x|$ (la choix du signe $\pm$ n' a aucune importance), $L = t\partial_t + p - t\,Z - \gamma$ et Λ un opérateur elleptique invertible (Λ^{-1} désigne l' invers de Λ). On a :

$$P = I^2 + t^2((Z^2 + \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2)\Lambda^{-2})\Lambda^2 + 2\,t\,Z\,I + (2\gamma + a(t,x))\,I\, +$$

$$+\ t\left\{\left[(2\gamma + 1 + a(t,x))\,Z + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\,D_{x_j}\right]\Lambda^{-1}\right\}\Lambda$$

$$+\ a(t,x)\,\gamma + \gamma^2 + c(t,x)$$

Alors si l' on pose $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_1 = t\,\Lambda u$, $u_2 = I\,u$, $u_3 = u$, l' équation $Pu = f$ est équivalente mod C^∞ $(R_t \times R_x^n)$ au système

$$(2.5) \qquad t\,\partial_t\,\vec{u} = t \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ (Z^2 + \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2)\Lambda^{-1} & -Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \vec{u}\, +$$

$$+ \begin{bmatrix} +1-p & 0 & 0 \\ -\left[(2\gamma+1+a)Z + \sum_{j=1}^{n} b_j D_{x_j}\right]\Lambda^{-1} & -(\gamma+a)-p & -(a\gamma + \gamma^2 + c) \\ 0 & 1 & \gamma - p \end{bmatrix} \vec{u}\, +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

qui a la forme (2.4). On remarque que si p est assez grand, (2.5) vérifie la condition ii). Enfin il est évident que le symbole principal de A dans (2.5) est diagonalisable, de sorte qu' on obtient un système qui vérifie i), ii) en opérant avec des opd matriciels elliptiques d' ordre 0.

Dans le cas strictement hyperbolique, le procedé standard pour construire la parametrix d' un système est de le découpler à l' aide d' un opd elliptique d' ordre 0. Malheuresement on ne peut le découpler dans la région où $t|\xi|$ est grand. A ce but on a besoin des classes suivantes d' opd.

<u>Définition 1.</u> Soit $m,k \in R$. Par $S^{m,k}$ on dénote la classe des fonctions $a(t,x,\xi) \in C^\infty(R_t \times R_x^n \times R_\xi^n)$ telles que pour tout $\Omega \subset\subset R_t \times R_x^n$ et pour tout j, α, β, il existe une constante C telle que

$$\left| \partial_t^j \, \partial_x^\alpha \, \partial_\xi^\beta \; a(t,x,\xi) \right| \le C \;\; (1+|\xi|)^{m-|\beta|} \;\; (|t|+1/|\xi|)^{k-j} \; .$$

On pose $S^{-\infty,k} = \bigcap_m S^{m-k}$, $S^{m,\infty} = \bigcap_k S^{m,k}$.

Les classes $S^{m,k}$ sont liées aux classes introduites par Boutet de Monvel [2]. On désigne par $OPS^{m,k}$ la classe des opd A de la forme $A = a(t,x,D_x) + R$, où a $S^{m,k}$ et R est partiellement régularisant, c' est à dire

$$Rf(t,x) = \int r(t,x,y) \, f(t,y) \, dy \qquad , \; f \in C^\infty(R_t \; ; \; C_0^\infty(R^n)) \; ,$$

avec $r \in C^\infty(R_t \times R_x^n \times R_y^n)$.

Il est commode de travailler dans une sous-classe de $S^{m,k}$, qui a une structure bien adaptée a (2.4).

<u>Definition 2</u>. Soit $k \in R$. On désigne par $\$^k$ la classe des fonctions $\varphi(x,\xi';z) \in C^\infty(R_x^n \times S_{\xi'}^{n-1} \times R_z)$ telles que $\varphi(x,\xi';z) \sim \sum_{j \ge 0} \varphi_{-j}(x,\xi') z^{-j}$, pour certaines fonctions $\varphi_{-j}(x,\xi') \in C^\infty(R_x^n \times S^{n-1})$. On dénote

par $\Sigma^{m,k}$, $m,k\in R$ la classe des fonctions $a(t,x,\xi)\in C^\infty(R_t\times R^n_x\times R^n_\xi)$ telles que il existe $\hat{a}(x,\xi',z)\in \$^k$ pour laquelle $a(t,x,\xi) = |\xi|^{m-k}\,\hat{a}(x,\xi/|\xi|,t|\xi|)$. Encore, $\hat{\Sigma}^{m,k}$ indique l' espace de tous symboles $a\in S^{m,k}$ tels que $a - \sum_{j<M} a_j \in S^{m,k+M}$, pour une suite convenable de symboles $a_j\in\Sigma^{m,k+j}$ (on écrit $a\sim\sum_{j\geq 0} a_j$). Par $OP\Sigma^{m-k}$ on indique les opd A de la forme $A = a(t,x,D_x) + R$, $a\in\Sigma^{m,k}$ et R partiellement régularisant. Par $OP\hat{\Sigma}^{m,k}$ on indique les opd de la forme $A = a(t,x,D_x) + R + R'$, $a\in\hat{\Sigma}^{m,k}$, R partiellement régularisant et $R'\in OPS^{m,\infty}$.

On a alors la proposition suivante:

<u>Proposition 1</u>. Soit $\mathcal{S}$ le système (2.4). Alors ils existent deux matrices $N\times N$ d' opd, $Q\in OP\hat{\Sigma}^{0,0}$, $\tilde{B}\in OP\hat{\Sigma}^{0,0}$ qui ont les proprietés suivantes

i) Q est elliptique

ii) pour chaque $\omega\subset\subset R^n$ il existe $\delta = \delta(\omega)$ tel que le symbole $\tilde{b}(t,x,\xi)$ de $\tilde{B}$ est diagonal par blocs dans la région $\{|t||\xi|\geq\delta,\ (x,\xi')\in\omega\times S^{n-1}\}$.

En posant $\tilde{\mathcal{S}} = I_N\, t\,\partial_t - t\,A(t,x,D_x) - \tilde{B}(t,x,D_x)$, on a

(2.6) $\qquad \mathcal{S}\,Q = Q\,\tilde{\mathcal{S}}$ $\qquad$ mod. un opérateur partiellement régularisant.

En plus $\tilde{\mathcal{S}}$ vérifie encore les conditions i) et ii) du lemme 1.

Pour la parametrix de $\tilde{\mathcal{S}}$ on a besoin d' autres classes d' opd (voir [6]).

<u>Definition 3</u>. Soit $m,k\in R$. On dit qu' une fonction $a(\rho,t,x,\xi)\in C^\infty(]0,1]\times R_t\times R^n_x\times R^n_\xi)$ est dans la classe $HS^{m,k}$, si, pour chaque $\Omega\subset\subset R_t\times R^n_x$, j, p, α, β, $\varepsilon>0$, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\left|\rho^\varepsilon(\rho\partial_\rho)^p\,\partial_t^j\,\partial_x^\alpha\,\partial_\xi^\beta\, a(\rho,t,x,\xi)\right|\leq C\,(1+|\xi|)^{m-|\beta|}(|t|+1/|\xi|)^{k-j},$$

$(t,x)\in\Omega$, $\rho\in]0,1]$, $\xi\in R^n$.

De façon tout à fait analogue, c' est à dire en rajoutant le comportement en ρ , on définit les classes $H\Sigma^{m,k}$, $H\hat{\Sigma}^{m,k}$.

On dit aussi qu' un opérateur R est partiellement régularisant du type de Hardy si l' on a

$$(2.7)\quad Rf(t,x) = \int_0^1 \int r(\rho,t,x,y)\, f(\rho t,y)\, d\rho\, dy,$$

$$f\in C^\infty(R_t;\ C_0(R^n_x)) ,$$

où $r\in C^\infty(\,]0,1]\times R_t\times R^{2n}_{x,y})$ satisfait aux inegalités

$$\sup_{\substack{(x,y)\in \text{compact} \\ |t|\leq\delta,\ ]0,1]\ni\rho}} \left|\rho^{\varepsilon}(\rho\partial_\rho)^j \partial_t^p \partial_x^\alpha \partial_y^\beta\, r(\rho,t,x,y)\right| \leq \text{const.}$$

On dit que $A\in OPH\Sigma^{m,k}$ si $A = a(\rho,t,x,D_x) + R$, où R est partiellement régularisant du type de Hardy et

$$a(\rho,t,x,D_x)\, u(t,x) = \int_0^1 \int e^{ix\cdot\xi}\ a(\rho,t,x,\xi)\ \hat{u}(\rho t,\xi)\ d\rho\ đ\xi$$

$OPH\hat{\Sigma}^{m,k}$ est défini de façon analogue.

La parametrix à droite pour $\widetilde{\mathcal{S}}$ est donnée par la proposition suivante (des petites modifications sont nécessaires pour la parametrix à gauche).

<u>Proposition 2</u>. Soit $\varphi_j(t,s,x,\xi)\in C^\infty(R_t\times R_s\times R^n\times(R^n\setminus 0))$ la solution du pdC

$$(2.8)\quad \begin{cases} \partial_t\ \varphi_j(t,s,x,\xi) = \lambda_j(t,x,d_x\,\varphi_j(t,s,x,\xi)) \\ \varphi_j\big|_{t=s} = x\cdot\xi \end{cases} \quad , \ j=1,..,m$$

où les λ_j sont les racines hyperbolique de $\mathcal{P}$ (on suppose P tel que φ_j soit définie partout). Pour $\rho\in]0,1]$ posons:

$$(2.9)\qquad \psi_j(\rho,t,x,\xi) = \varphi_j(t,\rho t,x,\xi)\quad,\ j=1,\ldots,m,$$

$$e^{i\psi(\rho,t,x,\xi)} = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{i\psi_1} I_{N_1} & & \square \\ \hline & \ddots & \\ \hline \square & & e^{i\psi_m} I_{N_m} \end{array}\right]$$

Il existe alors une matrice h, $N\times N$, d' opd dans $H\hat{\Sigma}^{0,0}$, telle que, en posant

$$E(h,f) = \int_0^1\int e^{i\psi(\rho,t,x,\xi)} h(\rho,t,x,\xi)\,\hat{f}(\rho t,\xi)\,d\rho\,\bar{d}\xi\quad,$$

$$f\in C^\infty(R_t;\ C_0(R^n)),$$

on a

$$(2.10)\qquad \tilde{\mathcal{P}}E(h;\cdot) - id : C^\infty(R_t;\ \mathcal{E}'(R^n))^N \longrightarrow C^\infty(R_t\times R^n)^N .$$

En plus $E(h;\cdot)\ :\ \mathcal{E}'^N_r \longrightarrow \mathcal{D}'^N_r$ et

i) $\partial WF(E(h;f)) \subset \partial WF(f)$

ii) $WF(E(h;f)\big|_{\{t\neq 0\}}) \subset \{(t,x,\tau,\xi)\ |\ t\neq 0,\ (t,x,\tau,\xi)\in WF(f)\} \cup$

$$\bigcup_{j=1}^{m}\{(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi) \mid \exists\, s,\ \tfrac{s}{t}\in\,]0,1[,\ \exists (y,\eta)\in T^*R^n\setminus 0,$$

$$(s,y,\lambda_j(s,y,\eta),\eta)\in WF(f),\ (x,\xi) = \Phi_j^{t-s}(y,\eta)\} \cup$$

$$\bigcup_{j=1}^{m}\{(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi) \mid t\neq 0, \exists (y,\eta)\in T^*R^n\setminus 0,$$

$$(y,\eta)\in\partial WF(f),\ (x,\xi) = \Phi_j^{t}(y,\ \ )\ .$$

La proposition 2 permet de prouver l' existence et l' unicité d' une solution distribution régulière du pdC (1.4) ainsi que i) et ii) du théorème. Malheuresement, dès que notres classes d' opd ne sont pas microlocal en t près de t=0 on ne gagne pas une information précise sur t=0 en utilisant la structure de la parametrix. En fait la démonstration des points iii) e iv) du théorème répose sur l' analyse microlocale, près du fibré conormal à t=0, qui a été faite dans B.L.P. [3] .

3. Quelque conséquence. Le branchment des singularités.

Sous les hypothèses du point iv) du théorème, on peut voir aisement, en utilisant le théorème 3.1 de [3] , que les singularités des données de Cauchy se propagent lelong une au moins des demi-bi caractéristiques (c' est à dire $t<0$ ou $t>0$) correspondantes aux facteurs $\tau - \lambda_j(t,x,\xi)$, $j=1,..,m$. Dans ce qui suit on s' intéresse au pdC

$$(3.1)\qquad \begin{cases} Pu = f \in C^\infty(R\times M) \\ \partial_t^j u \;{}_{t=0} = g_j \in \mathcal{D}'(M),\ j=0,1,..,m-k-1, \end{cases}$$

où P est fuchsien hyperbolique de poids m-k.

On se propose de donner des conditions suffisantes qui assurent la propagation des singularités des données lelong une bicaractéristique entière ou lelong deux au moins bicaractéristiques différentes (branchement).

D' abord quelque notation; pour $(x,\xi)\in S^*M$, on désigne par $\rho_j(x,\xi)$ le point $(0,x,\lambda_j(0,x,\xi),\xi)\in \mathrm{Char}\ P$ et par $\gamma_j(x,\xi)$ la courbe bicaractéristique de $\tau-\lambda_j(t,x,\xi)$ sortante de $\rho_j(x,\xi)$; on note $\gamma_j^{\pm}(x,\xi)=\gamma_j(x,\xi)\cap\{\pm t>0\}$.

On aura aussi besoin de deux polynômes microlocaux :

$$(3.2)\quad I_j(x,\xi\,;\zeta)=D_\tau\,\sigma_m(P_m)(\rho_j(x,\xi)) + \sigma_{m-1}(P_{m-1})(\rho_j(x,\xi)),$$

$$j=1,..,m,\ \zeta\in\mathbb{C}$$

$$(3.3)\quad J_j(x,\xi\,;\zeta)=\sum_{\ell=0}^{k}\frac{1}{\ell!}(D_\tau^{\ell}\,\tilde{p}_{m+\ell-1,j})(\rho_j(x,\xi))\,\zeta(\zeta-1)\ldots$$

$$\ldots(\zeta-(\ell-1)),\ j=1,..,m,\ \zeta\in\mathbb{C},$$

où les $\tilde{p}_{m+\ell-1,j}$ sont les symboles principaux des opd $\tilde{P}_{m+\ell-1,j}\in OPS^{m-\ell-1}(R\times M)$ définis par la formule

$$(D_t-\lambda_j(t,x,D_x))^{k-1}\,P=\sum_{r=0}^{k} t^{k-r}\,\tilde{P}_{m+k-1-r,j}(t,x,D_t,D_x).$$

On a

<u>Proposition 3</u>. Soit $u\in\mathcal{D}'_r$ solution du pdC (3.1). Soit $(x,\xi)\in S^*M$ et $\lambda_1(0,x,\xi)<\ldots<\lambda_m(0,x,\xi)$. Alors :

1 - On suppose $\rho_1(x,\xi),\rho_m(x,\xi)\in WF(u)$ et $I_1(x,\xi\,;\zeta)\neq 0\neq I_m(x,\xi\,;\zeta)$, $\forall\,\zeta\in Z,\zeta\geq-(k-1)$. On suppose aussi que pour

chaque $j\in\{2,..,m-1\}$, une au moins des les deux demi-bicaractéristique $\gamma^{\pm}(x,\xi)$ ne rencontre pas le WF(u). On en deduit que

$$\gamma_1(x,\xi) \cup \gamma_m(x,\xi) \subset WF(u)$$

2 - Soit $m>2$ et $\rho_j(x,\xi)\in WF(u)$ pour un certain $j\in\{2,..,m-1\}$. On a

α) Si $J_j(x,\xi;\zeta)\neq 0 \ \forall\zeta\in Z, \zeta\geq -1$ alors $\gamma_j^+(x,\xi)\cup\gamma_j^-(x,\xi) \subset WF(u)$. En plus si une seulement des les deux demi-bicaractéristiques $\gamma_j^{\pm}(x,\xi)$ est contenue dans le WF(u), soit $\rho_{j-1}(x,\xi)$ soit $\rho_{j+1}(x,\xi)\in WF(u)$.

β) Si $J_j(x,\xi;\zeta)\neq 0 \ \forall\zeta\in Z, \zeta\geq -1$ et si $I_j(x,\xi;\zeta)\neq 0$ $\forall\zeta\in Z, \zeta\geq -(k-1)$, ou bien $\gamma_j^+(x,\xi)$ ou bien $\gamma_j^-(x,\xi)$ est contenue dans WF(u) <u>et</u> ou bien $\rho_{j-1}(x,\xi)$ ou bien $\rho_{j+1}(x,\xi)$ $\in WF(u)$.

<u>Example 1</u>. Soit P l' opérateur d' Euler - Poisson - Darboux

$$P(t,x,D_t,D_x) = t\,(D_t^2 - \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2) + \alpha(t,x)D_t + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t,x)D_{x_j} +$$

$$+ \gamma(t,x) ,$$

$(t,x)\in R\times R^n$, α, β_j, γ fonctions lisses. Supposons que $\zeta + i\,\alpha(0,x)\neq$ $\neq 0 \ \ \forall\zeta\in Z_+, \forall x$ (P vérifie la condition de Fuchs) et que $u\in\mathcal{D}'_r$ soit solution du pdC $Pu=0$ dans $R\times R^n$, $u\,|_{t=0} = g\in\mathcal{D}'(R^n)$. Alors

$$WF(u\,|_{\{t\neq 0\}}) = \bigcup_{(x,\xi)\in WF(g)} (\gamma_1(x,\xi)\cup\gamma_2(x,\xi))\,\Big|_{\{t\neq 0\}} .$$

Exemple 2. Soit $P(t,x,D_t,D_x) = t(D_t - D_x)D_t + \alpha(t,x)D_t$, $t,x \in R$, α lisse. Soit $I_p(x,\zeta) = \zeta + i\alpha(0,x) \neq 0$ $\forall \zeta \in Z_+$, $\forall x$, et $u \in \mathcal{D}'_r$ la solution du pdC $Pu = 0$ dans $R \times R$, $u|_{t=0} = g \in \mathcal{D}'(R)$. On a $u(t,x) = 1_t \otimes g(x)$, $WF(u) = \{(t,x,0,\xi) \mid (x,\xi) \in WF(g)\}$, tandis que $I_1(x,\xi;\zeta) \equiv 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S.Baouendi, C.Goulaouic :Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, C.P.A.M., 26 (1973), 455-475.

[2] L.Boutet de Monvel :Hypoelliptic operators with double characteristic and related pseudo-differential operators, C.P.A.M., 27 (1974), 585-639.

[3] A.Bove, J.E.Lewis, C.Parenti :Propagation of singularities for Fuchsian operators, Lecture Notes in Math., 984 (1983).

[4] ——— :Cauchy problem for Fuchsian Hyperbolic operators, à paraître.

[5] J.Chazarain :Reflection of C^∞ singularities ... Publ.R.I.M.S. Kyoto, 12 (suppl.) (1977), 39-52.

[6] N.Hanges :Parametrix and propagation of singularities... Indiana Univ. Math.J., 28 (1979), 86-97.

[7] M.Kashiwara, T.Oshima :Systems of differential equations with regular singularities..., Ann.Math., 106 (1977), 145-200.

[8] R.B.Melrose, J.Sjöstrand: Singularities of boundary value problems, I, C.P.A.M., 39 (1978), 593-617.

[9] T.Ôaku:A canonical form..., Invent.Math., 65 (1982), 491-515.

[10] H.Tahara:Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan.J.Math., 5 (1979), 245-347.

[11] ———:Singular hyperbolic systems I,II,III, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, 26 (1979), 213-238; 26 (1979), 391-412; 27 (1980), 465-507.

[12] ———:Singular hyperbolic systems IV, Japan.J.Math., 8 (1982) 297-308.