JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ALAIN BACHELOT

Problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques semi-linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A8_0>

PROBLEME DE CAUCHY POUR DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES SEMI - LINEAIRES

par A. BACHELOT

Introduction

On s'intéresse au problème de Cauchy pour le système de Dirac-Klein - Gordon (D. KG) et pour son approximation semi - relativiste, le système de Schrœdinger - Klein - Gordon (S. KG) :

$$(\text{D. KG}) \quad \begin{cases} (-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + M)\psi = F(\psi,\varphi) \\ (\Box + m^2)\varphi = G(\psi,\varphi) \end{cases}$$

$$(\text{S. KG}) \quad \begin{cases} i\psi_t + \Delta_x\psi = F(\psi,\varphi) \\ (\Box + m^2)\varphi = G(\psi,\varphi) \end{cases}$$

Un exemple important de couplage est l'interaction de Yukawa (Y) :

$$(\text{Y}) \quad \begin{cases} F(\psi,\varphi) = \varphi.\psi \\ G(\psi,\varphi) = -\bar{\psi}.\psi \end{cases}$$

Dans le cas où l'interaction (F,G) est polynomiale on résoud facilement le problème de Cauchy local dans $C^o(o,T;H^s(\mathbb{R}^n))$ pour $s>\frac{n}{2}$; si de plus les valuations de F et G sont assez élevées on peut résoudre le problème global par la théorie du scattering, pour des données initiales petites et régulières (voir par exemple [3], [9]). On considère ici des interactions de type quadratique généralisant (Y). On résoud le problème local pour (D. KG) pour des données peu régulières, si bien que la non linéarité $F(\psi,\varphi)$ n'est plus lipschitzienne et que les méthodes classiques de point fixe ne s'appliquent pas. Enfin on résoud le problème global pour (S. KG), en particulier dans le cas où il n'existe pas d'énergie conservée (voir [1]).

I SYSTEME DE DIRAC - KLEIN GORDON.

Le problème global en dimension n = 1 est résolu dans [3] ; pour n = 3 le problème est ouvert (voir cependant [4]). Le problème de Cauchy local à données peu régulières pour le système de Dirac - Maxwell a été résolu par Gross [5] :

$$\text{(D.M.)}\quad \begin{cases} (-i\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} + M)\Psi = g\,A_{\mu}\,\gamma_{\mu}\Psi \\ -\Box A_{\mu} = g\,\Psi^{+}\,\gamma^{o}\,\gamma^{\mu}\Psi \end{cases}$$

On étendra ce résultat à une classe plus vaste d'interaction. On fait les hypothèses suivantes sur le couplage de (D.KG) :

$$\text{(H)}\quad \begin{aligned} F(\Psi,\varphi) &= f(\varphi).\Psi \\ G(\Psi,\varphi) &= g_o(\Psi)\; g_1(\varphi) + \Psi.\,h(\Psi) \end{aligned}$$

Où f, g_o, g_1, h sont des fonctions C^1, de dérivées L^{∞}, nulles en 0, f étant réelle.

Théorème 1. Soient $\Psi_o \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_o \in H^{3/2}(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_1 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$. *Alors le système* (D.KG) *admet une unique solution* (Ψ,φ) *pour* $T > 0$ *assez petit, vérifiant*

$$\Psi \in C^o(o,T;H^1(\mathbb{R}^3)),\quad \varphi \in C^o(o,T;H^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(o,T;H^{1/2}(\mathbb{R}^3)).$$

$$\Psi(o,.) = \Psi_o(.),\quad \varphi(o,.) = \varphi_o(.),\quad \varphi_t(o,.) = \varphi_1(.)$$

On remarque que l'interaction $F(\Psi,\varphi)$ est au mieux $H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ ($\varepsilon > 0$) alors que $\Psi_{(t)} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Ce paradoxe sera levé en notant le caractère linéaire en Ψ du système de Dirac avec potentiel $f(\varphi)$.

Idée de la preuve On utilise principalement les théorèmes de Kato-Rellich et Kato-Yoshida (voir [10]) et le lemme de produit dans les espaces de Sobolev :

Lemme Soient $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $v \in H^t(\mathbb{R}^n)$; *Alors* $u.v \in H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *pour* s,t,σ *satisfaisant a) ou b) :*

a) $0 \leqslant s + t, \quad \sigma = s \wedge t \wedge (s + t - \frac{n}{2} - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon$

b) $0 < s + t, \quad s \neq \frac{n}{2}, \quad t \neq \frac{n}{2}, \quad \sigma = s \wedge t \wedge (s + t - \frac{n}{2}).$

On résoud alors la suite de problèmes linéaires :

$$(-i\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} + M - f(\varphi^{n-1}))\,\Psi^{n} = 0$$

$$(\Box + m^2)\,\varphi^{n} = G(\Psi^{n+1}, \varphi^{n-1})$$

La norme de Ψ^{n} dans $C^o(o,T;H^1(\mathbb{R}^3))$ est estimée avec la norme de φ^{n-1} dans $C^o(o,T;H^{3/2}(\mathbb{R}^3))$, $C^1(o,T;H^{1/2}(\mathbb{R}^3))$ qui est estimée à son tour par la norme de Ψ^{n-2} dans $C^o(o,T;H^1(\mathbb{R}^3))$.

On obtient ainsi une estimation a priori qui permet de passer à la limite.

On obtient un résultat analogue pour le système (D.M) et un couplage du type

$$(\Psi f(A_{\mu}),\; g_o(\Psi)\; g_1(A_{\mu}) + \Psi h(\Psi)).$$

II SYSTEME DE SCHROEDINGER - KLEIN - GORDON

(S.KG) avec couplage de Yukawa a été résolu globalement dans $C^o(\mathbb{R},H^2(\mathbb{R}^3)$ par Baillon et Chadam en utilisant la conservation de l'énergie [2] ; (le problème de Dirichlet est étudié dans [6]). On montre ici que la conservation de la charge de ψ et les estimations $L^{4/3} - L^4$ et $L^2 - L^2$ des propagateurs $S_{(t)}$ et $R_{(t)}$ de Schroedinger et Klein - Gordon, permettent d'établir l'existence de solutions globales pour des systèmes sans énergie conservée. On rappelle les estimations $L^p - L^{p'}$ (voir [8] et [10])

(1) $$\| S_{(t)}\cdot\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\,|t|^{-3/4}\,\|\cdot\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)}$$

(2) $$\| R_{(t)}\cdot\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\,|t|^{-1/2}\,\|\cdot\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)}$$

On suppose que l'interaction (F,G) satisfait l'hypothèse (H') :

(H') $$\begin{cases} F(\psi,\varphi) = \psi\, f(\varphi) \\ G(\psi,\varphi) = g_o(\psi)\; g_1(\varphi) + \psi\, h(\psi) \end{cases}$$

Où f,g_o,g_1,h sont des fonctions uniformément lipschitziennes, nulles en 0, f étant réelle.

Les estimations (1) - (2) montrent que l'interaction est lipschitzienne dans $C^o(o,T,L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. On en déduit que si ψ_o et φ_o sont respectivement des solutions de l'équation de Schroedinger et de l'équation de Klein - Gordon dans $C^o(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$, alors pour T assez petit le système (S.KG) admet une unique solution ψ, φ dans $C^o(o,T,L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ de mêmes données initiales que ψ_o et φ_o ; mais comme $S_{(t)}$ et $\frac{dR}{dt}(t)$ n'opèrent pas dans $L^4(\mathbb{R}^3)$, on ne peut a priori prolonger la solution. On résoud alors la suite de problèmes linéaires :

$$i\,\psi^n_t + (\Delta_x - f(\varphi^{n-1}))\,\psi^n = 0$$

$$\square\,\varphi^n + m^2\,\varphi^n = G(\psi^{n-1},\varphi^{n-1})$$

L'équation de Schroedinger avec potentiel est résolue par régularisation des données et le théorème de Kato - Yoshida. De plus la charge de ψ^n est conservée :

(3) $$\|\psi^n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\psi_o(o)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Les estimations (1)-(2)-(3) permettent de montrer la convergence de ψ^n et φ^n dans $C^o(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ vers la solution ψ, φ, (voir [1]) :

Théorème 2 *Soient* ψ_o *et* φ_o *solutions respectivement de l'équation de Schroedinger et de l'équation de Klein - Gordon dans* $C^o(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. *Alors il existe une unique solution* ψ, φ *de (S.KG) dans* $C^o(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ *vérifiant*

$$\psi(o,.) = \psi_o(.), \quad \varphi(o,.) = \varphi_o(.), \quad \varphi_t(o,.) = \varphi_1(.)$$

De plus si $\psi_o, \varphi_o \in C^o(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1/4}(\mathbb{R}^3))$ *et si* f, g_o, g_1, h *sont* C^1 *alors* $\psi, \varphi \in C^o(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1/4}(\mathbb{R}^3))$.

On obtient un résultat analogue pour les sytèmes de Schroedinger - Schroedinger (voir [1], [7]). Dans le cas de l'interaction de Yukawa on généralise le résultat de [2] en montrant la convergence de ψ^n et φ^n dans $C^o(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$, obtenue par le théorème d'Ascoli et la conservation de l'énergie démontrée par l'invariance du système par conjugaison et renversement du temps:

Théorème 3. *Soient* $\psi_o \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_o \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, φ_o *et* φ_1 *étant réelles. Le système (S.KG) couplé par (Y) admet une unique solution* (ψ, φ) *vérifiant :*

$$\psi \in C^o(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)), \qquad \varphi \in C^o(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$$
$$\psi(o,.) = \psi_o(.), \qquad \varphi(o,.) = \varphi_o(.), \qquad \varphi_t(o,.) = \varphi_1(.)$$

De plus on a

$$\int (|\nabla \psi_{(t)}|^2 + \tfrac{1}{2}(|\nabla \varphi(t)|^2 + |\varphi_t(t)|^2 + m^2 |\varphi(t)|^2) + |\psi(t)|^2 \varphi(t))\, dx$$
$$= cste$$

Remarquer que l'on obteint une solution $\psi_{(t)} \in H^1$ alors que le second membre $\psi_{(t)} \varphi_{(t)} \in H^{1/2}$.

---

[1] A. BACHELOT Problèmes de Cauchy pour des systèmes de Klein - Gordon Schroedinger. A paraître in C.R. Acad. Sci. Paris.

[2] J.B. BAILLON, J.M. CHADAM, in contempary developments in continnum mechanics ;G.M. de la Penha ; L.A. Medeiros (eds) North Holland Publishing Company (1978).

[3] J. CHADAM, J.Applic. Anal. 3 (1973), 377-402.

[4] J. CHADAM, R. GLASSEY, Arch. Rat. Mech. Anal. 54 (1974), 223-237.

[5] L. GROSS Comm. Pure. and Appl. Math. 19(1966) 1 - 15.

[6] I. FUKUDA, M. TSUTSUMI, Jour. Math. Anal. Appl. 66(1978), 358 - 378.

[7] E. J. HOLDER, Indiance Univ. Math. J. 30(1981) 653 - 673.

[8] B. MARSHALL, W. STRAUSS, S. WAINGER, J. Math. pure et appl. 59(1980) 417 - 440.

[9] M. REED, Lectures Notes in Math. 507(1976).

[10] M. REED, B. SIMON, Fourier Analysis self - adjointness ; Academic Press, (1977), New York.