Journées Équations aux dérivées partielles

François Trèves

Sur l'exactitude des complexes différentiels de type de Lewy

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A3_0>

Conférence n° 3

SUR L'EXACTITUDE DES COMPLEXES DIFFERENTIELS DE TYPE DE LEWY

par François TREVES

1 - LE COMPLEXE DIFFERENTIEL DE LEWY -

Ce que nous appellons ici système de Lewy est le système de champs de vecteurs suivants, dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ (où les coordonnées seront $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,s$; nous écrirons $z_j = x_j + iy_j$) :

(1) $$L_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - i\varepsilon_j z_j \frac{\partial}{\partial s}, \quad j = 1,\ldots,n .$$

Ici, et dans toute la suite, $\varepsilon_j = +1$ ou -1. La forme quadratique

(2) $$Q(z) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j |z_j|^2$$

est la forme de Levi du système (1). On introduit

(3) $$w = s + iQ(z)$$

et on remarque que les champs vectoriels (1) sont caractérisés par les relations

(4) $$L_j z_k = L_j w = 0, \quad L_j \bar{z}_k = \delta_{jk}$$

(δ_{jk} = indice de Kronecker ; $j,k = 1,\ldots,n$).

En outre, l'application

$$(x,y,s) \longmapsto (z,\bar{z},w,\bar{w})$$

avec $w = s+it$, et $t = Q(z)$ (voir (3)) définit un difféomorphisme (analytique) de $\mathbb{R}^{2n+1}$ sur l'hyperquadrique $t = Q(z)$ de $\mathbb{R}^{2(n+1)} \cong \mathbb{C}^{n+1}$, difféomorphisme qui transforme le système de Lewy en le système tangentiel de Cauchy-Riemann sur la dite hyperquadrique.

Nous ferons varier $z=(z_1,\dots,z_n)$ dans le polydisque unité $\Delta=\{z\in\mathbb{C}^n\ ;\ |z_j|<1,\ j=1,\dots,n\}$ et s dans l'intervalle ouvert $\mathfrak{J}=]-1,1[$. En fait, on peut faire varier les rayons des disques, et de cet intervalle de façon arbitraire, et ce que nous allons dire reste valable. On s'intéressera aux formes différentielles de bidegré (0,p) :

$$(5)\qquad f=\sum_{|J|=p} f_J(x,y,z)\, d\bar z_J\ ,$$

où $J=(j_1,\dots,j_p)$ (et donc $p=|J|$) avec $1\leqslant j_1<\dots<j_p\leqslant n$ et $d\bar z_J=d\bar z_{j_1}\wedge\dots\wedge d\bar z_{j_p}$. Les coefficients des formes (5) seront des fonctions C^∞ dans le produit fermé $\bar\Delta\times\bar{\mathfrak{J}}$, ce que nous exprimerons en écrivant $f\in\mathcal{E}^p$. On pose alors

$$(6)\qquad Lf=\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{|J|=p} L_k f_J\, d\bar z_k\wedge d\bar z_J\ .$$

Il est clair que ceci définit un opérateur différentiel

$$(7)\qquad L:\mathcal{E}^{p-1}\longrightarrow\mathcal{E}^p\ ,\quad p=1,\dots,n$$

(on rappelle que $\mathcal{E}^{n+1}=\{0\}$), et en fait un complexe différentiel puisque $L^2=0$. Nous l'appellerons le complexe différentiel de Lewy.

La cohomologie du complexe (7) dépend de l'indice de la forme de Levi (2), c'est-à-dire du nombre de ses valeurs propres négatives. Supposons qu'il y ait n-q valeurs propres positives, et q négatives. Pour plus de précisions appelons $L^{(p-1)}$ l'opérateur (7), et posons, pour $p=1,\dots,n$,

$$H_L^p=\operatorname{Ker} L^{(p)}/\operatorname{Im} L^{(p-1)}\ .$$

Alors, toujours pour $p=1,\dots,n$,

$$(8)\qquad \begin{cases} H_L^p=\{0\} & \text{si}\ \ p\neq q,\ \ p\neq n-q\ ;\\[2mm] \dim H_L^p=+\infty & \text{si}\ \ p=q\ \ \underline{\text{ou bien}}\ \ p=n-q\ .\end{cases}$$

Les cas $q=0$, $q=n$ sont appelés fortement pseudo convexes. Dans ces cas

$$\dim H_L^n = +\infty .$$

A noter que si on définit (comme on le fait d'habitude)

$$H_L^0 = \operatorname{Ker} L^{(0)} , \tag{9}$$

cet espace est de dimension infinie quel que soit l'indice q de la forme de levi : c'est l'espace des fonctions CR dans $\Delta \times \mathfrak{I}$. Donc, dans (8), on suppose bien $p \geqslant 1$.

On voudrait esquisser ici une démonstration élémentaire de ce résultat bien connu - démonstration qui semble bien se généraliser aux structures CR de classe C^∞, localement plongeables et dont la forme de Levi n'est pas dégénérée. J'ignore si le résultat est connu dans le cas C^∞. Dans le cas analytique, j'ai démontré un résultat plus général (c'est-à-dire valable pour toute structure hypo-analytique - et non seulement CR - dont la forme de Levi est non dégénérée) dans [1]. Dans ces diverses généralisations on s'intéresse à l'exactitude locale (c'est-à-dire dans les faisceaux de germes de (0,p)-formes), et non l'exactitude globale ou semi-globale, comme nous le faisons ici pour le complexe de Lewy.

Pour les besoins de la suite, explicitons la propriété que la forme (5) soit L-fermée, c'est-à-dire Lf = 0 :

$$\sum_{k,J} \varepsilon_K^{kJ} L_k f_J = 0 , \quad |K| = p+1 , \tag{10}$$

et aussi la propriété - plus forte - qu'il y ait une (0,p-1)-forme u (d'expression semblable à (5)) telle que Lu = f :

$$\sum_{j,H} \varepsilon_J^{jH} L_j u_H = f_J , \quad |J| = p . \tag{11}$$

Dans (10) la sommation s'effectue sur les paires (k,J), $1 \leqslant k \leqslant n$, $|J| = p$, telles que $K = \{k\} \cup J$ en tant qu'ensembles non ordonnés ; et $\varepsilon_K^{kJ} = +1$ ou -1 selon la parité de la permutation qui transforme $\{k\} \cup J$ en l'ensemble ordonné

K. Dans (11) la sommation s'effectue sur les paires (j,H), $1 \leqslant j \leqslant n$, $|H| = p-1$ et $J = \{j\} \cup H$ au sens non ordonné.

2 - TRANSFORMATION DU COMPLEXE DE LEWY -

Appelons I l'intervalle ouvert $]0,1[$ et posons, pour $r \in I^n$,

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ |z_j| = \sqrt{r_j}, \quad j = 1,\dots,n\} ,$$

et soit une fonction C^∞ $\varphi(z,s)$ dans un voisinage de $\gamma(r) \times \mathfrak{J}$. Posons

$$(12) \qquad \hat{\varphi}(r,s) = (2i\pi)^{-n} \int_{\gamma(r)} \varphi(z,s)dz$$

$(dz = dz_1 \dots dz_n)$. Ecrivons $z_j = \sqrt{r_j}\, \exp(i\theta_j)$ lorsque $z = (z_1,\dots,z_n) \in \gamma(r)$; et $z'_{j\theta_j} = \partial z_j / \partial \theta_j = iz_j$, $z'_{jr_j} = \partial z_j / \partial r_j = z_j / 2r_j$. On a évidemment

$$(13) \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial s} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^{\wedge} .$$

Posons $\Delta_j = (z'_{1\theta_1},\dots,z'_{n\theta_n}) / z'_{j\theta_j}$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial r_j} [(2i\pi)^n \hat{\varphi}] = \int_{T^n} [(\varphi_{z_j} z'_{jr_j} + \varphi_{\bar{z}_j} \bar{z}'_{jr_j}) z'_{j\theta_j} + \varphi\, z''_{j\theta_j r_j}] \Delta_j d\theta$$

$$= \int_{T^n} [(\varphi_{z_j} z'_{j\theta_j} + \varphi_{\bar{z}_j} \bar{z}'_{j\theta_j}) z'_{jr_j} + \varphi\, z''_{j\theta_j r_j}] \Delta_j d\theta$$

$$+ \int_{T^n} \varphi_{\bar{z}} \frac{D(z_j,\bar{z}_j)}{D(\theta_j,r_j)} \Delta_j d\theta .$$

Mais $\dfrac{D(z_j,\bar{z}_j)}{D(\theta_j,r_j)} = i$ et

$$\int_0^{2\pi} [(\varphi_{z_j} z'_{j\theta_j} + \varphi_{\bar{z}_j} \bar{z}'_{j\theta_j}) z'_{jr_j} + \varphi\, z''_{j\theta_j r_j}] \, d\theta_j = \int_0^{2\pi} (\varphi_z z'_{jr_j})_{\theta_j} d\theta_j = 0 .$$

Donc

$$(14) \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r_j} = i(2i\pi)^{-n} \int_{T^n} \varphi_{\bar{z}_j} \Delta_j \, d\theta .$$

Puisque

(15) $$dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = i\, z_j\, \Delta_j\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$$

sur $\gamma(r)$, on a, d'après (13) et (14) :

(16) $$N_j \hat{\varphi} = i(2i\pi)^{-n} \int_{T^n} L_j\varphi\ \Delta_j\, d\theta\ .$$

En utilisant une fois de plus (21) on obtient

(17) $$N_j \hat{\varphi} = \left(\frac{1}{z_j} L_j \varphi\right)^{\wedge}\ .$$

On remarquera que l'intégrale, dans le membre de droite de (16) ou (17), n'"explose" pas lorsque $r_j = |z_j|^2 \longrightarrow 0$. Nous appliquerons (17) après une légère modification. Posons :

(18) $$\tilde{\varphi}(r,s,\zeta) = (2i\pi)^{-n} \int_{\gamma(r)} \varphi(z,s)\ \frac{dz_1 \ldots dz_n}{(z_1-\zeta_1)\ldots(z_n-\zeta_n)}\ .$$

Cette fonction $\tilde{\varphi}$ est continue, et holomorphe par rapport à ζ , dans la région

(19) $$(r,s,\zeta) \in I^n \times \mathfrak{J} \times \mathbb{C}^n\ ; \qquad |\zeta_j|^2 \neq r_j\ ,\quad j = 1,\ldots,n\ .$$

Si on note que

$$L_j\left(\frac{\varphi}{z_j-\zeta_k}\right) = \frac{1}{z_k-\zeta_k} L_j\varphi$$

on déduit de (17) :

(20) $$N_j \tilde{\varphi} = \left(\frac{1}{z_j} L_j \varphi\right)^{\sim}\ .$$

On va maintenant appliquer cette transformation aux relations (10) et (11). Pour cela on divise l'équation dans (10) par $z_K = z_{k_1} \ldots z_{k_{p+1}}$. On trouve :

(21) $$\sum_{k,J} \varepsilon_K^{kJ} \frac{1}{z_k} L_k(f_J/z_J) = 0\ , \qquad |K| = p+1\ ,$$

qui se transforme, grâce à (20), en

$$\sum_{k,J} \varepsilon_K^{kJ} N_k(f_J/z_J)^{\sim} = 0 . \tag{22}$$

De même, l'équation (11) se réécrit

$$\sum_{j,H} \varepsilon_J^{jH} \frac{1}{z_j} L_j(u_H/z_H) = f_J/z_J , \tag{23}$$

qui se transforme en

$$\sum_{j,H} \varepsilon_J^{jH} N_j(u_H/z_H)^{\sim} = (f_J/z_J)^{\sim} . \tag{24}$$

A partir de ceci, la stratégie est la suivante : on se donne une p-forme f, (5), satisfaisant à (21) ; on calcule les intégrales $(f_J/z_J)^{\sim}$, qui sont bien définies, même lorsque les nombres r_j tendent vers 0, et qui satisfont à (22). On essaie alors de résoudre les équations (pour chaque J de longueur p)

$$\sum_{j,H} \varepsilon_J^{jH} N_j \tilde{v}_H = (f_J/z_J)^{\sim} . \tag{25}$$

En principe il faut retrouver u_H à partir de v_H. Mais ici deux problèmes se posent :

1°) Si $\tilde{v}_H = (u_H/z_H)^{\sim}$ il faut que l'on ait

$$|\tilde{v}_H| < \text{const.}(r_{H^{\#}})^{1/2} , \tag{26}$$

où $H^{\#}$ est le complémentaire de l'ensemble H par rapport à l'intervalle entier $[1,\dots,n]$;

2°) en admettant que (26) soit vérifiée, il faut démontrer qu'il existe une fonction $v_H(z,s)$ dans $\Delta \times \mathfrak{J}$ telle que $\tilde{v}_H$ ait la signification (18) ; si c'est le cas, on posera $u_H = z_H v_H$.

La question 2°) est évidemment celle de l'inversion de la transformation (18). Supposons d'abord $r_j \neq 0$ pour tout j. On sait (voir cidessous), que si φ est suffisamment régulière (resp., C^∞), alors $\tilde{\varphi}$ est elle-aussi régulière, au moins continue (resp., C^∞) y compris jusqu'à la frontière de chacun des ensembles

$$(27) \qquad (r,s,\zeta) \in I^n \times \mathfrak{J} \times \mathbb{C}^n \; ; \quad |\zeta_j|^2 \lesseqgtr r_j, \quad j=1,\dots,n,$$

où l'on fait un choix arbitraire de > ou < suivant les valeurs de j. Ceci définit évidemment des valeurs au bord sur les "polycirconférences" $|\zeta_j| = \sqrt{r_j}$ $(j = 1,\dots,n)$, qui peuvent s'écrire comme séries de Fourier

$$(28) \qquad \sum_{m \in \mathfrak{Q}} c_m(r,s)e^{im.\theta} \quad (m.\theta = m_1\theta_1 +\dots+ m_n\theta_n),$$

où $\mathfrak{Q}$ est un "hyperquadrant" $\mathbb{Z}_\pm \times\dots\times \mathbb{Z}_\pm$ avec un choix de + ou - correspondant au choix < ou > dans (27). En faisant la somme des séries (28), après avoir multiplié chacune d'entre elle par +1 ou -1 selon que le nombre de facteurs $\mathbb{Z}_-$ dans $\mathfrak{Q}$ est pair ou impair, on obtient le développement en série de Fourier de $\varphi(z,s)$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^n \; ; \; |z_j| = \sqrt{r_j}, \; j=1,\dots n\}$. Il suffit de faire varier les r_j pour déterminer φ, du moins dans la région

$$\{(z,s) \in \Delta \times \mathfrak{J} \; ; \; |z_1| > 0 ,\dots, |z_n| > 0\}.$$

Il reste à examiner ce qui se passe lorsque un, ou bien plusieurs, des r_j tend vers 0. Pour voir cela, il suffit d'examiner le cas $n=1$. Posons

$$c_m(\varphi ; r,s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r^{1/2} e^{i\theta},s)e^{im\theta} \, d\theta \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

En supposant que φ est de classe C^2, nous pouvons intégrer par parties par rapport à θ, obtenant ainsi, lorsque $m \neq 0$,

$$(29) \qquad c_m(\varphi; r,s) = -\frac{\sqrt{r}}{m}[c_{m+1}(\varphi_z ; r,s) - c_{m-1}(\varphi_{\bar{z}} ; r,z)] ,$$

et en répétant cette opération lorsque $|m| \geqslant 2$,

$$(30) \qquad |c_m(\varphi; r,s)| \leqslant \text{const}.r/m^2 .$$

Prenons alors $\zeta = (1+\varepsilon)\sqrt{r}\, e^{i\theta}$; on a :

$$\tilde{\varphi}(r,s,\zeta) = - \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}(\varphi;\, r,s)(1+\varepsilon)^{-m}\, e^{im\theta} ,$$

alors que si $\zeta = (1-\varepsilon)\sqrt{r}\ e^{i\theta}$,

$$\tilde{\varphi}(r,s,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\varphi;\, r,s)(1-\varepsilon)^m\, e^{im\theta} .$$

En appliquant (29) lorsque $|m| = 1$, et (30) lorsque $|m| \geqslant 2$, on voit que, si r et ε tendent vers zéro, $\tilde{\varphi}(r,s,\zeta)$ tend vers $\varphi(0,s)$.

Revenons au cas $n \geqslant 1$ général. Il est maintenant clair (comme nous l'avons dit plus haut) que si on impose une condition de régularité appropriée (C^∞ si on veut que φ soit C^∞), dans les ensembles (27), jusqu'à la frontière (ce qui veut aussi dire sur les "faces" où l'un ou plusieurs des r_j s'annulent), on peut reconstruire $\varphi(z,s)$. Par exemple, si on veut déterminer φ lorsque

$$|z_1| = \dots = |z_{n'}| = 0, \quad |z_{n'+1}| > 0 , \dots , |z_n| > 0$$

$(1 \leqslant n' \leqslant n)$, il suffit de refaire le raisonnement plus haut avec $\tilde{\varphi}(0,\dots,0,r_{n'+1},\dots,r_n,s,\zeta)$ à la place de $\tilde{\varphi}(r,s,\zeta)$.

Ainsi nous sommes ramenés à résoudre les équations (24), sous les conditions de compatibilité (22) - dans les divers "quadrants" (27), et de manière à ce que les solutions trouvées satisfassent à (26). Dans la section suivante, nous discutons rapidement un exemple simple, celui où $n = 2$ et $p = 1$, qui est assez révélateur.

3 - UN EXEMPLE -

Nous allons décrire maintenant la résolubilité des équations (24) - sous les conditions de compatibilité (28), lorsque $n = 2$ et $p = 1$. On a, soit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$ (cas fortement pseudoconvexe), soit $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$, cas que nous appellerons hyperbolique. Les autres cas se ramènent à ceux-ci par la symétrie $s \longrightarrow -s$. Dans tous les cas nous poserons

$$r = r_1 + r_2, \quad r' = r_1 - r_2 .$$

Considérons là une forme dans $(]0,1[)^2 \times]-1,-1[$,

(31) $\qquad F_1(r_1,r_2,s)dr_1 + F_2(r_1,r_2,s)dr_2$,

qui vérifie

(32) $\qquad N_2F_1 = N_1F_2 \qquad (N_j = \frac{\partial}{\partial r_j} - i\varepsilon_j \frac{\partial}{\partial s})$,

où $F_j = (f_j/z_j)^{\sim}$ (voir (24)), et donc satisfait aussi

(33) $\qquad |F_1| \lesssim \text{const.}\sqrt{r_2} \ , \qquad |F_2| \lesssim \text{const.}\sqrt{r_1}$.

On cherche une solution v du système d'équations

(34) $\qquad N_jv = F_j \ , \qquad j = 1,2$,

qui vérifie

(35) $\qquad |v| \lesssim \text{const.}\ \sqrt{r_1r_2}$.

Il est utile de poser

$$F = (F_1 + F_2)/2 \ , \qquad G = (F_1 - F_2)/2 \ ,$$

ce qui équivaut à réécrire la forme différentielle (31) de la façon suivante :

(36) $\qquad F\,dr + G\,dr'$.

Les conditions aux limites (33) s'écrivent

(37) $\qquad |F+G| \lesssim \text{const.}\ \sqrt{r_2}$,

(38) $\qquad |F-G| \lesssim \text{const.}\ \sqrt{r_1}$.

Il nous faudra raisonner dans trois "quadrants" :

Région (I) $\quad : \{ \zeta \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |\zeta_j| > r_j \ , \ j = 1,2 \}$, Région (II_1) : $\{\zeta \in \mathbb{C}^2 \; ; \quad |\zeta_1| > r_1\}$,

Région (II_2) : $\{\zeta \in \mathbb{C}^2 \; ; \quad |\zeta_2| > r_2\}$.

Dans la région (I), la paire (F,G) doit vérifier toutes les deux conditions (37-38), alors qu'elle doit seulement vérifier la condition (38) dans la région (II_1), et seulement (37) dans (II_2).

<u>Cas fortement pseudoconvexe</u>

On doit résoudre

(39) $$v_r - iv_s = F ,$$

(40) $$v_{r'} = G .$$

Les conditions de compatibilité sont

(41) $$G_r - iG_s = F_{r'} .$$

Dans les régions (I) et (II_1), on prend

$$v(r,r',s) = \int_{-r}^{r'} G(r,\rho',s)d\rho' ,$$

qui vérifie évidemment (40). En ce qui concerne (39), on remarque que

$$\begin{aligned} v_r - iv_s &= \int_{-r}^{r'} (G_r - iG_s)d\rho' + G|_{r'=-r} \\ &= \int_{-r}^{r'} F_{\rho'}d\rho' + G|_{r'=-r} \\ &= F - (F-G)|_{r'=-r} = F , \end{aligned}$$

d'après (38), et puisque $r' = -r$ équivaut à $r_1 = 0$. En outre, $v|_{r'=-r}$ et donc, puisque G est bornée,

(42) $$|v| \leqslant \text{const. } r_1 .$$

Ceci répond à la question dans la région (II_1). Dans la région (I) on a, de plus,

$$(\partial_r - i\partial_s)(v|_{r'=r}) = (\partial_r - i\partial_s)\ [\int_{-r}^{r} G(r,\rho',s)d\rho']$$

$$= G|_{r'=r} + G|_{r'=-r} + \int_{-r}^{r} (G_r - iG_s)d\rho'$$

$$= G|_{r'=r} + G|_{r'=-r} + \int_{-r}^{r} F_{\rho'}\ d\rho'$$

$$= (F+G)|_{r'=r} - (F-G)|_{r'=-r} = 0\ .$$

Mais puisque $v|_{r'=r=0} = 0$, on conclut que $v|_{r'=r} = 0$, c'est-à-dire

(43) $\qquad |v| \leqslant \text{const. } r_2\ .$

En multipliant (42) et (43) on obtient bien

(44) $\qquad |v| \leqslant \text{const. } \sqrt{r_1 r_2}\ .$

Dans la région (II_2) la fonction

(45) $\qquad v(r,r',s) = -\int_{r'}^{r} G(r,\rho',s)d\rho'$

satisfait à (39)-(40) et vérifie

(46) $\qquad |v| \leqslant \text{const. } r_2\ ,$

ce qui démontre ce qu'on voulait.

Cas hyperbolique

Ici on doit résoudre

(47) $\qquad v_r = F\ ,$

(48) $\qquad v'_r - iv_s = G\ ,$

et les conditions de compatibilité sont

$$(49) \qquad F_{r'} - iF_s = G_r \ .$$

Dans la région (I) on peut prendre

$$(50) \qquad v = \int_{|r'|}^{r} F(\rho,r',s)d\rho \ .$$

On laisse au lecteur le soin de montrer que, sous les hypothèses (37), (38) et (49), v vérifie bien (47), (48), et aussi (42) et (43), et donc (44).

Dans la région (II_1), si $r_1 < r_2$, c'est-à-dire $r' < 0$, on prend

$$(51) \qquad v = \int_{-r'}^{r} F(\rho,r',s)d\rho \ ,$$

qui vérifie en effet (47) et (48), et aussi (42). Dans la région $r' > 0$ on doit prendre

$$(52) \qquad v = \int_{r'}^{r} F(\rho,r',s)d\rho + C(r',s) \ .$$

Pour que v soit continue à la diagonale $r_1 = r_2$, c'est-à-dire lorsque $r' = 0$, on doit avoir

$$(53) \qquad C(0,s) \equiv 0 \ .$$

D'autre part, si l'on veut que v satisfasse à (48), on doit avoir

$$(\partial_{r'} - i\partial_s) \int_{r'}^{r} F(\rho,r',s)d\rho = (\partial_{r'} - i\partial_s)(v - C)$$

$$\int_{r'}^{r} G\rho \ d\rho - F\big|_{r=r'} = G - (F+G)\big|_{r=r'} \ ,$$

et par conséquent,

$$(54) \qquad (\partial_{r'} - i\partial_s)C = (F+G)\big|_{r=r'} \ .$$

La propriété de résolubilité de (54) sous la condition (53) est non triviale, comme on s'en aperçoit en prenant par exemple $F \equiv 0$, $G = G(r',s)$ (soit $G_r \equiv 0$)

afin de satisfaire à (49). Dans ce cas, cette résolubilité est équivalente au fait que la fonction

$$\int \frac{G(\rho',\sigma)d\rho' d\sigma}{S-(\sigma+i\rho')}$$

s'étend au rectangle $|s| < 1$, $0 < r' < 1$, en fonction holomorphe de $s+ir'$.

4 - CONCLUSION -

Il reste donc à décrire complètement, et si possible de façon très simple, la résolubilité des équations (24) [sous les conditions (22), dans chaque quadrant (27), et de manière à satisfaire aux inégalités (26)]. A noter que le résultat est connu (à vrai dire, de façon un peu vague) puisque les propriétés d'exactitude du complexe de Lewy sont connues.

Si l'on veut étudier par la même méthode des hypersurfaces CR dans $\mathbb{C}^{n+1}$ plus générales que l'hyperquadrique de Lewy - définies par une équation (voir début)

$$w = s+it\,, \quad t = \varphi(z,\bar{z},s)\,,$$

on fera l'hypothèse que la forme de Levi est non dégénérée. Après un changement holomorphe des variables (z,w) et un choix convenable des coordonnées réelles s, t, on peut supposer que

$$\varphi(z,\bar{z},s) = Q(z) + O(|s|\,|z| + |z|^3)\,,$$

où Q est la forme quadratique (2). Par application du lemme de Morse, on a ensuite

$$\varphi(z,\bar{z},s) = \varphi_0(s) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \,|\zeta_j(z,\bar{z}) - \zeta_j^0(s)|^2\,,$$

ce qui nous permet de définir les cycles

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C}^n \; ; \; |\zeta_j(z,z) - \zeta_j^0(s)| = \sqrt{r_j}\,,\; j=1,\dots,n\}\,.$$

Maintenant, bien entendu, $\gamma = \gamma(r,s)$. Néanmoins, nous pouvons définir la transformation (18). Le fait très agréable qui se produit alors c'est la formule (20) se généralise (à peu près) exactement, avec les mêmes champs de vecteurs N_j. Le "à peu près" fait allusion à la présence de certains jacobiens dans l'intégrale à droite.

Nous comptons revenir sur cette généralisation dans un article prochain, et espérons montrer que la méthode de réduction au complexe différentiel défini par $N_1,\dots,N_n$ s'applique et donne ce qu'on en attend.

[1] F. TREVES : A remark on the Poincré lemma in analytic complexes with non degenerate Levi form, Comm. in PDE 7(12), 1467-1482 (1982).