

PIERRE GRISVARD

## **Diagonalisation d'opérateurs non-autoadjoints et séparation des variables**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1983), p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1983\\_\\_\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983___A17_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DIAGONALISATION D'OPERATEURS NON-AUTOADJOINTS

ET SEPARATION DES VARIABLES

par P. GRISVARD

Ceci est l'exposé d'un travail en commun avec G. Geymonat [5] inspiré par les calculs de D. Joseph [7], [8].

1. LE PROBLEME DE LA SEPARATION DES VARIABLES

On part ici d'un résultat bien connu. Soit  $u$  fonction hamonique dans le secteur  $D$  défini en coordonnées polaires par

$$D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) ; 0 < r < \rho, 0 < \theta < \omega\}$$

où  $\rho$  est un nombre positif et  $\omega \in ]0, 2\pi[$  (le cas  $\omega = 2\pi$  signifie qu'on considère un ouvert fissuré). On suppose que  $u$  est nulle sur les côtés rectilignes de  $D$  c'est à dire

$$u(r, 0) = u(r, \omega) = 0, \quad 0 < r < \rho$$

Pour fixer les idées on suppose que

$$u \in H^1(D).$$

Dans ces conditions il existe une suite de nombre  $C_k$  tels que

$$(1.1) \quad u(r, \theta) = \sum_{k>1} C_k r^{k\pi/\omega} \sin k\pi \frac{\theta}{\omega}$$

En d'autres termes  $u$  est une "superposition" de solutions particulières de la forme  $\varphi(r)\psi(\theta)$  c'est à dire à "variables séparées" (en coordonnées polaires).

Notre but est d'établir des résultats analogues pour les fonctions biharmoniques.

Pour cela revenons brièvement à la démonstration de (1.1) :  
on écrit l'équation de Laplace en coordonnées polaires

$$(1.2) \quad \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 u = 0$$

et on remarque que la partie en  $\theta$  avec les conditions aux limites de Dirichlet définit un opérateur autoadjoint, qu'on diagonalise, dans  $L^2(I)$ ,  $I = ]0, \omega[$ . Plus précisément on pose

$$A = - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$H = L^2(I)$$

$$D_A = H^2(I) \cap H_0^1(I),$$

alors  $A$  est autoadjoint à résolvante compacte dans  $H$ . Il s'ensuit que ses fonctions propres  $\sin k \frac{\theta}{\omega}$ ,  $k$  entier, normalisées forment une base de  $H$ . Ceci implique (1.1).

Considérons à présent  $u \in H^2(D)$ , biharmonique dans  $D$  vérifiant les conditions aux limites.

$$u(r, 0) = u(r, \omega) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \omega) = 0, \quad 0 < r < \rho.$$

En coordonnées polaires l'équation biharmonique s'écrit

$$(1.3) \quad \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \psi - A \psi = 0$$

où

$$(1.4) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ - \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1\right)^2 & - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1\right) \end{bmatrix}$$

après avoir posé

$$\Psi = \begin{bmatrix} u/r \\ (r \frac{\partial}{\partial r})^2 (u/r) \end{bmatrix}$$

Même en tenant compte des conditions aux limites cet opérateur n'est pas (formellement) autoadjoint car il a des valeurs propres non réelles ; il n'est pas (formellement) normal puisqu'il admet pour certaines valeurs de  $\omega$  des valeurs propres non semi-simple. On posera

$$H = H_0^2(I) \times L^2(I)$$

$$D_A = \{H^4(I) \cap H_0^2(I)\} \times L^2(I).$$

La seule propriété évidente est que A est à résolvante compacte.

Le Problème qui sera considéré ici est de développer les solutions de l'équation différentielle opérationnelle (1.3) en éléments propres de A au moins pour r proche de 0. Techniquement il sera commode d'effectuer le changement de variable

$$(1.5) \quad \frac{r}{\rho} = e^{-t}$$

On est ainsi ramené à étudier l'équation

$$(1.6) \quad D_t^2 \Psi - A \Psi = 0$$

dans l'intervalle  $]0,1[$  en t. En se référant aux exemples il est logique de supposer que la donnée de  $\Psi$  en  $r = \rho$  c'est à dire  $t = 0$  détermine complètement  $\Psi$ .

On ajoutera donc la condition

$$(1.7) \quad \Psi(0) = x$$

avec  $x \in H$  donné.

## 2. RESOLUTION DU PROBLEME (1.6) (1.7)

Elle s'effectue facilement à l'aide de la théorie des semi-groupes analytiques. Pour cela on supposera désormais :

$$(H_1) \quad \underline{A \text{ est fermé et } D_A \text{ est dense}}$$

(H<sub>2</sub>)  $A - \lambda I$  est inversible pour tout  $\lambda \leq 0$  et il existe  $M$  tel que

$$|(A - \lambda I)^{-1}| \leq M/(|\lambda| + 1)$$

Pour  $\lambda \leq 0$ .

Sous ces hypothèses  $A$  admet une racine carrée  $A^{1/2}$  telle que  $-A^{1/2}$  soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique uniformément borné  $e^{-t A^{1/2}}$ . De plus le problème (1.6) (1.7) admet pour  $x \in D_A^{1/4}$  l'unique solution

$$(2.1) \quad \Psi(t) = e^{-t A^{1/2}} x$$

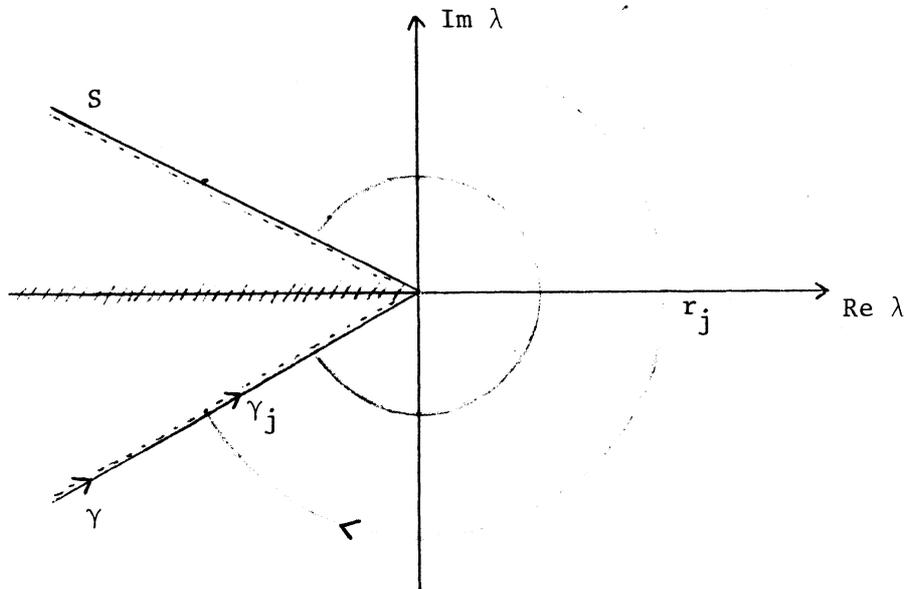
dans la classe définie par

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi, \Psi' \in L^2(]0, \infty[ ; H) \\ \Psi^{(j)} \in L^2(] \varepsilon, \infty[ ; H) \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \\ \Psi(t) \in D_A \text{ p.p.} \end{array} \right.$$

Ceci nous fournit une représentation explicite de  $\psi$  en fonction de  $x$  :

$$(2.3) \quad \Psi(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{-t \sqrt{\lambda}} (A - \lambda I)^{-1} x d\lambda$$

où  $\gamma$  est une courbe entièrement contenue dans l'ensemble résolvant de  $A$  et d'indice un par rapport à tout point de la coupure  $]-\infty, 0]$  qui sert à la définition de  $\sqrt{\lambda}$ .



On rappelle que grâce à  $(H_2)$  l'ensemble résolvant de  $A$  contient un voisinage de l'origine ainsi qu'un secteur axé sur le demi-axe réel négatif.

L'utilisation de (2.3) pour développer  $\psi(t)$  en éléments propres de  $A$  ne sera possible qu'après avoir précisé la compacité de la résolvante.

### 3. LES CLASSES DE CARLEMAN

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert. ON dit qu'un opérateur  $T$  compact de  $H_1$  dans  $H_2$  appartient à la classe  $\mathcal{L}_p(H_1, H_2)$  de Carleman si la série

$$\sum_k \mu_k^p$$

converge où les  $\mu_k$  désignent la suite des valeurs propres de  $\sqrt{T^* T}$  répétées conformément à leurs multiplicités. On supposera

$$(H_3) \quad A^{-1} \in \mathcal{L}_p(H, H) \text{ pour tout } p > \frac{1}{2}.$$

Cette hypothèse est aisément vérifiée dans les exemples du point 1 puisqu'on sait d'après El Kolli [4] et Triebel [10] que

$$I \in \mathcal{L}_p(H^{k+2}(I), H^k(I))$$

pour tout  $p > \frac{1}{2}$ ; l'inclusion n'est pas vraie pour  $p = \frac{1}{2}$ .

Du fait que  $A^{-1}$  est compact le spectre de  $A$  est discret et formé d'une suite de nombres complexes  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  avec  $|\lambda_k| \rightarrow +\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Il est important de préciser ce qu'on entend par multiplicité  $\nu_k$  de  $\lambda_k$ . Pour tout  $k$  on pose

$$(3.1) \quad H_k = \bigcup_{m \geq 0} \ker(A - \lambda_k I)^m$$

C'est un espace de dimension finie  $\nu_k$ . Les éléments de  $H_k$  sont donc des vecteurs propres généralisés ou vecteurs "radicaux" c'est à dire que  $y \in H_k$  si et seulement si il existe  $n$  tel que

$$(3.2) \quad (A - \lambda_k I)^m y = 0$$

comme dans la théorie de Jordan.

Un tel opérateur admet un déterminant de Fredholm qui généralise la notion de polynôme caractéristique :

$$(3.3) \quad d(\lambda) = \prod_{k \geq 1} (1 - \lambda/\lambda_k)^{\nu_k}$$

C'est une fonction entière de type exponentiel  $p$  pour tout  $p > \frac{1}{2}$ , nulle à l'ordre  $\nu_k$  en  $\lambda_k$ . La clé du développement en éléments propres de  $\Psi(t)$  est une majoration de la croissance de  $\lambda$ .

#### 4. RESULTAT PRINCIPAL

Thm : On suppose que A vérifie (H<sub>1</sub>) (H<sub>2</sub>) (H<sub>3</sub>) et qu'il existe K tel que

$$(4.1) \quad d(\lambda) = O(e^{K|\lambda|^{1/2}})$$

Alors il existe une suite croissante  $r_j \rightarrow +\infty$  et  $t_0 > 0$  tels que pour tout  $x \in D_A^{1/4}$  il existe une suite

$$x_k \in H_k$$

telle que

$$(4.2) \quad \Psi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r_j \leq |\lambda_k| < r_{j+1}} e^{-t A^{\frac{1}{2}}} x_k.$$

Il est important de se convaincre qu'il s'agit effectivement de séparation des variables. Pour cela examinons un des termes de cette série. Soit  $e_j$ ,  $1 \leq j \leq \nu_k$  une base de  $H_k$  qui réduise  $A$  à la forme normale de Jordan ; si dans cette base on a

$$(4.3) \quad x_k = \sum_{j=1}^{\nu_k} \alpha_j e_j$$

alors on a également

$$(4.4) \quad e^{-t A^{\frac{1}{2}}} x_k = e^{-t \sqrt{\nu_k}} \sum_{j=1}^{\nu_k} \alpha_j \frac{t^{\beta_j-1}}{(\beta_j-1)!} e_j$$

où les  $\beta_j$  sont des entiers avec  $1 \leq \beta_j \leq \nu_k-1$ . (Ceci tient compte du fait que  $H_k$  peut contenir plusieurs blocs de Jordan correspondant à  $\lambda_k$ .)

En pratique dans les exemples de point 1, les  $e_j$  sont des fonctions de  $\theta \in I$  et en effectuant le changement de variable inverse de (1.5) on conclut que  $\psi$  est superposition de fonctions à variables séparées de la forme

$$r^{\sqrt{\lambda_k}} (\text{Log } r)^j e_j(\theta).$$

La sommabilité par paquets est inhérente à la méthode et a déjà été rencontrée par Dauge [2] dans un contexte voisin.

Pour la pratique il est utile de préciser  $x_k$ . On introduit pour cela un projecteur sur  $H_k$ :

$$(4.5) \quad P_k = \frac{1}{2-i\pi} \int_{C_k} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

où  $C_k$  est un cercle centré en  $\lambda_k$  orienté dans le sens direct et ne contenant aucune valeur propre  $\lambda_\ell$  avec  $\ell \neq k$ . Ceci posé on a

$$(4.6) \quad x_k = P_k x$$

Dans le cas particulier fréquent où  $\lambda_k$  est semi-simple c.à.d.

$$H_k = \ker(A - \lambda_k I)$$

on a

$$e^{-tA} x_k = e^{-t\sqrt{\lambda_k}} x_k.$$

Enfin si  $\lambda_k$  est simple  $P_k$  s'explique aisément :

$$P_k x = \frac{(x, \Psi_k)}{(\phi_k, \Psi_k)} \phi_k$$

où  $A \phi_k = \lambda_k \phi_k$  et  $A \Psi_k = \overline{\lambda_k} \Psi_k$ . Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont simples le développement (4.2) est simplement un développement biorthogonal:

$$(4.7) \quad \psi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r_j < |\lambda_k| < r_{j+1}} e^{-t\sqrt{\lambda_k}} \frac{(x, \Psi_k)}{(\phi_k, \Psi_k)} \phi_k$$

### 5. EBAUCHE DE DEMONSTRATION

On approche  $\Psi$  par des  $\Psi_j$  obtenus en modifiant la courbe d'intégration dans l'intégrale de Dunford (2.3). Pour cela on introduit la suite croissante de rayon  $r_j$  telle que le cercle de rayon  $r_j$  évite les valeurs propres  $\lambda_k$  et on note  $\gamma_j$  le contour  $\gamma$  tronqué au rayon  $r_j$  et refermé par un arc de cercle de rayon  $r_j$  du côté "droit" conformément à la figure :

$$(5.1) \quad \Psi_j(t) = \frac{1}{2-i\pi} \int_{\gamma_j} e^{-t\sqrt{\lambda}} (A - \lambda I)^{-1} x \, d\lambda$$

De (4.5) il résulte immédiatement que :

$$(5.2) \quad \Psi_j(t) = \sum_{k=1}^j \sum_{r_{\ell} < |\lambda_k| < r_{\ell+1}} e^{-t A^{1/2}} P_k x$$

c'est donc une somme partielle de la série (4.2). Il reste à voir que  $\Psi_j(t)$  converge vers  $\Psi(t)$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$  c.à.d. à majorer convenablement

$$e^{-t\sqrt{\lambda}} (A - \lambda I)^{-1} x$$

sur  $\gamma_j \setminus \gamma$ .

L'inégalité de Carleman-Hadamard (c.f. Dunford-Schwartz [3] Gohberg-Krein [6]) affirme qu'il existe  $T_p$  tel que :

$$(5.3) \quad |d(\lambda) (I - \lambda A^{-1})^{-1}| \leq e^{T_p |\lambda|^p}$$

pour tout  $p > \frac{1}{2}$ . Cette majoration est valable en particulier dans le secteur  $S$  à droite de  $\gamma$  et déterminé par  $\gamma$ . Cependant sur le bord de ce secteur on a :

$$|(I - \lambda A^{-1})^{-1}| = o(1)$$

grâce à  $(H_2)$ . Ceci joint à (4.2) montre que :

$$(5.4) \quad |d(\lambda) (I - \lambda A^{-1})^{-1}| = o(e^{K|\lambda|^{1/2}})$$

sur  $\partial S$ . Comme la fonction  $d(\lambda) (I - \lambda A^{-1})^{-1}$  est entière on peut lui appliquer le principe de Phragmen-Lindelof dans le secteur  $S$  (dont l'ouverture est  $< 2\pi$ ).

Il s'ensuit que la majoration (5.4) est valable dans  $S$  entier donc en particulier sur  $\gamma_j \setminus \gamma$ .

Compte tenu de l'identité débile

$$(I - \lambda A^{-1})^{-1} = A(A - \lambda I)^{-1} = I + \lambda(A - \lambda I)^{-1}$$

il vient

$$|(A - \lambda I)^{-1}| \leq \frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_j} \frac{O(e^{K\sqrt{r_j}})}{d(r_j)}$$

sur  $\gamma_j \setminus \gamma$ . On conclut en appliquant le principe du minimum à  $d$  qui affirme pour tout  $\varepsilon > 0$  l'existence d'une suite croissante de rayons  $r_j$  tels que

$$|d(\lambda)| \geq e^{-(K+\varepsilon)} |\lambda|^{1/2}$$

pour  $|\lambda| = r_j$ . Ceci implique la majoration

$$|e^{-t\sqrt{\lambda}}(A - \lambda I)^{-1}x| \leq \frac{1}{r_j} e^{-t \operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} \{1 + O(e^{[2K+\varepsilon]\sqrt{r_j}})\} |x|$$

sur  $\gamma_j \setminus \gamma$  qui montre que l'intégrale de Dunford sur  $\gamma_j \setminus \gamma$  tend vers zéro lorsque  $j \rightarrow +\infty$  pour  $t$  assez grand indépendamment de  $x$ .

## 6. CALCUL PRATIQUE DU DETERMINANT DE FREDHOLM

On va vérifier ici l'applicabilité du théorème ci-dessus dans un exemple un peu plus simple que celui du n° 1. On considère  $u$  biharmonique dans la demi-bande

$$\Omega = \{(t, y) ; |y| < 1, t > 0\}$$

avec les conditions au bord

$$u(t, \pm 1) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, \pm 1) = 0, t > 0$$

introduisant la fonction vectorielle

$$\Psi = \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{bmatrix}$$

On réécrit l'équation sous la forme (1.6) avec

$$(6.1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial^4}{\partial y^4} & -2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

On remarque que c'est la partie principale de l'opérateur introduit en (1.4). On définit  $H$  et  $D_A$  comme en 1 avec  $I = ]-1, +1[$ .

Les hypothèses  $(H_1)$   $(H_2)$  et  $(H_3)$  sont facilement vérifiées tandis que l'inégalité (4.1) demande démonstration. Revenant à (3.3) il faut identifier les valeurs propres et leurs multiplicités. C'est pourquoi on étudie concrètement l'équation

$$(6.2) \quad A v - \lambda v = f$$

qui gouverne la résolvante. Cette équation équivaut, après élimination de la seconde composante  $v_2$  de  $v$ , à chercher  $v_1 \in H^4(I) \cap H_0^2(I)$  solution de

$$(6.3) \quad -v_1^{(IV)} - 2\lambda v_1'' - \lambda^2 v_1 = f_2 + 2f_1'' + \lambda f_1.$$

Le noyau résolvant de ce problème comporte le facteur

$$(6.4) \quad f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 - \left[ \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} \right]^2 \right\}$$

au dénominateur. Les valeurs propres  $\nu_k$  sont évidemment les zéros de  $f$ . De plus l'ordre du zéro de  $f$  est l'ordre du pôle de  $(A - \lambda I)^{-1}$  en  $\lambda_k$ . Ici on constate que les zéros de  $f$  sont tous simples et par conséquent les valeurs propres  $\lambda_k$  sont semi-simples d'après Taylor [9]. Le calcul explicite de  $H_k = \text{Ker}(A - \lambda_k I)$  montre que  $\nu_k = 1$ .

On conclut en remarquant que  $d$  et  $f$  sont deux fonctions entières de type  $p$  pour tout  $p > \frac{1}{2}$  ayant les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités. D'après Boas [1] elles sont nécessairement proportionnelles. Il est donc clair d'après (6.4) que

$$d(\lambda) = O(e^{4\sqrt{|\lambda|}})$$

c'est la majoration (4.1) avec  $K = 4$ .

L'application du théorème fournit une représentation de  $u$ , pour  $t$  assez grand, comme superposition de solutions à variables séparées de la forme :

$$\alpha_k e^{-t \sqrt{\lambda_k}} \left\{ \left( \frac{\sin 2 \sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}} - 2 \cos 2 \sqrt{\lambda_k} \right) \sin \sqrt{\lambda_k} (y+1) - 2 \sin 2 \sqrt{\lambda_k} \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} (y+1)}{\sqrt{\lambda_k}} - (y+1) \cos \sqrt{\lambda_k} (y+1) \right) \right\}$$

où  $\lambda_k$  est solution de

$$\sin 2 \sqrt{\lambda_k} = \pm 2 \sqrt{\lambda_k}$$

avec  $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda_k} > 0$ . Le théorème fournit également une expression explicite de  $\alpha_k$  en fonction de  $u(0,y)$  et de  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,y)$ . Sur cette expression on peut vérifier directement la convergence de la série pour tout  $t \geq 0$  comme dans Joseph [7], [8].

## 7. RETOUR AU BIHARMONIQUE DANS UN SECTEUR.

L'application du théorème ci-dessus à l'exemple introduit au n° 1 suit les idées ci-dessus. Bornons nous pour alléger les formules au cas particulier vital d'un domaine avec fissure c.à.d.  $\omega = 2\pi$ . Dans ce cas on vérifie que le noyau de Green du problème  $\Delta v - \lambda v = f$  fait apparaître le facteur

$$(7.1) \quad f(\lambda) = \sin 2\pi \sqrt{\lambda}$$

au dénominateur. Ses zéros sont les nombres  $[\frac{\ell}{2}]^2$  avec  $\ell$  entier et ils sont tous simples. Ceci identifie les  $\nu_k$  et montre que toutes ces valeurs propres sont semi-simples. L'étude directe de  $H_k = \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)$  montre que  $\nu_k = 2$  sauf pour  $\lambda_k = 1$  où on a  $\nu_k = 1$ . Le théorème d'unicité de Boas [1] montre alors que  $d(\lambda)$  est proportionnel à  $f(\lambda)^2$  et partout

$$(7.2) \quad d(\lambda) = O(e^{4\pi \sqrt{|\lambda|}}).$$

C'est l'inégalité (4.1) avec  $K = 4\pi$ .

L'application du théorème fournit la représentation de  $u$ , pour  $t$  assez grand, comme superposition de solutions à variables séparées de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\ell} r^{\frac{\ell}{2} + 1} \sin \theta \sin \frac{\ell}{2} \theta, \ell \text{ entier } \geq 1 \\ \beta_{\ell} r^{\frac{\ell}{2} + 1} \left\{ \frac{\ell}{2} \sin \theta \cos \frac{\ell}{2} \theta - \sin \frac{\ell}{2} \theta \cos \theta \right\}, \ell \text{ entier } \geq 1 \\ \ell \neq 2 \end{array} \right.$$

pour  $r$  assez petit. Cependant les formules explicites pour  $\alpha_{\ell}$  et  $\beta_{\ell}$  montrent la convergence du développement pour tout  $r \in [0, \rho]$ . Les solutions particulières ci-dessus ne surprendront pas les mécaniciens de la rupture.

#### BIBLIOGRAPHIE :

- [ 1 ] : BOAS : "Entire functions". Academic Press, N. Y. 1954.
- [ 2 ] : DAUGE : "Second membre analytique pour un problème aux limites elliptique d'ordre  $2m$  sur un polygone". Séminaire d'Analyse, Univ. Nantes 1981/82.
- [ 3 ] : DUNFORD-SCHWARTZ : "Linear operators". Intersciences Pub. N. Y.
- [ 4 ] : EL KOLLI : " $n^{\text{ième}}$  épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids". C.R.A.S. Paris 273, 1971 p. 450-453.
- [ 5 ] : GEYMONAT-GRISVARD : "Diagonalisation d'opérateurs non autoadjoints et séparation des variables". C.R.A.S. Paris, 1983.
- [ 6 ] : GOHBERG-KREIN : "Introduction to the theory of linear non self adjoint operators". A.M.S. Providence.
- [ 7 ] : JOSEPH : "A new separation of variables theory for problems of Stokes flow & elasticity". Proceedings of "Trends in applications of pure mathematics to mechanics". Pitman, London 1979.

- [ 8] : JOSEPH : "The convergence of biorthogonal series for biharmonic & Stokes flow edge problems". Part. I, SIAM J. of Applied Maths, Vol 33 n° 2, 1977, pp. 337-347.
  
- [ 9] : TAYLOR : "Introduction to functional analysis". J. Wiley.
  
- [ 10] : TRIEBEL : "Interpolation theory, function spaces, differential operators". North Holland.