Journées Équations aux dérivées partielles

Yves Dermenjian
Jean-Claude Guillot

Théorie spectrale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié perturbe

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A16_0>

Conférence n° 16

THEORIE SPECTRALE DE LA PROPAGATION DES ONDES ACOUSTIQUES DANS UN MILIEU STRATIFIE PERTURBE

Par Yves DERMENJIAN et Jean-Claude GUILLOT

1 INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est d'obtenir une bonne connaissance des opérateurs de la forme

(1) $$A = - c^2(x,y) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

à partir de ce que l'on sait sur un opérateur de la forme

(2) $$A_o = - c^2(y) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}$.

Les équations de la propagation du son dans un milieu stratifié font intervenir A_o dans

(3) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_o = 0,$$

$y \longrightarrow C(y)$ étant la vitesse du son qui ne dépend alors que de la profondeur. Comme ce milieu stratifié est une simplification, puisqu'il y a dans les différentes couches des impuretés ou des obstacles, la vitesse du son ne dépend pas seulement de y mais aussi de x. C'est pour celà que l'on introduit A. Pour pouvoir traiter

(4) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A = 0$$

On essaie de montrer un "principe d'absorption limite" pour A, c'est-à-dire prouver que les limites suivantes ont un sens ($R(z) = (A - z I)^{-1}$) :

(5) $$R^{\pm}(\mu)f = \lim_{\substack{z \longrightarrow \mu \\ \pm \operatorname{Im} z > 0}} R(z)\, f$$

En effet, on peut alors construire la mesure spectrale E(.) de A puisque

(6) $$(E(]\lambda_1,\lambda_2[)f,f) = \lim_{\substack{y \downarrow 0 \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{1}{2i\Pi} \int_{\lambda_1+y}^{\lambda_2-y} ((R(\lambda+i\varepsilon)-R(\lambda-i\varepsilon))f,\ f)d\lambda,$$

et ainsi on peut résoudre (4) puisque les solutions suivantes conviennent

(7) $$u(t) = e^{iA^{1/2}t}\, u(0)$$

et que $e^{iA^{1/2}t}$ est facile à étudier lorsque la mesure spectrale de A est connue.

Comme il s'agit d'expliquer une démarche nous simplifierons au maximum le modèle et nous prendrons

(8) $$C\,(y) = \begin{cases} C_o & \text{si} \quad y < 0 \\ C_1 & \text{si} \quad 0 < y < h \\ C_2 & \text{si} \quad h < y \end{cases}$$

avec

(9) $$0 < C_1 < C_o \leqslant C_2$$

Avec des inégalités du type (9) nous avons des ondes guidées. Les autres cas sont plus faciles à traiter. En fait notre méthode ne convient que si

(10) $$C(y) - C(x,y) = 0\left(\frac{1}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} \frac{1}{(1+|y|)^{1+\varepsilon}} \right),\ \varepsilon > 0,$$

ce qui revient à dire que nous acceptons des perturbations à courte portée de la vitesse.

On pourrait se servir de ce modèle mathématique pour étudier les équations de Maxwell ([5]) ainsi que l'équation des ondes élastiques.

Pour être exact on doit préciser que la plupart des auteurs étudient l'opérateur de Schrödinger au lieu de l'équation des ondes (4). Quant aux travaux antérieurs on peut citer [1],[2],[8] qui étudièrent le cas où A_o est un opérateur à cœfficients constants et $A = A_o + V$, V étant un opérateur de multiplication par une fonction. Les systèmes uniformément propagatifs sont considérés en [12] et [13]. En particulier, $A_o y$ est un système $n \times n$ du premier ordre à cœfficients constants et on a $A = a(x)A_o$ où $a(x)$ tend vers la matrice identité lorsque $|x| \longrightarrow \infty$.

Lorsque $A_o = -\Delta + x_1$ et $A = A_o + V$, il s'agit de l'effet Stark que plusieurs mathématiciens ont étudié, par exemple [7],[14] et [3].

Il y a bien d'autres auteurs à citer et en particulier ceux qui s'occupent des perturbations dites à longue portée, c'est à dire lorsque

(11) $$V(x) = 0\left((1+|x|)^{-1+\varepsilon} \right),\ \varepsilon > 0,\ |x| \longrightarrow +\infty.$$

Sur ce sujet on pourra se référer à [10] ainsi qu'aux exposés de S.AGMON en 1978 qu'il donna à l'université de Salt Lake City (Utah, U.S.A.) et au collège de France.

II THEORIE SPECTRALE DE L'OPERATEUR A_o

Nous n'en donnerons qu'une brève idée et que les résultats. La méthode est bien maîtrisée. Pour la comprendre on pourra se reporter à [6] et à [11] où elle est très bien détaillée pour d'autres fonctions $y \longrightarrow C(y)$.

A_o, défini par (2), est un opérateur positif autoadjoint dans l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}_o = L^2(\mathbb{R}^{n+1}, C^{-2}(y)\, dx\, dy)$ muni du produit scalaire :

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x,y)\, \overline{g(x,y)}\, C^{-2}(y)\, dx\, dy. \tag{12}$$

Le domaine de A_o est $D(A_o) = H^2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Utilisant la transformation de Fourrier partielle en x on obtient formellement, pour p fixé (p étant la variable duale de x),

$$A_{op} = -C^2(y)\left(\frac{d^2}{dy^2} - |p|^2\right). \tag{13}$$

On applique alors la théorie de Sturm-Liouville (cf. [4]) à A_{op}. On trouve que le spectre continu de A_{op} vérifie $\sigma_c(A_{op}) = [C_o^2|p|^2, \infty[$,

et que le spectre ponctuel de A_{op}, $\sigma_p(A_{op})$ est fini et vérifie $\sigma_p(A_{op}) \subset]C_1^2|p|^2, C_o^2|p|^2[$.

Plus précisément on construit une suite croissante $(p_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs auxquels correspondent des fonctions $p \longrightarrow \lambda_k(|p|)$ définies pour $|p| \geq p_k$. Pour p fixé, les valeurs propres de A_{op} sont les $\lambda_k(|p|)$ pour tous les k tels que $p_k < |p|$. Ainsi dans le dessin ci-dessus il y a deux valeurs propres.

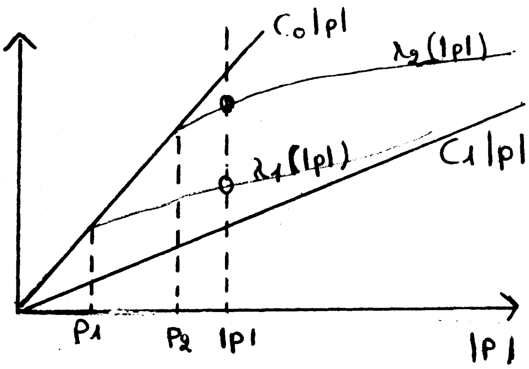

fig. 1

Ensuite on regroupe ces résultats pour revenir à A_o.

Si on pose

$\Omega = \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1};\ C_2^2\ |p|^2 < \lambda\}$,

$\Omega_o = \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1};\ C_o^2\ |p|^2 < \lambda < C_2^2\ |p|^2\}$,

$\Omega_k = \{\ p \in \mathbb{R}^n;\ p_k < |p|\}$, k =1,2,...,

on peut écrire une décomposition spectrale de l'opérateur A_o. En effet, il existe un

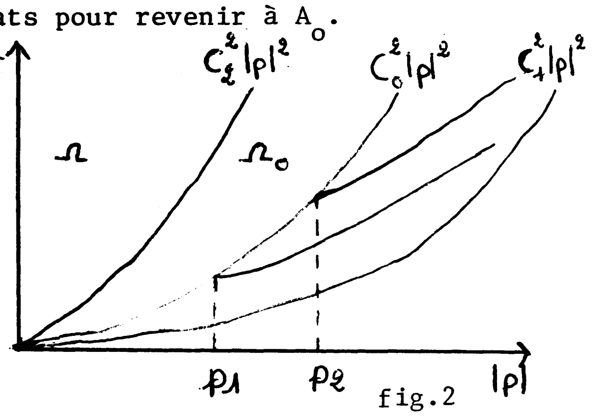

fig.2

opérateur unitaire $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{H}_o$ sur $\tilde{\mathcal{H}}_o = L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega_o) \oplus (\bigoplus_{k>1} L^2(\Omega_k))$

qui à $f \in \mathcal{H}_o$ fait correspondre

(14) $$\mathfrak{F} f = (\tilde{f}_+, \tilde{f}_-, \tilde{f}_o, \tilde{f}_1, \ldots)$$

telle que $\mathfrak{F}(A_o f)$ vérifie, lorsque $f \in D(A_o)$ et ψ est une fonction borélienne définie sur $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{(\psi(A_o)f)}_\pm (p,\lambda) = \psi(\lambda)\, \tilde{f}_\pm (p,\lambda)$$
$$\widetilde{(\psi(A_o)f)}_o (p,\lambda) = \psi(\lambda)\, \tilde{f}_o(p,\lambda)$$
$$\widetilde{(\psi(A_o)f)}_k(p) = \psi(\lambda_k(|p|))\, \tilde{f}_k(p), \quad k = 1,2,\ldots$$

Par exemple, si $z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty[$, la résolvante $R_o(z) = (A_o - zI)^{-1}$ de A_o vérifie

(15) $$\mathfrak{F}(R_o(z)f) = \left(\frac{\tilde{f}_+(p,\lambda)}{\lambda - z}, \frac{\tilde{f}_-(p,\lambda)}{\lambda - z}, \frac{\tilde{f}_o(p,\lambda)}{\lambda - z}, \frac{\tilde{f}_1(p)}{\lambda_1(|p|) - z}, \ldots\right)$$

III LE PRINCIPE D'ABSORTION LIMITE POUR A_o

$L^{2,s_1,s_2}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{f \text{ mesurable}; \int |f(x,y)|^2 (1+|x|^2)^{s_1} (1+y^2)^{s_2}\, dx\, dy < \infty\}$

$\mathcal{H}_{2,-s_1,-s_2}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{f \text{ mesurable}; D^\alpha u \in L^{2,-s_1,-s_2}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ si } |\alpha| \leq 2\}$.

On obtient alors le

Théorème 1

Si $s_1 > 1/2$, $s_2 > 1/2$ et $\mu > 0$, les limites suivantes existent pour la topologie de la norme dans $\mathcal{L}(L^{2,s_1,s_2}, \mathcal{H}_{2,-s_1,-s_2})$:

(16) $$R_o^{\pm}(\mu) = \lim_{\substack{z \to \mu \\ \pm \operatorname{Im} z > 0}} R_o(z)$$

Esqisse de la démonstration

Pour démontrer ce résultat on prend f et g dans $C_o^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et utilisant (15) on écrit

(17) $$(R_o(z)f,g) = \int_o^\infty \frac{h_+(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda + \int_o^\infty \frac{h_-(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda + \int_o^\infty \frac{h_o(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|p| \geq p_k} \frac{h_k(|p|)}{\lambda_k(|p|) - z} d|p|$$

avec

$$h_\pm(\lambda) = \int_{(p,\lambda) \in \Omega} \tilde{f}_\pm(p,\lambda)\, \overline{\tilde{g}_\pm(p,\lambda)}\, dp, \text{ etc\ldots}$$

On montre que $h_\pm$, $h_o, h_1, \ldots$ sont des fonctions höldériennes et l'on en déduit que (17) a une limite lorsque $z \longrightarrow \mu$ et Im z garde un signe constant. Après une suite de raisonnements que l'on peut trouver dans [1] ou [12] on peut conclure C.Q.F.D.

Les deux articles précédents utilisent la trace de f sur une sphère (il s'agit de la trace de la transformée de Fourier de f sur une sphère). Ici nous avons une transformée de Fourier généralisée, à savoir l'opérateur unitaire $\mathfrak{F}$ défini par (14). Ainsi, pour tout $\mu > 0$, nous définissons une famille de traces : $\sigma_\pm, \sigma_o, \sigma_1, \ldots$. Par exemple, si $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ on a

$$(18) \qquad (\sigma_\pm(\mu)f)(p) = \tilde{f}_\pm(p,\mu) \; ; \quad (\sigma_o(\mu)f)(p) = \tilde{f}_o(p,\mu) \; ;$$

$$(\sigma_k(\mu)f)(p) = \tilde{f}_k(p) \quad \text{et } \lambda_k(|p|) = \mu,$$

ce qui signifie que $\sigma_\pm(\mu)f$ est la restriction de $\tilde{f}_\pm$ au morceau d'hyperplan $\{p \in \mathbb{R}^n \; ; \; (p,\mu) \in \Omega\}$. Ces applications traces $\sigma_\pm, \ldots$ se prolongent par continuité à $L^{2,s_1,s_2}(\mathbb{R}^{n+1})$ si $s_1 > 1/2$ et $s_2 > 1/2$.

On a la formule

$$(19) \qquad \lim_{\substack{z \longrightarrow \mu \\ \pm \operatorname{Im} z > 0}} (R_o(y)f,f) = \pm \Pi \left\{ \|\sigma_+(\mu)f\|^2 + \|\sigma_-(\mu)f\|^2 + \|\sigma_o(\mu)f\|^2 + \sum_1^\infty \frac{\|\sigma_k(\mu)f\|^2}{\lambda'_k(\lambda_k^{-1}(\mu))} \right\}$$

IV LE PRINCIPE D'ABSORPTION LIMITE POUR A ET SES CONSEQUENCES

A est défini par (1) avec $0 < m \leqslant C(x,y) \leqslant M$, presque partout sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et on suppose que (10) est vérifiée. Alors A est un opérateur positif, autoadjoint dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{n+1}, C^{-2}(x,y)\,dx\,dy)$, de domaine $D(A) = H^2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Si nous posons

$$V(x,y) = 1 - \left(\frac{C(y)}{C(x,y)} \right)^2,$$

$$T(z) = z\,R_o(z)\,V,$$

$$R(z) = (A - z\,I)^{-1},$$

On a la formule suivante pour $z \notin [0, +\infty[$:

$$(20) \qquad R(z) = [I + T(z)]^{-1} R_o(z)(1-V).$$

Utilisant la compacité de T(z) il est facile de voir que I+T(z) est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{2,-s_1,-s_2}(\mathbb{R}^{n+1}))$ si $s_1 = 1/2 + \varepsilon_1$, $s_2 = 1/2 + \varepsilon_2$, ε_1

et ε_2 positifs mais petits et si $z \notin [0,+\infty[$. Le point délicat est de montrer cela lorsque $z = \mu \in]0,\infty[$. Supposons que $\mu > 0$ et que $I + T^+(\mu) = I + \mu R_o^+(\mu)V$ ne soit pas une application injective. Cela signifie qu'il existe $w \neq 0$, $w \in \mathcal{H}_{2,-s_1,-s_2}$ telle que

(21) $$w + \mu R_o^+(\mu) V w = 0$$

Comme V est une fonction réelle nous avons

(22) $$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} Vw\,\bar{w}\,C^{-2}(y)\,dx\,dy = \int w\,V\bar{w}\,C^{-2}(y)\,dx\,dy$$

$$= -\mu \int R_o^+(\mu)\,V\,w\,.\,V\bar{w}\,C^{-2}(y)\,dx\,dy$$

$$= -\mu \lim_{\substack{z \to \mu \\ \pm \operatorname{Im} z > 0}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} R_o(z)Vw\,.\,V\bar{w}\,C^{-2}(y)\,dx\,dy = -\mu \lim (R_o(z)Vw, Vw),$$

et si on applique ceci à (19) on en déduit que les traces de Vw en μ sont nulles. On démontre alors un théorème d'itération, à savoir le

Théorème 2 (Théorème fondamental).

On suppose que

(i) μ *est un réel strictement positif tel que* $\mu \neq C_o^2 p_k^2$, $k = 1,2,\ldots$,

(ii) $f \in L^{2,s_1,s_2}(\mathbb{R}^{n+1})$ $s_1 > 1/2$, $s_2 > 1/2$,

(iii) les traces de f en μ *sont nulles.*

On pose

$$\tilde{s}_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < s_1 \\ s_1 & \text{si } 1/2 < s_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\tilde{s}_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < s_2 \\ \text{tout réel } s \text{ tel que } s < s_2 & \text{si } 1/2 < s_2 \leqslant 1 \end{cases}$$

Alors on a

(23) $$R_o^+(\mu)f = R_o^-(\mu)f \in L^{2,\tilde{s}_1-1,\tilde{s}_2-1}(\mathbb{R}^{n+1})$$

Et

(24) $$\|R_o^+(\mu)f\|_{L^{2,\tilde{s}_1-1,\tilde{s}_2-1}} \leqslant M(\mu)\,\|f\|_{L^{2,s_1,s_2}}$$

Où M, qui ne dépend pas de f, est une fonction continue de μ *sur* $]0,\infty[\setminus \{ C_o^2 p_k^2 \,;\, k = 1,2,\ldots \}$.

Supposons ce théorème démontré. Alors, $f = -\mu Vw$ appartient à $L^{2,1-s_1+y_1,1-s_2+y_2}$ (il suffit de prendre $y_1 < \varepsilon$ et $y_2 < \varepsilon$, ε étant celui qui intervient dans (10)). Appliquant le théorème 2 et (21) on voit que w appartient à $L^{2,\inf(-s_1+y_1,0),\inf(-s_2+y_2,0)}$ au lieu de $L^{2,-s_1,-s_2}$. Maintenant on sait que f appartient à $L^{2,1-s_1+2y_1,1-s_2+2y_2}$. Après avoir répété ce processus un nombre fini de fois on obtient que w appartient à $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Tout ceci permet d'utiliser la formule (20) pour z réel positif si z n'est ni un seuil, $C_o^2\, p_k^2$, ni une valeur propre de A. On obtient finalement :

Théorème 3

Si $s_1 > 1/2$, $s_2 > 1/2$ *et* $\mu > 0$, *les limites suivantes existent pour la topologie de la norme dans* $\mathcal{L}(L^{2,s_1,s_2}, \mathcal{H}_{2,-s_1,-s_2})$ *si, de plus,* μ *n'est ni un seuil ni une valeur propre de A :*

$$R^{\pm}(\mu) = \lim_{\substack{z \to \mu \\ \pm \operatorname{Im} z > 0}} R(z).$$

A partir de la formule (6) on a le

Théorème 4

(1) L'ensemble des valeurs propres de A différentes de 0 et d'un seuil n'a pas de points d'accumulation dans $]0,\infty[\ \setminus \bigcup_{k\geq 1} \{C_o^2\, p_k^2\}$ *et chacune de ces valeurs propres est de multiplicité finie.*

(2) Le spectre essentiel de A est $[0,\infty[$ *et le spectre continu singulier de A est vide.*

(3) Soient $E(.)$ *la mesure spectrale de A et* (λ_n) *l'ensemble des valeurs propres de A dans* $]0,\infty[\ \setminus \bigcup_{k\geq 1} \{C_o^2\, p_k^2\}$, *alors la restriction de A au sous-espace*

$$E\left(]0,\infty[\ \setminus \bigcup_{k\geq 1} \{C_o^2 p_k^2\} \setminus \bigcup_n \{\lambda_n\}\right) L^2\left(\mathbb{R}^{n+1},\ C^{-2}(x,y)\, dx\, dy\right)$$

est un opérateur absolument continu.

IV CONCLUSION

On peut étudier le problème extérieur, c'est à dire se placer à l'extérieur d'un compact K et considérer A_o dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ avec la condition de Dirichlet, par exemple. On obtient aussi un théorème analogue au théorème 4.

Maintenant il reste à étudier des modèles encore plus généraux (voir [11]) et la théorie du scattering.

[1] S. AGMON : "Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. IV, 2(1975), p.151-218.

[2] S. AGMON et L. HÖRMANDER : " Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple caracteristics", J. Analyse Math. 30 (1976), p.1-38.

[3] M. BEN-ARTZI : "An application of asymptotic techniques to certain problems of spectral and scattering theory of Stark-like Hamiltonians", Technion- Israel Institute of Technology , Haïfs preprint MT-523, Juin 1981.

[4] N. DUNFORD et J.J.SCHWARTZ : "Linear operators, part II : spectral theory", Interscience Publishers (1963), New-York.

[5] J.C. GUILLOT : " Spectral theory and eigenfunctions expansion for Maxwell's equations in an asymetric dielectric slab", non publié.

[6] J.C. GUILLOT et C.H. WILCOX : "Spectral analysis of the Epstein operator", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 80 A(1978), p.85-98.

[7] I.W. HERBST : "Unitary equivalence of Stark Hamiltonians", Math. Zeit, 155 (1977), p. 55-70.

[8] L. HÖRMANDER : "Théorie de la diffusion à courte portée pour des opérateurs à caractèristiques simples", Semi. Goulaouic-Meyer-Schwartz,exposé n°XIV, 17/02/1981.

[9] T. IKEBE : "Remarks on non-elliptic stationnary wave propagation problems", Japan J. Math., vol.6,n°2(1980), p.247-258.

[10] H. TAMURA : "The principle of limiting absorption for uniformly propagative systems with perturbations of long-range class", Nagoya Math. J., vol.82(1981), p.141-174.

[11] C.H. WILCOX : "Spectral analysis of sound propagation in stratified media", rapport n°387(1980), Université de Bonn.

[12] K. YAJIMA : "The limiting absorption principle for uniformly propagative systems", J. Fac. Tokyo, vol 21, 1(1974), p.119-131.

[13] K. YAJIMA : "Eigenfunction expansions associated with uniformly propagative systems and their applications to scattering theory", J. Fac. Tokyo vol22,2(1975), p.121-151.

[14] K. YAJIMA : "Spectral and scattering theory for Schrödinger operators with Stark-effect", preprint.