Journées Équations aux dérivées partielles

Paul Godin

Le problème de la dérivée oblique non linéaire

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A14_0>

LE PROBLEME DE LA DERIVEE OBLIQUE

NON LINEAIRE

par P. GODIN

0. INTRODUCTION :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ouvert situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$, supposée C^∞ et de dimension n. On étudie dans cet exposé la régularité des solutions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ du problème aux limites

$$(1) \qquad F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = 0 \qquad \text{si} \quad x \in \Omega,$$
$$(2) \qquad f(x,u,\nabla u) = 0 \qquad \text{si} \quad x \in \partial\Omega,$$

où F et f sont des fonctions C^∞ (astreintes à des conditions décrites plus loin) et $\nabla u = (\partial_1 u,\ldots,\partial_{n+1}u)$, $\nabla^2 u = (\partial^2_{11},\partial^2_{12}u,\ldots,\partial^2_{1j}u,\ldots,\partial^2_{n+1,n+1}u)$; ∂_j désigne la dérivation par rapport à x_j.

Les résultats décrits ci-dessous sont contenus dans [4] et [5]. Ils sont bien connus dans le cas où F et f sont linéaires par rapport à $u,\nabla u,\nabla^2 u$.

Dans la première partie de cet exposé, on donne des conditions suffisantes pour que les solutions (assez régulières) du problème (1), (2) soient C^∞ jusqu'au bord. Dans la seconde partie, on étudie une situation où il existe des solutions qui ne sont pas C^∞ jusqu'au bord.

1. REGULARITE JUSQU'AU BORD DES SOLUTIONS.

On linéarise le problème (1),(2) en posant $\tilde{F}(u) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)\,\partial^\alpha$, $\tilde{f}(u) = \sum_{|\alpha|\leq 1} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}(x,u,\nabla u)\,\partial^\alpha$, utilisant la notation u_α pour $\partial^\alpha u$. Soit $\tilde{f}_1(u)$ la partie principale de $\tilde{f}(u)$. On décompose $\tilde{f}_1(u)$ en une somme $X+\beta N$, où X est tangent à $\partial\Omega$, N est la normale unitaire intérieure à $\partial\Omega$ et β est une fonction sur Ω.

Soit $q \in \partial\Omega$. Si $\beta(q) \neq 0$, le problème (1), (2) est elliptique et la régularité jusqu'au bord de ses solutions (de classe $C^{2+\alpha}$, $\alpha>0$) est alors bien connue ([1]). En général, on appelle γq la courbe intégrale maximale de X issue de q à l'instant initial et on introduit les conditions suivantes, où $k \in \mathbb{Z}^+$:

$(A_k)q$ Il existe un voisinage V de q dans $\partial\Omega$ tel que, pour tout $q' \in V$, la restriction de β à $\gamma_{q'} \cap V$ n'a que des zéros d'ordre $\leqslant k$.

$(B)q$ Il existe un voisinage V de q dans $\partial\Omega$ tel que, pour tout $q' \in V$, β ne change jamais de signe de + à - le long de $\gamma_{q'} \cap V$.

(A_k) et (B) sont évidemment les conditions classiques de sous-ellipticité si les équations (1), (2) sont linéaires par rapport à $u, \nabla u, \nabla^2 u$.

On suppose que $\partial\Omega$ est compacte et donnée par une équation $t = 0$, où t est définie dans un voisinage de $\partial\Omega$ et C^∞, $t>0$ dans Ω, $t<0$ hors de Ω, $dt \neq 0$ sur $\partial\Omega$. On peut alors identifier un voisinage de $\partial\Omega$ dans $\overline{\Omega}$ à $[0,T] \times \partial\Omega$. Si U est un ouvert de $\partial\Omega$ et Γ un cône ouvert de $T^*U \setminus 0$, on introduit les espaces ($m \in \mathbb{Z}^+$, $s \in \mathbb{R}$) :

$$D^{m,s}(T,\partial\Omega) = \bigcap_{0\leqslant j\leqslant m} C^j([0,T],\ H^{m+s-j}(\partial\Omega)),$$

$$D^{m,s}_{loc}(T,U) = \{u \in C([0,T], \mathcal{D}'(U)),\ \varphi u \in D^{m,s}(T,\partial\Omega) \text{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(U)\},$$

$$D^{m,s}(T,U,\Gamma) = \{u \in C([0,T], \mathcal{D}'(u)),\ \chi u \in D^{m,s}_{loc}(T,U)$$ pour tout opérateur pseudo-différentiel classique propement supporté χ défini dans U tel que $WF(\chi) \subset \Gamma\}$.

On peut alors démontrer le résultat suivant (cf.[4]) :

Théorème 1. *On suppose que x_o est un point de $\partial\Omega$ en lequel $\partial\Omega$ n'est pas caractéristique et que $(x_o,\xi^o) \in T^*\partial\Omega \setminus 0$ est un point elliptique pour $\tilde{F}(u)$. On suppose aussi que les conditions $(A_k)_{x_o}$ et $(B)_{x_o}$ sont satisfaites et que $u \in D^{m,s}_{loc}(T,U)$ est solution de (1), (2) près de x_o, U étant un voisinage de x_o dans $\partial\Omega$. Alors il existe une constante $C(n,k)$ indépendante de u telle que si $s > \frac{n}{2}$ et $m+s > C(n,k)$, l'on ait $\partial_t^j u \in D^{o,\lambda j(\varepsilon)}(T',U',\Gamma)$ si $j \leqslant m$ et $\varepsilon > 0$,* *où* $T' > 0$, U*'est un voisinage de* x_o *dans* $\partial\Omega$ *et* Γ *est un ouvert conique contenant* (x_o,ξ^o). *On a posé* $\lambda_j(\varepsilon) = r + min([r_\varepsilon] + \delta' + 1 - j,\ r_\varepsilon - 2j + 4)$, *où* $r = m + s - 2$, $r_\varepsilon = r - \frac{n}{2} - \varepsilon$ *et* δ' *désigne un nombre réel arbitraire strictement inférieur à* $\frac{1}{k+1}$.

Lorsque les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées dans tout un voisinage V de x_o et en tous les points de $T^*V\backslash 0$, on obtient que u est C^∞ jusqu'au bord près de x_o dès que $u \in H^\sigma(\Omega)$ (avec σ assez grand).

La démonstration du théorème 1 utilise le calcul paradifférentiel de Bony (voir[2]). On prend des coordonnées locales x de $\partial\Omega$ dans un voisinage de x_o. On pose $v = \varphi u$, où φ est une fonction troncature. Linéarisant à t fixé par la méthode de Bony, on obtient que v est solution de l'équation paradifférentielle.

$$(3) \qquad (\partial_t^2 + A(t)\ \partial_t + B(t))v = g, \quad 0 < t < T'$$

où A(t) et B(t) sont des opérateurs paradifférentiels en les variables x et $\partial_t^j g \in D^{o,r+r_\varepsilon-2j}(T',\ \mathbb{R}^n,\Gamma_1)$ si $j \leqslant m - 2$. Γ_1 désigne ici un ouvert conique assez étroit contenant (x_o,ξ^o). On écrit le premier membre de (3) sous la forme $(\partial_t+A^-(t))(\partial_t+A^+(t))v$ (modulo un reste régulier); on vérifie que $(\partial_t+A^+(o))v(o) \in H^{r+[\tau_\varepsilon]+\mu}(\Gamma_1)$ si $\mu<1$. La dérivée normale de v sur le bord apparaît donc comme un opérateur paradifferentiel, ce qui est semblable à une propriété bien connue dans le cas linéaire. En linéarisant la condition au bord (2) par des opérateurs paradiffentiels, on obtient alors une équation paradifférentielle sur le bord pour les solutions de laquelle on peut prouver des estimations à priori sous elliptiques. Ceci permet d'achever la démonstration du théorème 1.

2. EXISTENCE DE SOLUTIONS NON REGULIERES JUSQU'AU BORD.

Si (A_k) est réalisée mais (B) ne l'est pas, on sait ([6]) qu'il existe des solutions de (1), (2) non C^∞ jusqu'au bord lorsque F et f sont linéaires par rapport à u, ∇u, $\nabla^2 u$ et F est elliptique. Moyennant une hypothèse supplémentaire sur la façon dont la condition (B) est transgressée, on va voir que de telles solutions existent aussi si F et f sont non linéaires.

On suppose que $F,f \in C^\infty$ vérifient

(4) $F(x,0,0,0) = f(x,0,0,0) = 0$ si x est proche de $x_o \in \partial\Omega$,

(5) $\sum_{\alpha=2} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x,u,p,q)\,\xi^\alpha \geq c\,|\xi|^2$ si x est proche de x_o et u,p, q sont assez petits.

Semblablement à la définition de $\tilde{\Gamma}_1(u)$ donnée au §1, on pose $\tilde{\Gamma}_1(u,p) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial p_j}(x,u,p)\frac{\partial}{\partial x_j} = X + \beta N$

On introduit une hypothèse sur la façon dont β peut changer de signe (cf [3], [8],[9] dans le cas des problèmes linéaires) : (c) Il existe une fonction $w \in C^\infty(\partial\Omega)$ telle que $w(x_o) = 0$, $Xw(x_o) > 0$ et $\beta w \leq 0$ si x est proche de x_o et u, p sont petits.

On suppose aussi que, si u et p sont assez petits, la condition $(A_k)_{x_o}$ est vérifiée par $\tilde{\Gamma}_1(u,p)$ avec un voisinage V indépendant de u et p. On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 2: Sous les hypothèses précédentes, il existe des solutions de (1), (2) dans un voisinage de x_o, qui ne sont pas C^∞ jusqu'au bord.

Afin d'éviter des complications techniques, on se limitera au cas où f est de la forme $f(x,u,p) = \sum a_j(x)\,p_j$. Alors la condition aux limites (2) est linéaire et s'écrit $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, avec $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ et le théorème 2 est une conséquence du résultat suivant, où l'on désigne par Y_δ l'ensemble $\{\delta x, x \in Y\}$ si $Y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $\delta > 0$.

<u>Théorème 3 :</u> Soit E un domaine borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ à frontière C^∞ ∂E tel que $0 \in \partial E$. On suppose que $E' = \{x \in E, x_1 = 0\}$ est un domaine non vide à frontière C^∞ de $\mathbb{R}^n$ et que $\frac{\partial}{\partial\nu}$ est défini, transverse aux hyperplans $x_1 = const.$ et C^∞ dans un voisinage de $\bar{E}$. On fait de plus les hypothèses suivantes si $0 < \delta \leq 1$:

1) Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ, telle que E_δ soit une réunion d'arcs de courbes intégrales de $\frac{\partial}{\partial\nu}$, de longeur $\leq C_\delta$, issus de E'_δ.

2) $\frac{\partial}{\partial\nu}$ satisfait la condition (A_k) en tout point de ∂E_δ.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $u_o \in C^a(\partial E'_\delta)$, $a>3$. *Alors si* δ *et* θ *sont assez petits, le problème aux limites.*

$$(7) \qquad \begin{cases} F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = 0 & \text{dans } E_\delta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial E_\delta, \\ u = \theta\, u_o & \text{sur } \partial E'_\delta, \end{cases}$$

possède une solution $u \in C^{a-\varepsilon}(\bar{E}_\delta)$ ($\varepsilon>0$ *est arbitraire*).

Le théorème 3 signifie que $(0,0,\theta u_o)$ est dans l'image de l' opérateur $\Phi(u) = \left(F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u), \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial E_\delta}, u\Big|_{\partial E'_\delta}\right)$.

Φ est une application différentiable de $C^{\sigma+2}(\bar{E}_\delta)$ dans $C^{\sigma}(\bar{E}_\delta) \times C^{\sigma+1}(\partial E_\delta) \times C^{\sigma+1}(\partial E'_\delta)$ si $\sigma > 0$. Pour en démontrer l'inversibilité (à droite), on peut utiliser la technique de Nash-Moser suivant la présentation de Zehnder [10]. L'idée est d'essayer de construire une suite convergente $\{u_j\}$ telle que $\Phi(u_j) \longrightarrow f$. On a en premier approximation $\Phi(u_{j+1}) = \Phi(u_j)+\Phi'(u_j)\,(u_{j+1}-u_j)$, ce qui conduit à poser, si $\Phi'(u_j)$ est inversible à droite :

$$(8) \qquad u_{j+1} = u_j - (\Phi'(u_j))^{-1}\,(\Phi(u_j)-f)$$

Si $\{u_j\}$ converge vers u, on aura alors $\Phi(u) = f$ sous des hypothèses raisonnables.

La première étape est donc d'étudier $\Phi'(u)$, c'est-à-dire un problème linéaire du genre

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x)\partial^\alpha v = f & \text{dans } E_\delta, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = g & \text{sur } \partial E_\delta, \\ v = h & \text{sur } \partial E'_\delta. \end{cases}$$

Un tel problème a été étudié dans [3],[8], et [9]. Dans [9], le résultat suivant est démontré (sous l'hypothèse supplémentaire $a_o \leq 0$ dont on peut se débarasser en prenant δ assez petit) :

Lemme 1. Soit $\lambda \in (0,1)$. *Supposons que* $a_\alpha \in C^{1+\lambda}(\bar{E}_\delta)$, $f \in C^{1+\lambda}(\bar{E}_\delta)$, $g \in C^{2+\lambda}(\partial E_\delta)$, $h \in C^{2+\lambda}(\partial E'_\delta)$. *Si* δ *est assez petit, le problème (9) possède une solution (unique) de classe* $C^{2+\lambda}(\bar{E}_\delta)$.

Le Lemme 1 permet d'inverser $\Phi'(u)$, mais comme on prend une dérivée à chaque étape, il faut régulariser l'expression (8). Suivant Zehnder, on pose

$$(8') \qquad u_{j+1} = u_j - St_j(\Phi'(u_j))^{-1}\,(\Phi(u_j) - S\,r_j\,f),$$

où St_j et $S\tau_j$ sont des régularisations convenables.
On montre que les résultats de Zehnder sont applicables dans le cadre du théorème 3 en prouvant des estimations à priori convenables pour les solutions de (9). Si $\delta>0$ et θ sont assez petits, on obtient une suite $\{u_j\}$ convergeant vers une solution $u \in C^{a-\varepsilon}(\bar{E}_\delta)$ de (7). Le théorème 3 est ainsi démontré.

Le théorème 2 s'obstient alors en choisissant un système de coordonnées locales où $x_o = 0$ et où $\partial\Omega$ est donné près de 0 par l'équation $x_{n+1} = 0$. On prend alors pour $\bar{E}$ un voisinage convenable de 0 dans $\bar{\Omega}$ et on applique le théorème 3 en choisissant $u_o \notin C^\infty$.

Supposons que les hypothèses du théorème 2 soient réalisées et soit u une solution de (1), (2), suffisamment régulière. Le théorème 1 montre que $u \in C^\infty$ jusqu'au bord au voisinage des points proches de x_o où w ne s'annule pas. En linéarisant par des opérateurs paradifférentiels on peut aussi montrer que u est C^∞ jusqu'au bord au voisinage de tout point x de $w^{-1}(0)$ assez proche de x_o qui n'est pas dans le support singulier de u_o.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, A.DOUGLIS, L.NIRENBERG : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partail differential equations satisfying general boundary conditions I. Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.

[2] J.-M. BONY : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, 14 (1981), 209-246.

[3] Y. EGAROV et V. KONDRATIEV : The oblique derivative problem. Math. USSR. Sb. 7 (1969),139-169.

[4] P.GODIN : Subelliptic non linear oblique derivative problems, à paraître dans Amer. J. Math.

[5] P. GODIN : Singular solutions to non linear oblique derivative problems, en préparation.

[6] L. HORMANDER : On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-différential equations. L'Ens. Math. 17 (1971), 99-163.

[7] L. HORMANDER : Subelliptic operators, dans : Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations, Annals of Math. Studies 91 (1979), 127-208.

[8] A. MELIN et J. SJOSTRAND : A calculus for Fourier integral operators in domains with boundary and applications to the oblique derivative problem, Comm. Part. Diff. Eq. 2, 9 (1977), 857-935.

[9] B. WINZELL : The oblique derivative problem II. Ark. för Mat. 17 (1979), 107-122.

[10] E. ZEHNDER : Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems I. Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 91-140.