JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CLAUDE BARDOS

Équation de transport. Théorie spectrale et approximation de la diffusion

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A6_0>

Conférence n° 6

EQUATION DE TRANSPORT. THEORIE SPECTRALE ET APPROXIMATION DE LA DIFFUSION

par C. BARDOS

I. INTRODUCTION

Dans cet exposé on se propose de passer en revue les principaux résultats obtenus concernant la théorie spectrale, l'approximation de la diffusion et la longueur d'extrapolation pour l'équation de transport. Ces notions sont anciennes; on les trouve déjà dans les livres de Weinberg et Wigner [12] , Case et Zweifel [3] ou Chandrasekhar [4]. Mais elles étaient primitivement basées sur des considérations physiques ou sur des calculs explicites guidés par l'intuition des physiciens. Ce n'est que progressivement que ces notions et les résultats correspondants ont été mathématisés. Les étapes essentielles de cette mathématisation ont été l'article de Lehner et Wing [8] pour le spectre de l'opérateur de transport dans une bande, les articles de Vidav [11] qui traitent du spectre de l'opérateur de transport sous des hypothèses générales, l'article de Larsen et Keller [7] sur l'approximation de la diffusion, l'article de Bensoussan, Lions et Papanicolaou [2] sur les couches limites et enfin la thèse de R. Sentis [9] .

Récemment l'auteur a obtenu, en collaboration avec R. Santos et R. Sentis [1] une justification du calcul de la taille critique faisant intervenir la longueur d'extrapolation ce qui sera sommairement évoqué à la fin de l'exposé.

II. L'OPERATEUR DE TRANSPORT ET SON SPECTRE

Pour simplifier l'exposé on se place dans un cas suffisamment général pour montrer l'introduction des méthodes et suffisamment particulier pour alléger au maximum les notations.

L'équation de transport s'écrit :

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial v} + v.\ \nabla u + u - \int_V k(v,v')u(x,v',t)\,dv' = 0$$

$$(2) \qquad u(x,v,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial X \quad \nu(x).v < 0.$$

Dans (1) et (2), X désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière ∂X régulière, $\nu(x)$ est la normale extérieure à l'ouvert X. V désigne l'espace des vitesses ; on supposera que V est la boule unité $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid |v| \leqslant 1\}$.

L'opérateur intégral sera noté K

$$(3) \qquad Ku = \int_V k(v,v')u(v')dv'.$$

On suppose que k est une fonction strictement positive, symétrique par rapport aux variables v et v', invariante par rotation et assez régulière. On suppose enfin que k vérifie l'hypothèse :

$$(3') \qquad \int_V k(v,v')dv' = 1$$

u(x,v,t) désigne une probabilité de présence de particules au point x à l'instant t animées de la vitesse v. La condition aux limites (2) signifie qu'aucune particule ne rentre dans le domaine X, ou si l'on veut, que toute particule sortante est perdue. On parle alors de condition aux limites absorbante. A l'équation (1) (2) on associe un semi-groupe e^{tT} qui est fortement continu dans les espaces $L^p(X \times V)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ et dans l'espace $C^o(X \times V)$ (dès que X est convexe). Il n'est pas fortement continu dans L^∞ mais néanmoins dans $L^\infty(X \times V)$, comme dans tous les autres espaces e^{tT} est une famille d'opérateurs à contraction. La résolvante de T, $\rho(T)$ est bien entendu l'ensemble des points ou l'équation stationnaire

$$(4) \qquad \lambda u + v.\nabla u + u - Ku = f, \quad u(x,v) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial X,\ \nu(x).v < 0.$$

admet une unique solution, et son spectre $\sigma(T)$ en est le complémentaire.

En considérant d'abord le cas $K \equiv 0$, puis en utilisant le théorème de Shmul'yan (cf. [10]) et le théorème de Krein et Reitman [6] on prouve le

<u>Théorème 1</u> : Dans tous les espaces $L^p(X \times V)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ le spectre de T est identique. Il est constitué du demi-plan $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -1$ et d'une suite éventuelle de valeurs propres contenues dans la bande $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Cette suite ne possède pas de points d'accumulation à l'intérieur de cette bande. Enfin dès qu'il existe des valeurs propres dans la bande $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ le nombre $\Lambda = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \mathrm{Re}\,\lambda$ est une valeur propre de multiplicité géométrique 1, le vecteur propre correspondant est strictement positif à l'intérieur de X et Λ coïncide avec le type du semi-groupe.

En utilisant les propriétés de positivité de l'opérateur T on montre ensuite (cf. [11]) le

Théorème 2 : Dès que l'ouvert X est assez grand $\sigma(T) \cap \{\lambda \mid \mathrm{Re}\,\lambda > -1\}$ est non vide et la fonction Λ_X est croissante et continue (dans un sens convenable) par rapport à X.

III. L'APPROXIMATION DE LA DIFFUSION

Une quantité particulièrement importante dans la pratique est la densité totale de particules

$$q(x,t) = \int_V u(x,t,v)\,dv\ ,$$

il est donc désirable d'obtenir une équation pour q. Une intégration par rapport à v donne :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \int_V v.u(x,v,t)\,dv = 0. \tag{5}$$

L'intégrale $\int_V v\, u(x,v,t)\,dv$ s'interprète comme un couvrant, noté $\mathcal{J}$ et (5) n'est autre qu'une loi de Coulomb

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{J} = 0 \tag{6}$$

Mais le problème fondamental est alors de trouver une relation (éventuellement approchée entre $\mathcal{J}$ et q) et de justifier cette relation.

La méthode la plus mathématique pour réaliser ce programme a été introduite par Larsen et Keller [7]. On introduit un paramètre $\varepsilon > 0$ (qui s'interprète comme le libre parcourt moyen) et on regarde le comportement asymptotique, pour $\varepsilon \to 0$, de la solution u de l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{v.\nabla u_\varepsilon}{\varepsilon} + (u_\varepsilon - Ku_\varepsilon)/\varepsilon^2 = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - T_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \tag{7}$$

$$u_\varepsilon(x,v,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial X\ ,\ \nu(x).v < 0. \tag{8}$$

On démontre facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, e^{tT_ε} est une semi-groupe fortement continu à contraction dans tous les espaces $L^p(X \times V)$, $1 \leqslant p < \infty$. D'après les théorèmes classiques de Kato [5] la convergence de ces semi-groupes, pour t dans un borné de $\mathbb{R}_+$ est alors équivalente à la convergence des résolvantes. Aussi on se contentera d'étudier la convergence dans $L^p(X \times V)$ des solutions des équations de la forme :

(9) $$\lambda u_\varepsilon + \frac{v}{\varepsilon} \nabla u_\varepsilon + (u_\varepsilon - Ku_\varepsilon)/\varepsilon^2 = f$$

où f sera choisie (pour simplifier) indépendante de v.

Suivant Larsen et Keller, on cherche alors u_ε sous la forme

(10) $$u_\varepsilon(x,v) = u_o + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + h_\varepsilon .$$

Pour éliminer les termes de degré -2, -1 et zéro en ε dans (9) il faut que u_o, u_1 et u_2 vérifient les relations

(11) $$u_o - Ku_o = 0$$

(12) $$v \nabla u_o + u_1 - Ku_1 = 0$$

(13) $$\lambda u_o + v \nabla u_1 + u_2 - K u_2 = f .$$

L'équation (11) implique (cf.[2]) que u_o est une fonction indépendante de v. u_1 s'écrit alors sous la forme

(14) $$u_1(x,v) = -D(v).\nabla u_o + w ,$$

où $D(v) = (D_1(v), D_2(v), D_3(v))$ est l'unique fonction vectorielle solution des équations.

(15) $$D_i(v) - K D_i(v) = v_i , \int_V D_i(v) \, dv = 0 .$$

Pour que l'équation (13) admette une solution il est nécessaire et suffisant que u_o satisfasse alors à la condition de compatibilité

(16) $$\lambda u_o - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_V v_i D_j(v) dv \right) \frac{\partial u_o}{\partial x_j} = f .$$

En fait (16) est une équation elliptique et on montre que si k est invariant par rotation on a

(17) $$\int_V v_i D_j dv = \kappa \ \delta_{ij}$$

où K est une constante positive. On pose alors

(18) $$h_\varepsilon = u - u_o - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2 \ .$$

Cette fonction est solution de l'équation de transport stationnaire inhomogène :

(19) $$\lambda h_\varepsilon + \frac{v}{\varepsilon} \nabla h_\varepsilon + (h_\varepsilon - Kh_\varepsilon)/\varepsilon^2 = \varepsilon \Omega_\varepsilon \ .$$

(20) $$h_\varepsilon(x,v) = u_o + \varepsilon . u_1 + \varepsilon^2 u_2 \quad \text{si} \quad x \in \partial X \quad \text{et} \quad \nu(x).v < 0.$$

L'opérateur $\frac{v}{\varepsilon} \nabla + (I - K)/\varepsilon^2$ intervenant dans la premier membre de (19) est, avec la condition aux limites homogènes (2), uniformément accrétif dans tous les espaces $L^p(X \times V)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Ceci permet de prouver le

<u>Théorème 3</u> : On suppose que f est une fonction régulière indépendante de v. On désigne par u_o la solution de l'équation :

(21) $$\lambda u_o - \kappa \Delta u_o = f \quad , \ u_o|_{\partial X} = 0 \ .$$

Alors il existe une constante C_p indépendante de ε telle que pour la solution u_ε de l'équation

(22) $$\lambda u_\varepsilon + \frac{v}{\varepsilon} \nabla u_\varepsilon + (u_\varepsilon - Ku_\varepsilon)/ \varepsilon^2 = f, \ u_\varepsilon(x,v) = 0$$

si $u \in \partial X$ et $\nu(x).v < 0$, on ait la relation :

(23) $$|u_\varepsilon - u_o - \varepsilon(D(v)\nabla u_o + w)|_{L^p(X \times V)} \leqslant \varepsilon \ C_p \ .$$

(pour tout p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$).

<u>Remarque 1</u> : En repassant au semi-groupe on obtient un théorème analogue concernant la convergence de la solution de (1), (2) vers la solution de l'équation d'évolution

(24) $$\frac{\partial u_o}{\partial t} - \kappa \ \Delta u_o = 0 \ , \ u(x,o) = f(x) \ , \ u|_{\partial X} = 0 \ .$$

Remarque 2 : On a choisi f indépendant de v pour éviter de soulever les problèmes de couches limites. Ceux-ci apparaissent cependant dans la construction de la longueur d'extrapolation (cf. Remarque 4).
q est relié à u_o par la relation $q = |V|\, u_o$, ainsi la comparaison de (6) et (14) fournit une relation de fermeture de la forme

(25) $$\mathcal{J} = -\kappa \nabla q$$

ce qui correspond aux intuitions physiques.

IV. APPROXIMATION DE LA VALEUR PROPRE PRINCIPALE ET PROBLEMES DE TAILLE CRITIQUE

Une des applications fondamentales de la théorie de la diffusion est le calcul approché de la première valeur propre (qui bien entendu dépend du domaine) et le calcul de la taille critique (détermination de la taille du domaine tel que cette valeur propre soit égale à zéro).

Pour cela on commence par étudier l'équation aux valeurs propres :

(26) $$\Lambda_\varepsilon u_\varepsilon + \frac{v.\nabla u_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}(u_\varepsilon - Ku_\varepsilon) = 0, \quad u_\varepsilon(x,v) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial X,\ \nu(x).v < 0$$

avec $\Lambda_\varepsilon > -\frac{1}{\varepsilon^2}$ (1) et on démontre la

Proposition 1 : (Bardos-Santos-Sentis [1]). Pour $\varepsilon < \varepsilon_o$ l'ensemble $\{\mathrm{Re}\,\lambda > -1/\varepsilon^2\} \cap \sigma(T\ )$ est non vide.

Soit donc Λ_ε la valeur propre principale, elle est caractérisée par l'existence d'une fonction u_ε positive solution de (26), et elle caractérise le type du semi-groupe $e^{t\,T_\varepsilon}$. Elle appartient à l'intervalle $]-1/\varepsilon^2, 0[$. On montre ensuite (Sentis [9]) que pour $\varepsilon \to 0$ le type du semi-groupe e^{tT_ε} est borné inférieurement. On en déduit l'existence d'une sous-suite Λ_ε convergeant vers un nombre Λ négatif. A cette suite on associe une suite de vecteurs propres positifs u_ε , de norme 1 dans $L^2(X \times V)$ qui converge faiblement vers une fonction $u \geq 0$ solution de l'équation :

(27) $$\Lambda u - \kappa \Delta u = 0 \quad , \ u|_{\partial X} = 0 .$$

---

(1) Compte tenu des résultats du § II, la bande $\mathrm{Re}\,\lambda \leq -1/\varepsilon^2$ est du spectre continu et les valeurs propres éventuelles sont dans la bande $-1/\varepsilon^2 < \mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Enfin pour prouver que Λ est la valeur propre principale il suffit de montrer que u n'est pas identiquement nulle. Pour cela on prouve que la suite u_ε, converge non seulement faiblement mais aussi fortement (dans $L^2(X \times V)$). On a donc le

Théorème 3 : (Sentis [9]) Pour ε tendant vers zéro, la valeur propre principale Λ_ε de l'opérateur $-\frac{v}{\varepsilon}\nabla - \frac{1}{\varepsilon^2}(I-K)$ avec la condition aux limites absorbante converge vers la valeur propre principale Λ du problème de Dirichlet

$$\Lambda u - \kappa\Delta u = 0 \qquad u|_{\partial X} = 0 .$$

Le problème de la taille critique est le suivant : on se donne un ouvert X et on cherche un coefficient μ tel que dans l'ouvert μX, 0 soit la valeur propre principale de l'opérateur

$$T_\gamma = -v.\nabla - (1 - (1+\gamma)K) \qquad (\gamma \text{ constante positive}).$$

avec la condition aux limites absorbante. Pour cela on commence par remarquer que l'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$(28) \qquad 0 = \Lambda u + v\nabla u + (1 - (1+\gamma)K)u = (1+\gamma)\left[\frac{(\Lambda-\gamma)}{(1+\gamma)} u + \frac{v}{(1+\gamma)}\nabla u + (I-K)u\right] = 0$$

En introduisant l'ouvert $X' = (1+\gamma)X$ l'équation (28) s'écrit dans X'

$$(29) \qquad \frac{(\Lambda-\gamma)}{(1+\gamma)} u + v.\nabla u + (I-K)u = 0$$

avec la condition aux limites usuelle.

En utilisant les résultats du § II on en déduit que Λ est une fonction croissante et continue de X à valeur dans l'intervalle $]-1,\gamma[$. On introduit alors l'ouvert X_ε obtenu à partir de X par une homothétie de rapport $(1+\gamma)/\varepsilon$, ainsi on réintroduit, de manière naturelle le paramètre ε . On désigne par Λ_ε la valeur propre principale de l'opérateur $-v\nabla - (I-K)$, (avec la condition aux limites absorbante) dans cet ouvert, elle est caractérisée par l'existence d'un vecteur propre strictement positif u_ε solution de l'équation :

$$(30) \qquad \tilde{\Lambda}'_\varepsilon u_\varepsilon + v\nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon - (1+\gamma)Ku_\varepsilon = 0$$

$$(31) \qquad u_\varepsilon(x,v) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial X, \nu(x).v < 0 .$$

L'homothétie de rapport $\varepsilon/(1+\gamma)$ transforme ce problème en l'équation

$$\frac{(\tilde{\Lambda}_\varepsilon-\gamma)}{\varepsilon^2} + \frac{v\nabla u_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}(u_\varepsilon - Ku_\varepsilon) = 0 \tag{32}$$

qui est l'équation étudiée au § III et qui a conduit à l'approximation de la diffusion. On en déduit alors le

Théorème 4 (Bardos, Santos et Sentis [1]) :
(1) Soit X_ε une famille croissante d'ouverts tendant régulièrement vers $\mathbb{R}^3$. (On suppose par exemple que pour ε assez petit X_ε contient une boule de rayon $1/\varepsilon$) alors la valeur propre principale $\tilde{\Lambda}_\varepsilon$ de l'opérateur de transport $-v\nabla - (I-K)$, dans $L^p(X \times V)$ est croissante en fonction de $1/\varepsilon$ et tend vers γ comme un $O(\varepsilon^2)$.
(2) Soit X_T un ouvert de $\mathbb{R}^n$ donné, alors il existe une unique valeur ε_T telle que 0 soit la valeur propre principale de l'opérateur de transport dans l'ouvert

$$X_T = \left(\frac{1+\gamma}{\varepsilon_T}\right) X . \tag{33}$$

(3) Soit Λ la valeur propre principale de l'opérateur $\kappa\Delta$ dans X avec conditions aux limites de Dirichlet alors pour γ assez petit une approximation du nombre ε_T figurant dans la relation (33) est donnée par :

$$|\varepsilon_T - \sqrt{-\gamma/\Lambda}| \leqslant C \sqrt{-\gamma/\Lambda}. \tag{34}$$

La démonstration des points (1) et (2) est compte tenu de ce qui précède immédiate. La démonstration du point (3) est beaucoup plus délicate. Elle nécessite que l'on ait établi (pour la convergence de $(\Lambda_\varepsilon - \gamma)/\varepsilon^2$ vers ω) l'existence d'un correcteur c'est-à-dire que l'on ait prouvé pour la valeur propre Λ_ε de l'opérateur de transport $\frac{v.\nabla}{\varepsilon} + (I-K)/\varepsilon^2$ défini dans $X \times V$ l'existence d'un développement de la forme

$$\Lambda_\varepsilon = \Lambda + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2 O(\varepsilon). \tag{35}$$

Ceci est fait dans Sentis [9] .

Remarque 3 : Comme Λ est la valeur propre principale de l'opérateur $\kappa\Delta$ dans X, $\gamma = \varepsilon_T^2 \Lambda$ est la valeur propre de l'opérateur $\kappa\Delta$ dans $\frac{1}{\varepsilon_T}$ X. Ainsi on peut déterminer le nombre ε_T en cherchant l'ouvert dans lequel l'opérateur $(\gamma + \kappa\Delta)$, avec conditions aux limites de Dirichlet à zéro comme valeur propre principale. On a ainsi montré que la recherche de la taille critique pour l'opérateur de transport, équivalait à un facteur $(1+\gamma)$ près à la recherche de la taille critique pour l'opérateur de diffusion.

Remarque 4 : Dans (35) puis dans le calcul de la taille critique on peut remplacer le terme $(\Lambda + \varepsilon\omega_1)$ par tout terme $\Lambda_1(\varepsilon)$ dont l'écart à $(\Lambda + \varepsilon\omega_1)$ est de la forme $O(\varepsilon)\ \varepsilon^2$. On montre (Bardos, Santos et Sentis [1]) que ceci peut être réalisé si $\Lambda_1(\varepsilon)$ est défini par les équations :

(36) $$\Lambda_1(\varepsilon)u_\varepsilon + \kappa\Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } X,\ u_\varepsilon > 0 \quad \text{dans } X .$$

(37) $$u_\varepsilon + \varepsilon\ell \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right|_{\partial X} = 0 .$$

Le nombre ℓ qui apparaît dans la condition aux limites (37) peut être calculé en fonction du noyau $k(v,v')$. Il s'appelle la longueur d'extrapolation et a "d'évidentes" interprétations physiques. Il permet de modifier la relation (34). On a alors :

(38) $$|\varepsilon_T - \sqrt{-\gamma / \Lambda_1(\varepsilon)}| \leqslant C\ (-\gamma/\Lambda)^{3/2}$$

ce qui donne des calculs numériques beaucoup plus précis (cf. Bardos, Santos et Sentis [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bardos, R. Santos, R. Sentis : A paraître.

[2] A. Bensoussan, J. L. Lions et G. Papanicolaou : Boundary Layerand homogeneization of transport process. Publ. R.I.M.S. Kyoto 15 (1979) 53-157.

[3] M. Case et P. Zweifel : Linear transport theory. Addison Wesley, New York 1967.

[4] S. Chandrasekhar : Radiative transfer. Dover, New York, 1953.

[5] T. Kato : Perturbation Theory for linear operators.

[6] M. G. Krein et M. Rutman : Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. A.M.S. Translation n° 26, 1950.

[7] E. Larsen et M. Keller : Asymptotic solution of Neutron transport problem. J. Math. Phys. 15 (1974) 75-81.

[8] J. Lehner et G. Wing : On the spectrum of an asymmetric operator arising in the transport theory of neutrons. Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955) 217-234.

[9] R. Sentis : Thèse, Paris-Dauphine, 1981.

[10] J. Smul'yan : Completly continuous perturbation of operators. Dopl. Akad. Nauk. SSSR 101 (1955), 35-38.

[11] I. Vidav : Existence and uniqueness of non negative eigenfunction of the Boltzman operator. Journal of Math. Analysis and Application 22, 144-155 (1968).

[12] A. Weinberg et P. Wigner : The physical theory of neutron chain reactors. University of Chicago Press (1958).

*
* *
*