JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

TERESA MONTEIRO-FERNANDES

Constructibilité des solutions des systèmes microdifférentiels

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A4_0>

CONSTRUCTIBILITE DES SOLUTIONS DES SYSTEMES MICRODIFFERENTIELS

par Teresa MONTEIRO-FERNANDES

D'après les travaux de Kashiwara-Schapira et Kashiwara-Kawai, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux systèmes microdifférentiels holonomes singuliers réguliers sur une variété analytique complexe X les faisceaux de solutions $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ($\mathcal{E}_X$ désignant l'anneau des opérateurs microdifférentiels sur X) sont $\mathbb{C}$-constructibles; c'est-à-dire qu'il existe une stratification de Whitney $(Z_\alpha)_{\alpha \in I}$ du fibré cotangent à X, T^*X (on le note $T^*X = \bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha$) telle que pour tout j,α , $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})|_{Z_\alpha}$ soit un faisceau localement constant de rang fini sur $\mathbb{C}$. On peut cependant donner une condition plus faible pour aboutir à la même conclusion.

Pour cela nous nous ramenons au cas où $\mathcal{N}$ est un système holônome à caractéristiques simples sur une sous-variété V lagrangienne lisse conique de T^*X privé de sa section nulle . Dans cette situation on note $\mathcal{D}^1_V$ le sous faisceau d'anneaux de $\mathcal{E}_X$ engendré par $\mathcal{J}_V$, l'ensemble des opérateurs d'ordre $\leqslant 1$ dont le symbole d'ordre un s'annule sur V. Kashiwara et Kawai ont défini un morphisme d'anneaux ([3], [5]) $L^{(o)}$ de $\mathcal{D}^1_V$ sur $\mathcal{D}_V(O)$ (le faisceau des opérateurs différentiels sur V homogènes de degré zéro) en posant, pour un système de coordonnées symplectiques (x,ξ) sur T^*X et pour $P \in \mathcal{J}_V$ dont le symbole total s'écrit $P(x,\xi) = \sum_{i \leqslant 1} P_i(x,\xi)$,

$$L^{(o)}(P) = H_{P_1} + P_o - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i \partial \xi_i} .$$

Soit $\theta = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$. Alors $\forall\, P \in \mathcal{D}^1_V$ $[\theta \,, L^{(o)}(P)] = O$ et $\forall\, \nu$, $L^{(o)}(P)$ opère dans $\mathcal{O}_V(\nu)$ (le faisceau des fonctions holomorphes sur V homogènes de degré ν).

<u>Proposition 1</u> [3] : Le noyau de $L^{(o)}$ est égal à $\mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{D}^1_V$.

On démontre grâce à [10], [11], [12] ou encore [9] la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u> : Soit $\mathcal{M}_o$ un $\mathcal{D}^1_V$-module cohérent et soit $\mathcal{M}_{-1} = \mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{M}$, $\overline{\mathcal{M}}_o = \frac{\mathcal{M}_o}{\mathcal{M}_{-1}}$. Alors $\overline{\mathcal{M}}_o$ est un $\mathcal{D}_V(o)$-module cohérent et la variété caractéristique de $\mathcal{D}_V \underset{\mathcal{D}_V(o)}{\otimes} \overline{\mathcal{M}}_o$ dans T^*V est contenue dans $C^1_V(\mathcal{M}_o)$, la variété 1-microcaractéristique de $\mathcal{M}_o$ le long de V.

<u>Exemple</u> : Soit $X = \mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$ muni des coordonnées (x,t), $x \in \mathbb{C}^n$ et soit $V = \{(x,t;\xi,\tau) \in T^*\mathbb{C}^{n+1},\ t = \xi = 0\},\ \tau \neq 0$. Soit

$$\mathcal{M}_o = \frac{\mathcal{D}_V^1}{\mathcal{D}_V^1(t^2D_t + x_1)}\ .\ \text{Alors}\ C_V^1(\mathcal{M}_o) = T^*V \text{ et } Ch_V(\mathcal{M}_o) = \{(x,t,\tilde{\xi},\tilde{t}) \in T^*X,\ x_1 = 0\}\ .$$

On note $\hat{\mathcal{E}}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels formels (cf.[13])

$\hat{\mathcal{E}}_X^1 = \varprojlim_{k \in \mathbb{Z}} \dfrac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X(-k)}$ et si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module, on note $\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{E}}_X \underset{\mathcal{E}_X}{\otimes} \mathcal{M}$. On notera aussi $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-module holonome simple sur V muni du générateur u_o et on posera $\mathcal{N}(\nu) = \mathcal{E}_X(\nu)u_o$.

Notre condition est alors la suivante :

<u>Théorème 3</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et $\mathcal{M}_o$ un sous-$\mathcal{D}_V^1$-module cohérent qui l'engendre. Supposons $Ch_V(\mathcal{M}_o)$ lagrangien. Alors :

1) il existe localement $\nu_o \in \mathbb{N}$ tel que pour $|\nu| \geq \nu_o$ on ait :

$$\forall\ j,\ \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}(\nu)) \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_V^1}(\mathcal{M}_o,\mathcal{N}(\nu+1))$$

et ces faisceaux sont $\mathbb{C}$-constructibles.

Remarquons que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont singuliers réguliers les conclusions du théorème 3 résultent immédiatement des travaux de Kashiwara-Schapira [7], Kashiwara-Kawai [3] et Kashiwara-Oshima . Cependant le système $\mathcal{M}$ défini par les équations $(tD_t)u = (x^2D_x + 1)u = 0$ dans $\mathbb{C}^2$ (x,t) avec $V = \{(x,t;\ \xi,\tau) \in T^*\mathbb{C}^2\ ,\ t = \xi = 0,\ \tau \neq 0\}$ n'est pas singulier régulier et $Ch_V(\mathcal{M}_o)$ est isotrope puisque vide.

Pour démontrer le théorème 3 nous utilisons les lemmes suivants :

<u>Lemme 4</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et $\mathcal{M}_o$ un $\mathcal{D}_V^1$-sous-module cohérent de $\mathcal{M}$ qui l'engendre. Alors les groupes :

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{D}_V^1}\left(\frac{\mathcal{D}_V^1}{\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}_V^1}, \mathcal{M}_o\right)$$

sont nuls pour $i > 0$.

<u>Lemme 5</u> : Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre, θ un élément du centre de A et soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{A}$-modules à gauche. Supposons que pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, l'application $\theta - \lambda$ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ soit surjective et que $\forall j$, dim $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}\mathcal{N}) < +\infty$. Notons $\mathcal{N}_\lambda$ le noyau de $\theta - \lambda$ dans . Alors :

(1) $\forall \lambda$, $\forall j$, $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\lambda)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie ;

(2) $\forall j$, $\exists \lambda_o \in \mathbb{N}$ $|\lambda| \geqslant \lambda_o \Longrightarrow \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\lambda) = 0$.

<u>Démonstration du théorème 3</u> : Prenons des coordonnées locales de sorte que l'on peut supposer $X = \mathbb{C}^n$ muni des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et $V = \dot{T}^*_Z X$, Z désignant l'hypersurface d'équation $x_1 = 0$. On peut alors supposer $\mathcal{N} = C_{Z|X}$, le faisceau des microfonctions holomorphes le long de Z, d'ordre fini, et $\mathcal{N}(\nu) = C_{Z|X}(\nu)$. D'après le lemme 4 on a

$$\forall \nu \ , \quad \forall j \ , \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}^1_V} \left(\mathcal{M}_o \ , \frac{C_{Z|X}(\nu)}{C_{Z|X}(\nu - 1)}\right) \simeq$$

$$\simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_V(a)} \left(\overline{\mathcal{M}}(o) , \frac{C_{Z|X}(\nu)}{C_{Z|X}(\nu - 1)}\right) \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_V(0)} (\overline{\mathcal{M}}_o \ , \mathcal{O}_V(\nu)) \ .$$

Un théorème de Kashiwara [1] entraîne que les faisceaux $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_V(0)}(\overline{\mathcal{M}}_o, \mathcal{O}_V)$ sont $\mathbb{C}$-constructibles (puisque $\mathcal{D}_V \underset{\mathcal{D}_V(o)}{\otimes} \overline{\mathcal{M}}_o$ est holonome). On peut alors appliquer le lemme 5 avec

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}_V(0) , \quad \theta = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ , \ \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}_o \quad \text{et} \quad \mathcal{N} = \mathcal{O}_V \ ;$$

on en conclut l'existence locale dans chaque strate de la stratification de Whitney de V un $\nu_o \in \mathbb{N}$ tel que pour $|\nu| \geqslant \nu_o$ on ait $, \forall_j$, $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_V}(0)\ (\overline{\mathcal{M}}_o, \mathcal{O}_V(\nu)) = 0$.

On applique alors la :

<u>Proposition 6</u> : Sous les hypothèses du théorème 3, pour tout j et ν les faisceaux $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_V(\nu)}(\overline{\mathcal{M}}_o, \mathcal{O}_V(\nu))$ sont $\mathbb{C}$-constructibles, nuls pour $|\nu|$ assez grand, localement sur V.

Par suite on a localement et pour $|\nu|$ assez grand

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}^1_V}(\mathcal{M}_o, C_{Z|X}(\mu)) \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}^1_V}(\mathcal{M}_o, C_{Z|X}(\mu+1)) \ .$$

D'après la condition de Mittag-Leffler on en déduit que pour ν assez grand les $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}^1_V}(\mathcal{M}_o, C_{Z|X}(-\nu))$ sont nuls.

Le théorème 3 en résulte et de la proposition 6 aussi .

Q.E.D.

En particulier si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{E}_X$-modules et si la variété 1-micro caractéristique $C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est isotrope dans $T^*(T^*X)$ les $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ vérifient la conclusion 2) du théorème 3.

Remarquons enfin que l'on démontre grâce aux résultats de [12] le

<u>Théorème 7</u> : Soit V une sous-variété involutive lisse conique de $T^*X - T^*_XX$ et soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents, $\mathcal{N}$ à caractéristiques simples sur V. Supposons que dans une feuille bicaractéristique Σ de V l'on a $C^1_V(\mathcal{M})|_\Sigma$ isotrope. Alors les faisceaux

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})|_\Sigma , \ \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}^1_V}(\mathcal{M}_o, \mathcal{N}(\nu))|_\Sigma$$

sont constructibles, pour tout j et ν .

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Kashiwara : Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 10, 1975, p. 563-579.

[2] M. Kashiwara : Cours rédigé par Teresa Monteiro-Fernandes, Pré Publ. Publ. Math. de l'Université Paris-Nord.

[3] M. Kashiwara, T. Kawai : R.I.M.S. 1979, p. 293 (Preprint).

[4] M. Kashiwara, T. Kawai : in Lecture Notes in Phys. 126, 1980, p. 21-77.

[5] M. Kashiwara et T. Oshima : Ann. Maths., 106, 1977, p. 145-200.

[6] M. Kashiwara : Inv. Math., 49, 1978, p. 121-135.

[7] M. Kashiwara, P. Schapira : Acta Math., 142, 1979, p.1-55.

[8] M. Kashiwara, J. Sjöstrand et T. Kawai : Ark. för Mat. 17, 1979, p.83-91.

[9] Y. Laurent : in Lecture Notes in Phys., 126, 1980, p.77-89.

[10] T. Monteiro-Fernandes : Comptes Rendus Acad. Sc. 290, série A, 1980, p.787.

[11] T. Monteiro-Fernandes : Comptes rendus Acad. Sc., 290, série A, 1980, p. 833.

[12] T. Monteiro-Fernandes : Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels (A paraître).

[13] M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara : Lecture Notes in Math., 287, Springer, 287, Springer, 1973, p. 265-529.

* * *